多边形面積

中國數学会上海分会
中学數学研究委員会編

新 知 識 出 版 社

多　边　形　面　積

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新　知　識　出　版　社

一九五六年·上海

多　边　形　面　積

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

*

新知識出版社出版
（上海湖南路9号）
上海市書刊出版業營業許可証出015号

中科藝文联合印刷厂印刷　新華書店上海發行所總經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：3 3/8　字数：76,000
1956年7月第1版　1956年7月第1次印刷
印数：1—55,000本

統一書号：13076・46
定　价：(7) 0.30元

序　言

本会为了学習苏联先進經驗，帮助教师積極提高教学質量，并根据当前中学教学实际需要，决定着手編寫有关中学数学各科包括几何、算術、代数、三角教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中学数学教师作为進一步研究和了解教材的参考，从而更好地掌握教材的教学目的。同时，也可供中学生作为課外鑽研的題材，以利更深刻理解教材內容。我們希望通过这一套小册子的出版，能使数学界同志对中学数学教材的研究得到廣泛的交流。

本册运用了面積的分割、割补和补充方法來推導多边形面積公式的成立，对于面積的基本公理与多边形面積公式作了比較詳尽的叙述，并通过例題來說明其在証明、計算、作圖方面的应用；对于我國古代数学家在面積問題上的偉大貢献也作了適当的介紹。

本会在編寫本册以前，曾拟就編寫計划，經編輯組兩次討論，然后确定初步提綱，分别由張元書、賴云林兩同志提供材料，而由黃松年同志执筆寫成，再經楊荣祥、范际平兩同志校訂，最后由黃松年同志作了修正。虽然这样，但由于我們水平有限，时間匆促，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正。

中國数学会上海分会中学数学研究委员会

一九五六年四月

目　　錄

面積的概念及公理

我們以前研究直綫的概念，認为直綫是可以無限延長的，但是我們又知道空間不可能有一根孤立的直綫存在，而在平面几何來講直綫依附于一个平面的，因此一根直綫旣然可以無限延長即意味着这直綫所依附的平面在無限擴展．所以凡平面均可以無限擴展的概念，也是几何圖形的基本公理．但是**我們將平面限定了某一部分的量，也就是將这平面的周界确定成为一个封閉圖形，則它所佔有的領域，我們称为面積．**例如我們偉大的祖國东臨黃海、东海，西止帕米尔高原，南止南沙群島，北鄰蒙古人民共和國，这就是我們祖國的領域，这个領域的大小就是我們祖國的面積．

任何一个平面面積的量的大小，如同綫段的長短、角的大小一样，我們总是用一定的量数去表示它的．以前我們測量一个綫段的長度的时候，是取一定長度的單位綫段去度量，看它含有这單位綫段的多少倍，也就决定这綫段的量数是多少，从而知道这綫段的長度．測量平面圖形面積的大小，**用一定的量数來表示它，同样須取一定的單位面積去度量，从度量中确定这平面圖形含一定的單位面積多少倍，从而才确定它的量数是多少，也才知道这平面圖形面積的大小．这样單位面積是用边長为一个單位長度的正方形來表示的．**为什么我們用这样的正方形來作为單位面積呢？这是由于正方形是四边相等、四个角都是直角的特殊圖形，当它的边長已知，則在計算上容易判断一个平面面積的大小，在实际应用上比較方便的緣故．但是我們在实際測量中，所

取單位面積正方形的边長的單位綫段，是根据具体平面的大小而不同的。例如測量房屋面積的大小所取單位面積一般用平方公尺，也就是它的單位面積正方形的一边之長为一公尺。如果我們測量一个城鎮的面積，所取的單位面積一般用一平方公里，也就是每边为一公里的正方形作为單位面積。我們偉大的祖國的面積約有 1000 万平方公里，即意味着含有边長为一公里的正方形的單位面積 1000 万倍，这 1000 万平方公里就是量数，它就表示我們偉大祖國的面積。

