中国科学院指定考研参考书

第二版

数学物理方程

严镇军　编

SHUXUE
WULI
FANGCHENG

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是作者在中国科学技术大学三十年教学实践中编写的。其内容包括:数学物理中的偏微分方程、分离变量法、柱函数、球函数、积分变换方法、基本解和解的积分表达式、方程的分类和适定性以及变分法,共七章及一个附录。各章都配备了较多的例题和习题,书末附有全部习题答案。

本书在注意科学性与严密性的同时,又注意了它的使用性。具有由浅入深,便于学生自学等特点。可供高等院校理科各系(除数学系)及工科对数学物理方程要求高的各系各专业作为教材或教学参考书,还可供偏工科专业的研究生作为继续学习数学物理方程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/严镇军编.—2版.—合肥:中国科学技术大学出版社,2001.8

ISBN 7-312-00799-6

Ⅰ.数… Ⅱ.严… Ⅲ.数学物理方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆(CIP)数据核字(2001)第054023号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路96号,邮编:230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本:850×1168/32 印张:10.5 字数:270千
1989年12月第1版 1996年8月第2版
2002年8月第4次印刷 印数:13001—18001册
ISBN 7-312-00799-6/O·177 定价:13.00元

第二版序

由于教学急需，时间仓促，这次修订只作了如下的一些修改：

1. 第一章增加了一小节(1.5.2)，对波动方程的广义解作一简介；

2. 6.3节作了较大的改写；

3. 增减了一些例题；

4. 改正了第一版中的一些印刷错误和习题答案中的一些错处。

本书的前6章，是数学物理方程这门课教学的基本内容(个别带星号的节可不讲)，可在50个学时内讲完。第七章及附录一般可不讲，个别专业如需要学时又够，可选讲其中部分内容。例如，用2学时左右介绍方程的分类及特征线方法。

严　镇　军

1996年6月

于中国科学技术大学

第一版序

本书是在中国科学技术大学非数学系用的数学物理方程讲义的基础上编写的. 该讲义自 1979 年起在中国科学技术大学内部经十届学生使用,使用期间修改过两次,这次成书又作了较大的修改.

下面对本书的编写和使用作几点说明:

1. 本书是以解偏微分方程的一些基本方法——分离变量法、积分变换方法、基本解和格林函数方法为线索进行编写的. 书中讲了两个最常用的特殊函数——柱函数和球函数,这部分内容的选取以解偏微分方程的需要为依据.

2. 在中国科学技术大学,数理方程是作为复变函数的后续课开的. 因此,本书中较多地利用了复变函数方法,有一些公式,如贝塞尔函数的生成函数表达式,是在拙著《复变函数》(中国科学技术大学出版社出版)一书中推出的.

3. 第六章(基本解和解的积分表达式)是本书篇幅最大的一章. 在这一章中,首先比较详细地讲了 δ 函数,说明了点源和连续场源的关系;接着对空间 K 上的广义函数作了介绍,以后一些典型方程定解问题的解都是用广义函数推出的.

4. 本书共七章及一个附录(变分法),前六章是基本的,在教学上应予保证,第七章及附录可根据各专业的情况讲授.

5. 配备了较多的例题和习题,题号前带 * 号的为难题,书末附有全部习题答案,供使用本书的教师和学生参考.

6. 行文在注意科学性与严密性的同时,力求通俗易懂,便于学生自学.

从 1979 年以来,使用过原讲义的教师提出了许多宝贵意见,

特别是我的同事中国科学技术大学数学系陈祖墀教授，在我这次成书时，再次细心地阅读了原讲义，指出了一些不妥之处，编者谨向他们表示感谢．数学物理方程教材历来是较难写好的，书中难免有这样那样的不妥之处，恳请使用本书的教师和其他读者指正．

严　镇　军

1989年2月

于中国科学技术大学

目　次

第一章　数学物理中的偏微分方程

本章首先介绍了偏微分方程的一些基本概念，接着从许多物理问题归结出三个典型的偏微分方程以及关于它们的各种定解问题.由于我们只讨论线性定解问题，这样本章中讲的叠加原理将是以后各种解法的基础.

