键合图概论

——一种系统动力学方法

潘亚东 编著

重庆大学出版社

键合图概论

——一种系统动力学方法

潘 亚 东 编著

重 庆 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书讲解键合图的基本知识。内容包括状态方程的概念，键图的基本原理，元件键图及系统键图；由键图建立状态方程，键图数字仿真等共七章。

全书以普及键图知识为目的。编写中力求讲清概念、文字通俗、取材精炼、体系完整，大量结合我国学者近年来利用键图技术对某些系统的动态特性所进行的研究，比较适合于我国读者的语言习惯，易学易懂。

本书可作为大专院校机、电、液专业的本科生选修课和研究生的必修课教材，也可作为有关专业的工程技术人员和科研工作人员的参考书，对于生物工程、化学工程、经济管理、社会学专业的研究系统的工作人员亦有参考价值.

键合图概论

——一种系统动力学方法

潘亚东　　编　著

责任编辑　吕元明

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

中国科学技术情报研究所重庆分所印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/16　印张：9.5　字数：23[illegible]千

1990年1月第1版　　1990年1月第1次印刷

印数：1—3000

标准书号：ISBN 7-5624-0283-3 / TH·15　定价：1.95元

前　言

随着科学技术和生产的发展，对工程系统进行动态分析的方法越来越多，键图法就是新近出现的一种新方法。它特别适合于不是一种能量范畴而是多种能量范畴耦合而成的机、电、仪一体化的复合系统。

所谓键图，就是描述系统功率的传输、转化、贮存、耗散的图形表示。它自然而真实，不加省略，可描述到系统的每一个角落。凡是描述到的地方，它都能把有关的参数和变量卷入其中，并按客观实际存在的内部关系联系起来，建立起所需要的数学模型。

作为研究系统动态特性的方法之一，键图法有它本身的特色。它用状态方程作为数学模型的形式，而且方程的获得比推理法来得容易，并且有一定的程式，只要能画出键图，即可方便的得到方程。

尽管键图法用状态方程作为数学模型，但它与现代控制工程里各种方法求得的状态方程有所不同。现代控制工程的状态方程一般表现的是某单一变量的不同形式，如位移、速度、加速度等（由高阶方程转化而来），当研究的参数越出这一范围时，就比较难以表达。如具有力、速度、流量、压力、扭矩、角速度等都同时存在的系统，现代控制工程比较难以将它们组合在一起，而键图法就特别适合于描述这样的系统，它能够较方便地囊括上述各种不相干的参数，这也是这种方法的一大特点。

由于基本方程为状态方程，为了对它有深刻的认识，所以在绪论章节里，特别增加了对状态方程的介绍，其它各章，均为键图本身的基本内容。

这种方法在1960年前后由美国的H. Paynter教授提出，继而由美国的D. C. Kainopp和R. C. Rosenberg等作了大量工作，现已在美国、澳大利亚、加拿大、西德、美国、日本等一些大学中用于教学和科研。论文散见于机械、液压、电学、热工、流体工程、生物工程、化学工程与经济管理等各个方面。键图法于70年代末期引入我国，引起了我国的科技界工程技术人员和教育工作者的重视，某些大学已把它列为本科生的选修课和研究生的必修课。

1985年机械工业出版社曾出版了胡大纮、邓延光合译的由D. C.卡诺普和R. C.罗森堡合著的专著——系统动力学。本书是在该书的基础上，结合我国读者的语言习惯，以及我国学者近年来在这方面的研究成果，在对原书内容作了较多的增减后，本着使内容更加精练、概念更加清晰，便于作为教材和有兴趣的读者自学的原则，重新写成了这本书，例题和图形仍以原书为主。只要读者学过控制工程基础，并能进行基本的矩阵运算，就可以顺利地进行学习。

当然，键图法作为一种新的研究方法，仍在不断完善和发展，本书只是介绍了它的一些基本内容，如果读者在看完本书之后感到有不足之处，编者将感到欣慰，这也正是编写本书的目的之一。