由于我們研究平面几何僅限于研究直綫形与圓的几何圖形，所以討論几何圖形的面積概念，也局限于这些圖形作为研究的对象。但是我們在研究过程中，首先須从平面的直綫形（即多边形）的問題入手，而不能先从圓的面積入手。这是由于面積的概念以單位綫段为边長的正方形來作为單位面積的性質所决定。因为如果我們用分割法去求平面圖形圓的面積，除能把它分割成若干个單位面積的正方形外，顯然还剩有許多弓形面積，这些弓形是無法將它拚成正方形的，因而也無法正确肯定它面積的量数，所以要先研究多边形的面積。但是我們所研究的多边形是指的凸多边形，就是由凸折綫所圍成的封閉圖形，至于非凸折綫所圍成的非凸多边形，我們总可以把它分割为若干凸多边形來研究其面積的。

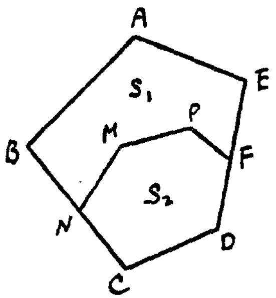
在研究多边形面積公式以前，必須討論兩条重要的几何公理：

1. 全等形的面積相等。所謂兩个或者兩个以上的几何圖形全等，我們是根据移形公理用叠合法來判断的。將圖形甲（或乙）移放在圖形乙（或甲）的上面，当它們对应的边与角处处重合时，即意味着这兩个圖形的大小完全相等，当然也就是表示它們的領域完全相等，也就是面積相等。如果我們將这个公理擴張，

也可以說当一个多边形的位置变化而圖形不变時，則根据移形公理它的面積不發生变化，我們称这种性質为面積的不变性。

2. 若把一个已知的圖形分成若干部分，則被分成的这些部分面積的总和，就等于已知圖形的面積．也可以說，兩个或兩个以上多边形和的面積就等于这兩个或兩个以上多边形面積之和，这就是面積的可加性．

例如：設已知多边形 $ABCDE$（簡称为多边形 S），在它的周上任取兩点 N, F，过此兩点在多边形 S 内引任意折綫 $NMPF$，則多边形 S 被此折綫（在特殊情况下此折射可为一綫段）分割为兩个新的多边形 $ABNMPFE$（簡称为 S_1）及 $CDFPMN$（簡称为 S_2）．这时 S 即由 S_1 和 S_2 組成，可以說，多边形 S 为兩个多边形 S_1 与 S_2 之和，



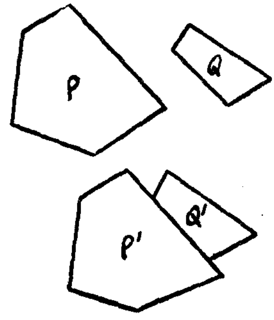
（圖 1）

$$S=S_1+S_2.$$

我們又可以說多边形 S 是 S_1 加上 S_2 或由 S_2 加上 S_1 而得到的．

如果將上例的性質普遍化，又可以用下例的意义來說明：

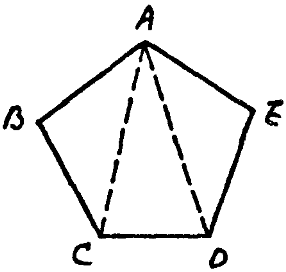
設多边形 P 与 Q，則可以常存在第三个多边形（一般为非凸多边形），可以作为分别与多边形 P 及 Q 相等的兩个多边形 P' 与 Q' 之和．这是由于兩个已知多边形 P' 及 Q' 中每一个可以全部放在其他多边形一边的同側而得



（圖 2）

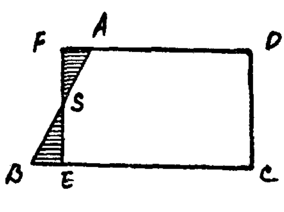
到的.

关于上面的第二条面積公理，也就是屬于一般几何公理"全量等于部分量之和"这个性質的范疇. 但这兩条面積公理，是研究面積的基礎.整个几何圖形的面積是借助于面積的分割、割补和补充三种方法从而導出各种平面圖形的面積公式，而面積的分割、割补和补充三种方法是根据上面兩条公理作为理論基礎的.什么叫做面積的分割呢？就是將任意一个平面圖形划分为若干部分，也就是將它划分为若干个多边形. 例如从圖3中，設多边形 $ABCDE$，連接 AC, AD，則將它划分为 $\triangle ABC$，$\triangle ACD$，$\triangle ADE$，顯然这3个三角形面積之和等于多边形 $ABCDE$ 的面積. 这也就是由于有全量等于部分量之和的公理存在才能將多边形及任何平面圖形的面積分割为若干部分，而所有部分面積之和，就是原來圖形的面積.