1.1　偏微分方程的一些基本概念

许多物理规律、过程和状态都是用微分方程来描述的.当我们研究只有一个自变量的运动过程时，常常提出常微分方程的问题.例如，质点的运动、集中参数 R-L-C 电路中电流及电压的变化等，通过解常微分方程，就能求出这些运动所应遵循的变化规律.当我们研究具有多个自变量的运动过程时，就常遇到偏微分方程的问题.所谓一个偏微分方程，是指含有某未知函数 u 的偏导数的关系式.例如

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}+c(t,x)u+f(t,x), \tag{1}$$

$$\Delta_3 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad \text{(拉普拉斯方程)}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta_3 u+f(t,x,y,z) \quad \text{(波动方程)}, \tag{3}$$

$$u_t+uu_x=0 \quad \text{(冲击波方程)}, \tag{4}$$

$$u_t+\sigma uu_x+u_{xxx}=0 \quad \text{(Kdv 方程)} \tag{5}$$

等等都是偏微分方程.其中 a、σ 均为常数，$a(t,x)$，$b(t,x)$，$c(t,x)$，$f(t,x)$ 及 $f(t,x,y,z)$ 为已知函数，u 为未知函数.

一个偏微分方程中所含偏导数的最高阶数称为此方程的**阶**；

如果一个偏微分方程对未知函数及其偏导数都是一次的，则称为**线性方程**，否则称为**非线性方程**. 例如，(1)、(2)、(3)都是二阶线性方程；方程(4)是一阶非线性方程；(5)是三阶非线性方程.

数学物理方程通常是指从物理问题中导出的函数方程，特别是偏微分方程. 本书中只着重研究 2—4 个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n=2,3,4)$ 的二阶常系数线性偏微分方程，它的一般形式是

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + 2\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{6}$$

这里 a_{ij}, b_i, c 是常数，且 $a_{ij}=a_{ji}$，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是已知函数. 若方程(6) 中的自由项 $f\equiv 0$，则称方程是**齐次的**，反之，就称方程是**非齐次的**.

任何一个在自变量的某变化区域内满足方程(即代入方程后成为恒等式)的函数，称为方程的一个**解**. 例如，可以直接验证，除了点(x_0, y_0, z_0)外，函数

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

满足三维拉普拉斯方程

$$\Delta_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

例 1 当 a, b 满足怎样的条件时，二维拉普拉斯方程

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

有指数解 $u=e^{ax+by}$，并把解求出.

解 把 $u=e^{ax+by}$代入所给方程，得

$$(a^2+b^2)e^{ax+by} = 0.$$

因 $e^{ax+by}\neq 0$，所以 $a^2+b^2=0$，即当 $a=\pm ib(i=\sqrt{-1})$或 $b=\pm ia$ 时，二维拉普拉斯方程有指数解. 它的形式是

$$u = e^{\pm ibx+by} = e^{by}(\cos bx \pm i\sin bx)$$

及 $$u = \mathrm{e}^{ax \pm iay} = \mathrm{e}^{ax}(\cos ay \pm \mathrm{i}\sin ay).$$

这里 a,b 是任意实数，如取实形式，则

$$\mathrm{e}^{ax}\cos ay, \mathrm{e}^{ax}\sin ay;$$

$$\mathrm{e}^{by}\cos bx, \mathrm{e}^{by}\sin by$$

都是 $\Delta_2 u = 0$ 的解.

一个偏微分方程的解是多种多样的. 以 $\Delta_2 u = 0$ 为例，仿照例 1 的方法可以确定：对任何实数 a,d,e，当 $c = -3a, b = -3d$ 时，二元多项式

$$u = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + e$$

满足 $\Delta_2 u = 0$.