全书由华中理工大学杨叔子教授审阅，重庆大学贾鹏光副教授为本书提出许多宝贵意见，作者在此一并表示谢意。

由于编者水平有限，书中难免有错误或不妥之处，恳请读者指正。

作者于武汉工业大学

一九八八年十一月

主要符号说明

e　势
f　流；粘性阻尼
F　力
v　速度
p　压力；动量
Q　流量
V　点电势；容积
i　电流
u　电压
$u(t)$　输入
I　感性元件
C　容性元件；电容；液容
R　阻性元件；电阻，液阻
ϕ　磁通量
α　转角
TF　转换器
GY　回转器
MTF　可调转换器
MGY　可调回转器
S_e　势源
S_f　流源
S_F　能源
s　算子
g　重力加速度
q　变位；电荷
L　电感；角动量
G(s)　传递函数
T　转矩
ω　角速度
m　质量
M　扭矩
c　转动摩擦系数；弹簧柔度
K　增益或放大系数；体积弹性模量
k　弹簧刚度
θ　转角
ρ　密度
Mp　超调量
ζ　阻尼比
t_r　上升时间
t_p　峰值时间
t_s　调整时间
p_p　压力动量
B　磁感应强度矢量

目　录

第一章　绪　论

§1-1　研究系统动态特性的意义

在工业自动化中，控制系统用得越来越多。因为人类物质文明的建设，要求产业界不仅仅生产出足够的满足人类需求的各类物质，而且对产品的质量要求也越来越高。传统的、常规的生产方法和技术不但解决不了数量问题，更解决不了质量问题。高质量的产品必然出自高精度的设备，而高精度的设备就不单是只根据几个技术指标和要求以类比或经验的方式进行简单的模仿设计，因为这是一种静态模式，是建立在大致的、粗略的、近似的基础之上的方式。而现代化设备除了要能完成所要求的自动工作循环，主要参数应选择正确，能满足静态要求以外，由于实际的系统，经常是处于动态工作过程，因而还要求它具有良好的动态特性，从而要求工程技术人员必须学习和掌握有关分析系统动态特性的基本理论知识。

系统动态的特性是指系统随时间变化的工作状态。它客观、真实地反映了系统每个瞬时的状况。引起这种工作状况变化的原因是多方面的，如组成系统的元件工作状况的变化；外界载荷的变化；干扰因素的影响等等。如果系统的动态特性不好，在动态过程中的工作情况就不能满足要求，甚至无法正常工作。机械系统在工作中的振动、冲击、噪声、加工精度和运动精度不高等等，往往是由于系统的动态特性不良所致。对这些品质的研究，如果只限于静态的标准，就不可能达到很高的要求，只有了解了动态，才能对症下药，有的放矢。

系统动态特性研究的内容与静态特性的研究则完全不同，主要包括稳定性和过渡过程品质问题。系统如能在稳定状态遭受破坏之后能及时的恢复到新的稳定状态，这样的系统才可称为稳定系统。稳定是必须的，否则其它方面的研究就失去意义。过渡过程品质是指系统偏离稳定状态的程度和恢复到新的稳定状态所需要的时间快慢，即所谓系统的精度和快速性。因此动态特性也就是系统的稳定性、快速性和精确性。

研究系统动态特性的方法，一般用的较多的是古典控制工程中的传递函数分析法，这种方法主要适用于分析系统的稳定性，而且只限于线性系统，非线性系统要进行线性化。对于严重非线性系统则难以进行。同时，这种方法主要适用于单输入、单输出、以及初始条件为零的情况。如果直接用传递函数分析法来求系统的过渡过程，则只有在系统是相当简单时才有可能。因此，传递函数分析法受到很大的限制。

在传递函数分析法的基础上演变而来的频率特性分析法使用比较普遍。这种方法建立在实验的基础之上，只要有一定的设备，研究起来比较方便，但这种方法仍然只限于单输入、单输出的系统，也只限于线性系统。