(圖 3)

什么叫做面積的割补呢？就是將一个平面圖形的某一部分割下來移放在另一个適当的位置上，从而使原來圖形的形狀变更. 我們这样割补的目的，在于运用后者圖形計算其面積，从而求出原來圖形的面積.如圖4中，直角梯形 $ABCD$ 在它的上面割取一部分 $\triangle BSE$，并將 $\triangle BSE$ 移放在 AB 边之外側的 $\triangle ASF$ 位置上（$\triangle ASF \cong \triangle BSE$），这样使原來的直角梯形变形为一个矩形，我們运用矩形 $DCEF$ 的面積公式來計算直角梯形 $ABCD$ 的面積. 但是为什么 $DCEF$ 能这样來計算呢？由于这种



(圖 4)

割补法系从面積公理出發，

$\because$ 直角梯形 $ABCD=$ 五边形 $ASECD+\triangle BSE$.

矩形 $DCEF=$ 五边形 $ASECD+\triangle ASF$.

其中 $\triangle BSE\cong\triangle ASF$.

根据公理 1，全等形的面積相等.故

$$\triangle BSE=\triangle ASF.$$

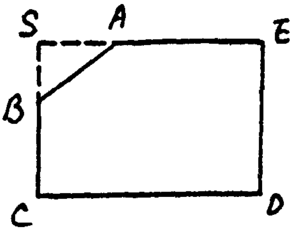
这梯形 $ABCD$ 与矩形 $FECD$ 有相同的組成部分，也就是它的对应部分相同. 我們再根据公理 2，全量等于部分量之和的性質，顯然直角梯形 $ABCD$ 与矩形 $DCEF$ 等積.

什么叫做面積的补充法呢？我們有时測量某一个平面圖形的面積，將它补充某一部分的圖形使它变为另一种圖形(一般是特殊圖形)，使变成新的圖形面積減去所补充的某一部分圖形的面積因而求出原圖形的面積.如圖 5 中，$ABCDE$ 是一个三个頂角 E, D, C 均为直角的五边形，延長 EA 及 CB 并交于 S 点，則得 $\triangle ASB$，顯然 $\triangle ASB$ 与五边形 $ABCDE$ 併成一个矩形. 而有

$$\triangle ASB+\text{多边形 } ABCDE$$
$$=\text{矩形 } SCDE.$$

即 矩形 $SCDE-\triangle ASB$

$$=\text{多边形 } ABCDE.$$



(圖 5)

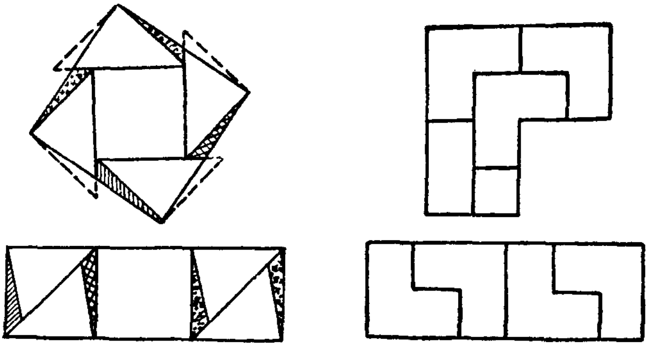
这是由于全量 $SCDE$ 等于部分量 $\triangle ASB$ 及多边形 $ABCDE$ 之和的緣故.

我們从面積的分割和割补中可以看出**当兩个多边形面積相等時，它們的形狀并不一定相同的，像这种等積的圖形一般有全等形和等積形兩种**.茲分別敘述如下：

当兩个几何圖形如果全等时，則它們的面積必相等，这概念

前面已經說过,不再重複.