更一般地，从复变函数里我们知道，任何一个解析函数的实部或虚部(即二维调和函数)都满足 $\Delta_2 u = 0$. 例如

$$u = \mathrm{Re}\ln z = \ln r \ (r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0),$$

$$u = \mathrm{Re} z^n = \mathrm{Re} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n \cos n\theta,$$

$$u = \mathrm{Im} z^n = r^n \sin n\theta,$$

都是它的解，这里 r, θ 是极坐标. 上述各解也可以直接代入二维拉普拉斯方程的极坐标形式

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

予以验证.

上面举的例子告诉我们，一个偏微分方程的解是无穷多的. 而且一般说来，一个一阶偏微分方程的解依赖于一个任意函数，一个二阶偏微分方程的解依赖于二个任意函数. 例如，自变量为 x,y 的一阶线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(x),$$

由于只依赖于 x 的函数对 y 的偏导数为零，所以把上式两边对 y 积分得

$$u=\int\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}y+\varphi(x)=f(x)\cdot y+\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$是任意的函数.

例 2 设 $u=u(x,y)$,求二阶线性方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$$

的一般解.

解 把所给方程改写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

两边对 x 积分,得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x=\int 0\mathrm{d}x+\varphi(y)=\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$是任意函数,再两边对 y 积分,得方程的一般解为

$$\int\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=\int\varphi(y)\mathrm{d}y+f(x)=f(x)+g(y),$$

其中 $f(x),g(y)$是两个任意一次可微函数.

例 3 求方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的通解.

解 作变量代换 $\xi=x+at$, $\eta=x-at$, 由复合函数的求导法,有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right).$$

同法有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

于是,所给方程变形为$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$. 因而由例 2 得所求通解为

$$u=f(\xi)+g(\eta)=f(x+at)+g(x-at).$$

其中 f、g 是两个任意二次可微函数.

例 4 求方程 $t\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xt$ 的通解.

解 令 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=v$，则原方程成为

$$t\frac{\partial v}{\partial t}+2v=2xt$$

把 x 看作是参数，这是一个一阶线性常微分方程，于是($\exp\{x\}$ 即 e^x)

$$\begin{aligned} v &= \exp\left\{-\int\frac{2}{t}\mathrm{d}t\right\}\left[G(x)+\int 2x\exp\left\{\int\frac{2}{t}\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}t\right] \\ &= t^{-2}\left[G(x)+\frac{2}{3}xt^3\right] \quad (G(x)\text{ 是任意函数}). \end{aligned}$$

再对 x 积分，得

$$u=\frac{1}{3}x^2t+t^{-2}F(x)+H(t),$$

这里 $F(x)$和 $H(t)$是两个任意一次可微函数.

1.2 三个典型方程

在数学物理方程中，最常见的是下面三个二阶常系数线性偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta_3 u+f(t,x,y,z) \quad (\text{波动方程}), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta_3 u+f(t,x,y,z) \quad (\text{热传导方程}), \tag{2}$$

$$\Delta_3 u=f(x,y,z) \quad (\text{泊松方程}). \tag{3}$$

这里 a 为常数，$f(t,x,y,z)$及 $f(x,y,z)$ 都是已知函数. 在方程(1)及(2)中，未知函数 $u=u(t,x,y,z)$ 是时间变量 t 和空间坐标变量 x,y,z 的函数；在方程 (3) 中，u 只是空间坐标变量的函数，而与时间 t 无关.