近年来，现代控制理论及计算机应用的发展，给系统动态特性的研究开辟了新的途径。这就是现已广泛使用的计算机数字仿真，用这种方式进行辅助设计和分析是非常有效的。仿真所依据的数学模型就是现代控制理论所叙述的状态方程，用状态方程研究系统动态特性的方法，称为状态变量法，也称状态空间法。由它所编制的程序可以在计算机上求出系统中各主要变量在过渡过程中的时域解。

很显然，状态变量法拓宽了研究系统的动态特性的范围，它可以是多输入、多输出的系统，也可以是非线性的系统，而且状态变量的初始值不一定限于零。

现在问题归结到如何认识和建立系统的状态方程上，键图法可以帮助我们解决这一问题。

键图技术是建立在状态变量的理论基础之上的一门研究系统动态特性的技术，它通过键图直接得到描述系统的状态方程，列方程的方法与其它方法完全不同，但状态方程的形式完全一样。

因此，为了了解键图的理论和应用，必须首先对状态变量法有一定的认识。

§1-2 状态变量法概述

一、状态与状态变量的概念

状态变量法是在一定的科学和技术发展需要的背景下产生和发展起来的，过去的方法是根据输入函数求输出响应。

这种方法有人称输入-输出法，又称端部法。因为它只研究系统的端部特性，而不考虑系统内部的结构、参数。与输入-输出法恰好相反，状态变量法是一种内部法。它首先分析能够代表系统内部特性的物理量，称为状态变量，然后可根据系统的状态变量和输入量，求得所需的输出量。

状态变量法这种新的系统理论方法所具有的优点：一是应用广泛，二是易于用数字计算机进行数值分析。用状态变量法可以利用线性代数这个有力工具，把冗繁的数学表达得非常简明，并且把状态方程归纳成一个统一的标准形式，这样就特别便于用计算机来解算。就数学运算本身而言，用状态变量法常常是就一简单算式作多次重复的运算，这正是计算机所擅长的。同时，状态变量法可提供有关系统更多的信息，从而使人们能够了解系统内部的情况，便于分析和控制。

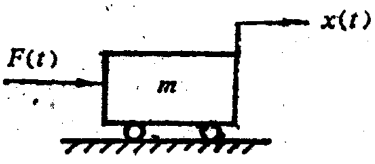


图1-1

那么，什么是状态和状态变量呢？

为建立系统状态和状态变量的概念，首先看一个简单的力学系统的例子，如图 1-1 所示。

当忽略摩擦时，根据牛顿定律，可知质量m，力F和速度v的关系为

$$F=m\frac{dv}{dt}$$

或 $$v(t)=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{t}F(\tau)d\tau \tag{1-1}$$

式（1-1）表示在t瞬间物体的速度是力F在整个过去的时间内作用于m的结果。积分下限取负无穷大是一般表达法。而实际情况是力F开始作用于m的时间可在（$-\infty$，t）区间的任意时刻。

式(1-1) 还可写成

$$\begin{aligned}v(t)&=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{t_0}F(\tau)d\tau+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(\tau)d\tau\\&=v(t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{1-2}$$

可见速度$v(t)$的积分可分成两项：一项为初始速度$v(t_0)$，也就是初始条件；另一项就是激励函数$F(t)$在(t_0, t)区间的积分。其中初始时刻t_0可有无穷多个取值，但通常取$t_0=0$。由上式可以看出，物体m对作用力的响应（速度）可以完全由初速$v(t_0)$和在(t_0, t)区间的输入力$F(t)$决定。从而可写成如下的函数关系

$$v(t)=\psi[v(t_0),F(t)]; \qquad t\geqslant t_0 \tag{1-3}$$

式(1-3)仅表示有一个初始条件的情况。再分析有多个初始条件的情况。

如分析物体m受力F作用在某时刻的位置S。

因为力F为水平作用力，故水平位移和速度的关系为

$$\frac{ds}{dt}=v$$

于是有

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}v(\zeta)d\zeta=\int_{-\infty}^{t_0}v(\zeta)d\zeta+\int_{t_0}^{t}v(\zeta)d\zeta$$

$$=s(t_0)+\int_{t_0}^{t}v(\zeta)d\zeta \tag{1-4}$$

把式(1-2)代入式(1-4)，得

$$s(t)=s(t_0)+\int_{t_0}^{t}[v(t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{\zeta}F(\tau)d\tau]d\zeta$$

$$=s(t_0)+v(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\zeta}F(\tau)d\tau d\zeta \tag{1-5}$$