当两个或两个以上的多边形可以分割为同数組对应相等的多边形时,則这两个多边形称为有相同的組成部分.如圖 6 中的两組圖形分别都是:



(圖 6)

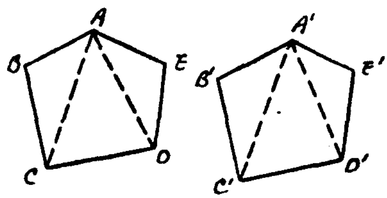
当两个或两个以上的多边形的領域大小相等，则称为等積形,如圖 6 中的各圖均是.

如果多边形 $ABCDE\cong$ 多边形 $A'B'C'D'E'$ 时,若連接 AC, AD 及 $A'C'$, $A'D'$ 顯然

$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$,

$\triangle ACD\cong\triangle A'C'D'$,

$\triangle ADE\cong\triangle A'D'E'$.



(圖 7)

所以当两个或两个以上的多边形全等時，我們不僅根据面積公理 1.,知道它們的面積必定相等,同時知道还可以分割成同数組对应相等的多边形.也就是說,全等形必有相同組成部分.

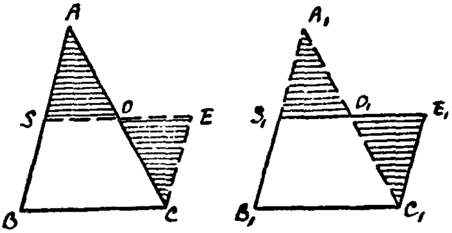
又如从圖 8 中,設 $\triangle ABC=\triangle ADS+$梯形 $SBCD$,

$\square S_1B_1C_1E_1=$ 梯形 $S_1B_1C_1D_1+\triangle C_1D_1E_1$,

若 $\triangle ADS=\triangle C_1D_1E_1$,

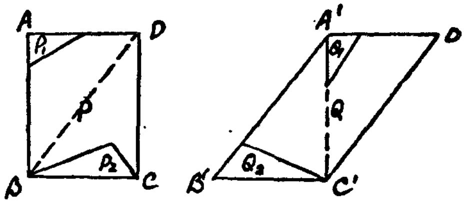
梯形 $S_1B_1C_1D_1=$ 梯形 $SBCD$.

顯然 $\triangle ABC$ 与 $\square S_1B_1C_1E_1$ 是有相同組成部分，因此它們的面積也是相等的，而这种等積的关系是根据面積的不变性和可加性來确定的．但是 $\triangle ABC$ 与 $\square S_1B_1C_1E_1$ 这兩个平面圖形并不相似，当然它們是不能全等的．因此我們可以說，**兩个或兩个以上的有相同組成部分的平面圖形必然是等積形，但它們不一定是全等形**．如果再用割补法將 $\triangle ADS$ 移放在 $\triangle CDE$ 的位置上（或者是將 $\triangle C_1D_1E_1$ 割补在 $\triangle A_1S_1D_1$ 的位置上），則我們是可以再將它們併成为兩个全等的三角形（或全等的平行四边形或其他形狀的全等圖形）的．因此我們可以說，**凡兩个或兩个以上有相同的組成部分的平面圖形，如果根据面積的割补性質，是总可以再併成为兩个全等的圖形的**．但是我們在实际的面積問題研究中，是不需要这样做的．



（圖 8）

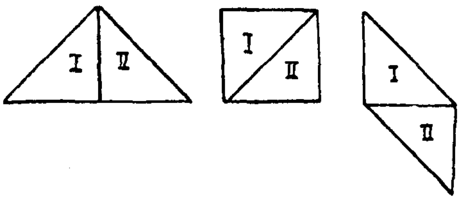
我們將同数組对应相等的多边形 $P_1\cong Q_1, P_2\cong Q_2$，用补充法分別添加到兩个多边形 P 与 Q 的上面去（如圖 9），如果得到兩个組成相等的多边形（即假定 $Q+Q_1+Q_2=\square A'B'C'D'$,



（圖 9）

$P+P_1+P_2=▱ABCD$，$▱ABCD=\triangle ABD+\triangle BDC$，$□A'B'C'D'=\triangle A'B'C'+\triangle A'D'C'$，而 $\triangle ABD=\triangle A'B'C'$，$\triangle BDC=\triangle A'D'C'$ 时)，則 P 与 Q 这两个圖形为等積的多边形．因此我們可以看出**等積的概念是有相同組成部分概念的推廣**．