许多运动过程的物理性质尽管各不相同，但从数量关系上常常可用上述三个方程之一来描写. 例如，声波在空气中的传播，弹性体的振动，电磁波在真空中的传播等振动过程所导出的就是波动方程. 描写热量在物体内从温度较高处向较低处的传导，溶液中的溶质由浓度较大处向较小处的扩散等运动过程所导出的就是热传导方程（又称为扩散方程）. 以上所讲的两种物理过程都是随时间而发展的过程，所以，(1) 和(2) 有时统称为发展方程. 如果它们进入稳定状态，即表征运动过程的物理量 u 不再随时间而改变，那么

$$u_t = 0 \ , u_{tt} = 0.$$

这样就得到泊松(Poisson)方程，也称为稳定方程. 所以泊松方程描写的是一些稳定的物理现象，如某些稳定(定常) 流场的分布，稳定温度场的分布，静电场的分布等等.

另一方面，实际中碰到的许多方程，或者只要经过简单的变换就可以化为以上三个方程之一；或者虽然不能直接化为这种形状，但可以仿效三者之一的有关问题来处理. 因此，这三个方程乃是三类方程的典型代表，以波动方程为代表的那一类方程称为双曲型方程，以热传导方程为代表的称为抛物型方程，以泊松方程为代表的称为椭圆型方程. 关于二阶线性偏微分方程的分类，我们将在第七章再讨论.

下节我们将举例来导出这三个方程.

1.3 数学物理方程的导出

1.3.1 理想弦的横振动方程

所谓弦就是指这样一条理想化的弹性细线，它的横截面的直径和长度比较起来非常小；整个弦完全可以任意地变形，不论它处

于什么位置，内部的张力总沿着切线方向作用.

现设有一条线密度为 $\rho(x)$ 的弦，在张力 $\boldsymbol{T}$ 作用下处于平衡状态，平衡位置和 x 轴重合. 并设这条弦由于受到某种扰动而开始在它自己的平衡位置附近振动. 我们要推出描述这条弦的运动情况的方程. 为了使得到的方程比较简单，我们再作如下三个理想化假设：

1）弦的运动完全在某一包含 x 轴的 x-u 平面内进行，并且在振动过程中弦上各点在 x 轴方向上的位移比 u 轴方向上的位移小得多，因此可以忽略前者，而用时刻 t 弦上坐标为 x 的点在 u 轴方向的位移 $u(t,x)$ 作为描述弦的运动的主要物理量.

2）弦的振动很微小. 微小的意义不但是指 $u(t,x)$ 很小，而且指 u_x 很小，即

$$|u_x| \ll 1.$$

3）有一个随时间变化的外力沿着弦身作用，其作用方向垂直于 x 轴，而力的分布密度为 $g(t,x)$.

列方程通常是运用微元法. 即先取定所研究的对象的一个微小部分——微元，然后对这个微元运用物理规律. 具体地说，在时刻 t 取横坐标分别为 x 和 $x+\Delta x$ 的点 M_1，M_2，对小弧段 $\overset{\frown}{M_1M_2}$ 作受力分析(图 1.1). 作用在这段弦上的力有：分别作用在 M_1 和 M_2 点的切向张力 $-T(t,x)$ 和 $T(t,x+\Delta x)$；外力 $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{u}_0\int_x^{x+\Delta x} g(t,\xi)\mathrm{d}\xi$（设弦本身的重量很小，略去不计），其中 $\boldsymbol{u}_0$ 是位移正方向上的单位向量；惯性力

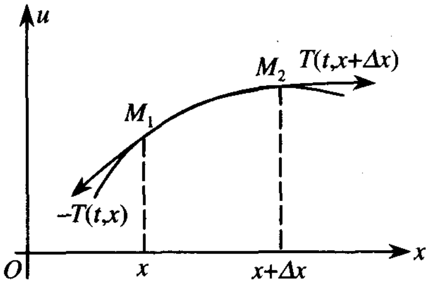

图 1.1

$$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{u}_0 \int_x^{x+\Delta x} \rho(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathrm{d}\xi,$$

于是由牛顿第二定律，有

$$-\boldsymbol{T}(t,x) + \boldsymbol{T}(t,x+\Delta x) + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0.$$