虽然，当(t_0, t)区间的$F(\tau)$已知时，求物体m的位置需要两个初始条件$s(t_0)$和$v(t_0)$。因此，它们的函数关系可抽象成

$$s(t)=\psi[s(t_0), v(t_0), F(t)] \qquad t\geqslant t_0 \tag{1-6}$$

从式(1-3)和(1-6)可以建立系统状态的概念。

我们把$t=t_0$时刻的初始条件称为该系统在$t=t_0$时的状态。即式(1-6)中的$s(t_0)$，$v(t_0)$就是图1-1所示力学系统在t_0时刻的状态。

推而广之，如果一个系统有几个初始条件，$x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)$，则它们就构成系统在$t_0$时刻的状态（称动态）。可以清楚地看出，系统在$t_0$时刻的状态包含了和系统过去整个历史有关的全部信息。知道了系统在t_0时刻的状态，以及$t\geqslant t_0$的系统输入，就可求得系统在任何时刻t的输出。

如果不指定某一时刻，而是泛指任何时刻的状态$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$等，即称为状态变量。系统的初态只不过是系统的状态变量在t_0时刻的值。

根据式(1-6)，为了用状态或状态变量表示一个系统，并设$y(t)$为系统的输出，则有

$$y(t)=\psi[x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0), u(t)] \qquad t\geqslant t_0 \tag{1-7}$$

为简便计，把t_0时刻的一组初态记为$x(t_0)$，则有

$$y(t)=\psi[x(t_0), u(t)], \qquad t\geqslant t_0 \tag{1-8}$$

进一步分析式(1-8)，$t\geqslant t_0$的任意时刻的系统响应$y(t)$可以完全由系统的初态$x(t_0)$和在(t_0, t)区间的系统输入$u(t)$决定。

因此，$t=t_0$时刻的$y(t_0)$就应由初态$\{x(t_0)\}$和(t_0, t)区间的输入$u(t)$，即$u(t_0)$来决定。由此可进一步得出结论：t时刻的系统输出均由此时刻的系统状态和系统输入所决定。从

而使式（1-8)改写成

$$y(t)=\psi[x(t),\ u(t)] \tag{1-9}$$

这样就可以画出由状态变量表示的系统框图，如图1-2所示，此图与我们所熟悉的传递函数法相比，两者是十分类似的。传递函数法的系统框图如图1-3

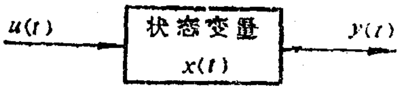


图1-2

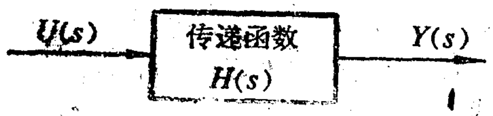


图1-3

十分明显，系统的状态变量是系统的极其重要的特征参量。$y(t)=\psi[\{x(t)\},\ u(t)]$这一公式的具体形式可以暂时不去追究，但公式的含意应充分了解，即输出（或响应）是状态变量和输入变量的函数。

还要明瞭，同一系统的状态可以用几种不同的物理量来表示。即状态变量的非唯一性。图1-1说明，求速度时，只需一个状态，而求位移时，则需初始位置和初始速度两个状态，而且，这些状态变量就是系统中真实的物理量。

二、状态变量法

上面只是定义了状态和状态变量的概念，以及输出变量与状态变量和输入变量之间的关系。但是作为一种科学方法，这是远远不够的。还必须建立系统的状态变量与输入量和输出量之间的精确的定量关系，即找出图1-2中函数ψ的具体形式。