当两个或两个以上的圖形等積時，我們总可以將它們分割成有相同組成部分的，如圖 10 中的等腰三角形、矩形、平行四边



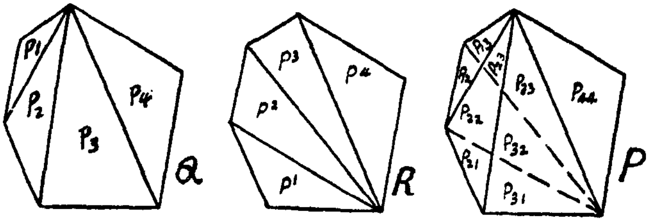
（圖 10）

形，这三个圖形等積而且有相同組成部分．如果不是像上面这种特殊圖形，我們只要运用分割及割补方法，总可以將它們分割成有相同組成部分．反过來講，当两个圖形等積时，如果我們不再分割或割补的話，在圖上則不一定看到它們有相同組成部分的，如圖 9 中的 P 与 Q．

总之，全等形一定是等積形，但等積形就不一定是全等形．如果我們用分割与割补，可以把它們分成有相同組成部分的，也可以把它們拚成全等形的．

当两个多边形都与第三个多边形有組成相等的部分時，这两个多边形也互为組成相等．如圖 11 中，設多边形 Q 和 R 都和同一多边形 P 为組成相等，也即多边形 P 可以分割成某一数 K 个多边形 Pi（$i=1.2.\cdots\cdots K$），而多边形 Q 也可以分割成同数个多边形 Qi（$i=1.2.\cdots\cdots K$），对应的等于 Pi（如圖 11 中多边形 P 分割成 P_1、P_2、P_3、P_4 四部分）．顯然同样地多边形 P 还可以

分割成 L 个多边形 Pj ($j=1.2.3.\cdots\cdots L$)，而多边形 R 可以分割成同数个而分别等于 Pj 的多边形 Rj（如圖 11 中多边形 R 分成另外四个部分 P^1、P^2、P^3、P^4）.



（圖 11）

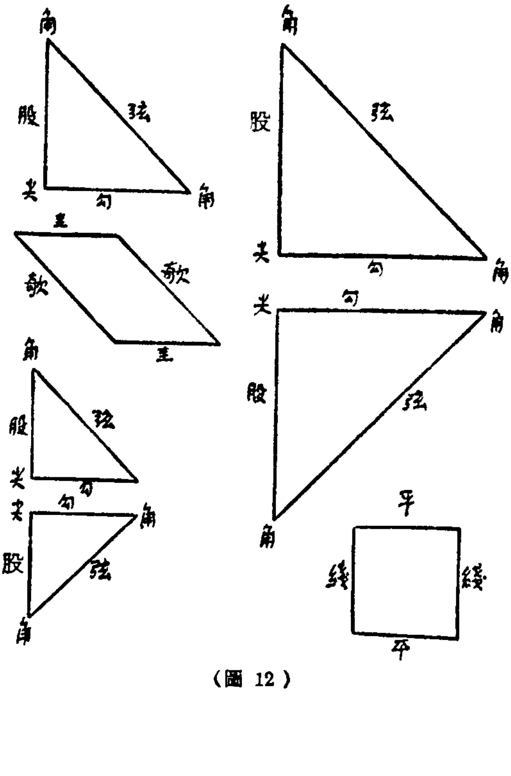
在圖 11 中多边形 P 將分成多边形 Pi 同时也分成多边形 Pj，这些分割的綫段在多边形 P 內部相交而又划分为若干小的多边形 Pij（如圖 11 中 $P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{31}, P_{33}, P_{44}$），顯然

$$P_1=P_{12}+P_{13},$$
$$P_2=P_{21}+P_{22}+P_{23},$$
$$P_3=P_{31}+P_{32}+P_{33},$$
$$P_4=P_{44}.$$

也就是每一个多边形 Pi 是所有多边形 Pij 中帶有共同第一标号 i 的多边形的总和．因此等于 Pi 的多边形 Qi 同样可分割成对应地等于 Pij 而帶有共同第一标号 i 的那些小的多边形部分．所以多边形 Q 可以划分成对应地等于多边形 Pij 的所有部分．同理多边形 Pj 也可以划分成对应地等于多边形 Pij 而帶有共同的第二标号 j 的那些部分（即 $P^1=P_{21}+P_{31}, P^2=P_{12}+P_{22}+P_{32}$, $P^3=P_{13}+P_{23}+P_{33}$, $P^4=P_{44}$）．因此多边形 R 可以分割成对应的等于 Pij 的所有部分．这样也就說明多边形 Q 与 R 都可以分割成对应地等于多边形 Pij 的所有部分，也就是多边形 Q 与 R 为有相同的組成部分．