记 $\boldsymbol{T}=(T_1,T_2)$，有 $T_2/T_1=u_x$，再把上面的向量方程写成分量的形式，即得下面的方程组

$$\begin{cases} T_1(t,x+\Delta x) - T_1(t,x) = 0, \\ T_2(t,x+\Delta x) - T_2(t,x) + \displaystyle\int_x^{x+\Delta x} \left[g(t,x) - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] \mathrm{d}x \\ = \displaystyle\int_x^{x+\Delta x} \left[\frac{\partial T_2}{\partial x} + g(t,x) - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] \mathrm{d}x = 0. \end{cases}$$

上面的第一个方程，说明 T_1 不依赖于 x，即 $T_1=T_1(t)$，由微元的任意性，从第二个方程得到

$$T_1(t)u_{xx} + g(t,x) - \rho(x)u_{tt} = 0. \tag{1}$$

因 $|u_x| \ll 1$，故 $\boldsymbol{T}$ 的模

$$T = \sqrt{T_1^{\,2} + T_2^{\,2}} = T_1 \sqrt{1+u_x^2} \approx T_1(t), \tag{2}$$

且小弦段的长

$$\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2}\mathrm{d}x \approx \Delta x.$$

因此，可以认为弦在振动过程中并未伸长. 再由虎克(Hooke)定理，知道弦上每点张力的数值 T 不随时间而变. 综上所述知道 T 为常数. 于是由(2)式方程(1)成为

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(t,x)$$

如果再设弦是均匀的，则 $\rho=$常数，于是上式可以写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x) \quad \left(a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, f(t,x) = \frac{g(t,x)}{\rho} \right).$$

这就是**弦的微小横振动方程**(也称一维波动方程). 如果 $f(t,x)\equiv 0$，则方程为齐次的，相当于自由振动的情形；如果 $f(t,x)\neq 0$，则

方程为非齐次的，相当于强迫振动的情形.

1.3.2 电报方程(传输线方程)

电报方程是电流沿电缆传输时所应满足的方程. 因为输电的本质是电磁波的传播，所以研究输电过程应使用麦克斯韦(Maxwell)方程组. 但这样做在数学上比较麻烦. 在电工学中，通常是在一些理想化假设下利用克希荷夫(Kirchhoff)定律导出电报方程.

考虑两条平行的传输线(沿 x 方向)，电流 i 和电压 v 都是位置 x 和时间 t 的函数(图 1.2). 并且假定:

1) 导线的各种参数都是均匀分布的. 我们令 R,L,C,G 分别表示单位长度上的电阻，自感系数，电容系数与电漏系数. 假定单位时间内导线上一点电量的损失与该点的电压成正比.

2) 周围介质对电磁振荡的影响小到可以忽略不计.

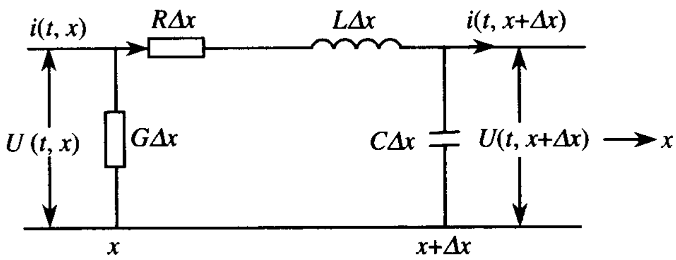

图 1.2

为了导出 i 和 v 所必须满足的方程，仍用微元法，在导线上取坐标为 x 和 $x+\Delta x$ 的两点，并考虑这两点之间的一段导线. 在时间 Δt 内，净流进这一段导线中的电量为 $[i(t,x)-i(t,x+\Delta x)]\Delta t$，它等于为了把这一段导线充电所需要的电量 $C[v(t+\Delta t,x)-v(t,x)]\Delta x$ 与由于绝缘不好而漏掉的电量 $Gv\Delta x\Delta t$ 的和，即有