前面谈过，如果能确定系统的状态变量，对于给定的输入，任何时刻的输出都能求得。这句话含有二层意思：一是要求得状态变量；其次才是求得输出变量。

所以状态变量法包括两个基本步骤：1.确定并求解状态变量；2.根据这些状态变量求输出。

要完成这二个步骤，在数学上可用两组方程来表示：1.状态方程，亦称状态变量方程或状态微分方程，它表示状态变量和输入量的关系；2.输出方程，它表示输出量与状态变量和输入量的关系。

状态变量法就是列出并求解状态方程和输出方程的方法。

（1）状态方程

常见的状态方程是由输入-输出法中的高阶微分方程转化而来。为简单起见，先看一个二阶常微分方程的例子。

设二阶微分方程为

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_0x=u(t) \tag{1-10}$$

定义两个状态变量x_1和x_2为

$$\begin{aligned} x&=x_1\\ \dot{x}&=x_2 \end{aligned} \tag{1-11}$$

故

$$\dot{x}_1=x_2 \tag{1-12}$$

把式（1-11）代入式（1-10），得

$$\dot{x}_2+a_1x_2+a_0x_1=u(t) \tag{1-13}$$

于是即将一个二阶微分方程变成二个一阶微分方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=-a_0x_1-a_1x_2+u(t) \end{aligned} \tag{1-14}$$

该二阶微分方程可用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t) \tag{1-15}$$

式（1-14）或（1-15）是对应于式（1-10）所表示的系统的状态方程。

可以看出，状态方程有如下几个特点：

① 它表示状态变量和输入量间的关系；

② 它是一阶微分方程，每个方程只含有一个状态变量的一阶导数项；

③ 它是一组联立方程，方程个数等于状态变量个数。显然，状态方程的一般表达式，可以写成

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\cdots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22}\cdots & b_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2}\cdots & b_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix} \tag{1-16}$$

式（1-16）的形式比较复杂，可引入状态矢量的概念，使公式大大简化，如将状态变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$看成是矢量$\mathbf{x}(t)$的n个分量把u_1，$u_2, \cdots, u_m$看成是矢量$\mathbf{u}(t)$ 的m个分量，即

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\qquad \mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix}$$

并将式（1-16）中的两个系数矩阵分别用A和B表示，即

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\cdots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22}\cdots & b_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2}\cdots & b_{nm}\end{pmatrix} \tag{1-17}$$

因此，状态方程（1-16）可写成简单形式

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u} \tag{1-18}$$

这是必须记住的状态方程的最基本的形式。

（2）输出方程

前已叙述，对于线性系统而言，输出方程是一次线性代数方程，一般表达式为$y(t)=\psi[\{x(t)\},\ u(t)]$，可改写成

$$\begin{aligned}
y_1&=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n+d_{11}u_1+d_{12}u_2+\cdots+d_{1m}u_m\\
y_2&=c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n+d_{21}u_1+d_{22}u_2+\cdots+d_{2m}u_m\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_h&=c_{h1}x_1+c_{h2}x_2+\cdots+c_{hn}x_n+d_{h1}u_1+d_{h2}u_2+\cdots+d_{hm}u_m
\end{aligned} \tag{1-19}$$

又可写成矩阵形式，即

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ c_{h1} & c_{h2} & \cdots c_{hn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d_{11} & d_{12} & \cdots d_{1m}\\ d_{21} & d_{22} & \cdots d_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ d_{h1} & d_{h2} & \cdots d_{hm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix} \tag{1-20}$$

按同样方式引入输出矢量$\mathbf{y}$和系数矩阵C，D，则上式可写成

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{u} \tag{1-21}$$

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots c_{kn} \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots d_{km} \end{pmatrix} \tag{1-22}$$

可见，系统的任何可能的输出都可以用状态变量和输入量来表示。有了式(1-18)，(1-21)的状态方程和输出方程，状态变量法就初步确定了。

状态变量法也称状态空间法。状态空间就是以系统的n个状态变量x_1，$x_2\cdots$，x_n为轴所组成的N维空间。系统的维数等于状态变量数。系统的任意状态都可用状态空间中的一个点来表示，即用一个状态矢量来表示。因此，状态方程和输出方程也就是系统的状态空间描述，不管系统多么复杂，它的状态空间描述总是具有这种统一的简洁形式，并有利于在计算机上做数值分析。