根据等于同量的量相等的公理擴張，我們又可以推導出兩个多边形各与第三个多边形等積時，則它們彼此之間也等積的．这就是面積的傳遞性．

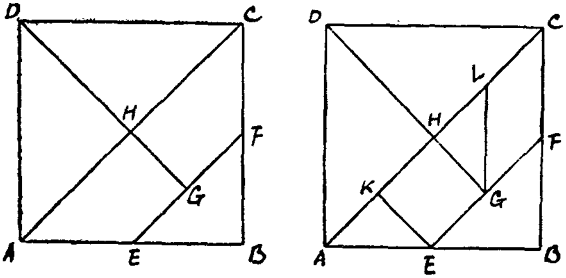
上面这些平面圖形面積概念，我們的祖先早在一千多年以前对它有了很多的研究．他們运用面積的分割和割补方法及有相同組成部分的平面圖形等積的原理，創造了一种民間数学游戲七巧板，它可以拚成各种不同的人物形象．根据清朝王其沅所編七巧八分圖一書的記載說："七叶式样，特繪其形如上，横为勾、直为股，經为弦，頂为尖，歼为角，大中小五叶俱同．方者横为平，直为綫，斜上下为圭，兩旁为攲"．至于七巧板的制法則說：



（圖 12）

"考七叶之制.其法出于勾股,分寸以大者为定,而中者合大者之勾股为弦，小者合中者之勾股而成弦，方者合小者之勾股而成徑,斜者合中者之勾股而成欹,又合小者之勾股而成圭."

如果將上面一段話,用几何語言表达,則得七巧板之制法叙述如下:

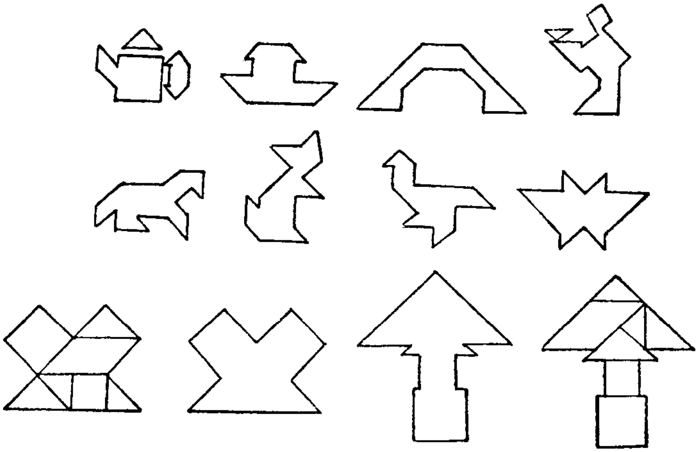


(圖 13)

于正方形 $ABCD$ 上作对角綫 AC，連接 AB, BC 之中点 E 及 F，則 $EF \parallel AC$，过 D 作 EF 之垂綫交 AC 于 H 及 EF 于 G，則 $AH=HC$，$EG=GF$，幷可証得 $HG=GE$，过 G 作 $GL \parallel FC$，得 $\square GFCL$ 及 $\triangle GHL$,这样七巧板便形成了.

用七巧板可以併成各种不同的人物形象，玆介紹我國古代数学游戲中的一些圖形如下，从这里也可以看到我們祖先的智慧.

七巧板在今天数学游戲中仍占有很高的价值，它对培养我們思維能力的發展及智能的訓練均有一定的作用.苏联和人民民主國家对我們祖先在这方面的成就都有很高的評价，幷在有关的数学書刊給予介紹或运用,这些我們也是感到自豪的.



（圖 14）