§1-3 系统状态方程的建立

研究线性系统主要的方法有微分方程法、传递函数法和状态变量法。这三者之间，既不相互独立，又各成一支，并且能互相联系，相互转化。在研究状态变量法这一新方法时，不仅要注意状态方程与线性系统的直接关系。也要注意描述同一线性系统的各种方法间的关系。这对于广开思路，加深对状态变量法的理解是十分必要的。

图1-4给出了线性系统理论及其相互关系图。图中四条虚线所示的关系属控制理论研究的范畴。本节仅讨论五条实线所代表的关系，它包括由系统直接建立状态方程；微分方程和状态方程间互相转换；传递函数和状态方程间相互转换。

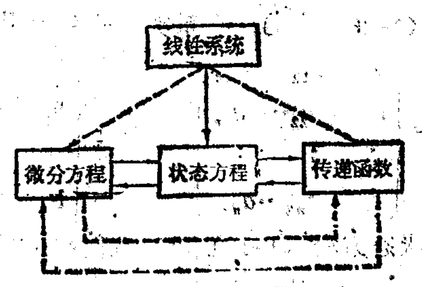


图1-4

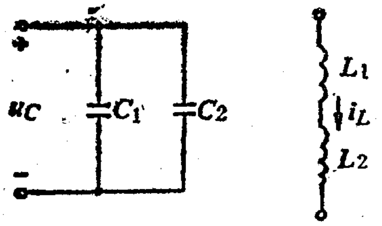
一、由系统结构直接建立状态方程

在建立状态方程之前，首先要选定系统的状态矢量。一般，一个系统的状态变量不是唯一的，可选物理量也可选非物理量。为直观起见，人们喜欢选物理量作为状态变量。例如，对于电网络，通常选用电容电压和电感电流作为状态变量是最方便的。

状态变量的个数，即状态矢量$\mathbf{x}(t)$中分量的个数n，应等于系统的阶数。选少了不能完整的描述一个系统；选多了，状态变量之间相互不独立，即某些状态变量可由另一些导出，这都是不允许的。

就电网络系统而言，系统的阶数就是系统储能元件中的独立电压和独立电流的个数。对于机械系统同样存在这一情况，有的弹簧和运动部件所代表的储能元件不是独立的。所谓独立，对于电网络，是指电容电压和电感电流在某一时刻的值彼此互不相关。例如，几个电容相并联时，各个电容的电压就不独立，因为它们只有一个相等的电压值；同样几个电感串联时，各个电感电流也不独立，因为它们中只有一个相等的电流值。如图1-5所示。

根据上述选取独立变量为状态变量的原则，利用回路法对图1-6所示的电网络系统列写状态方程。



(a)　　　(b)

图1-5

(a)一个独立电压　(b)一个独立电流

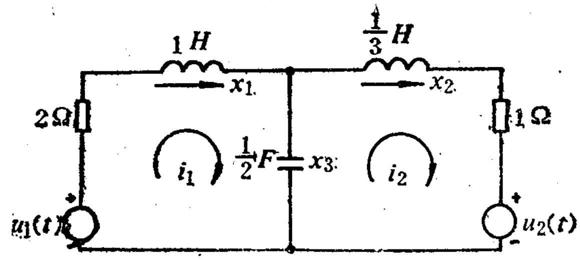


图1-6

步骤如下：

1. 选择所有独立电容电压和电感电流作为状态变量；网络中有二个电感和一个电容．可以选定电感电流x_1，x_2及电容电压x_3作为状态变量，它们是相互独立的。

2. 写出回路电流和状态变量之间的关系式，这些关系式将把电容电压和电感电流表示成状态变量和它们的导数项。

图 6 -1所示的回路应当是

$$x_1=i_1 \tag{1-23a}$$

$$x_2=i_2 \tag{1-23b}$$

$$\dot{x}_3=2(i_1-i_2) \tag{1-23c}$$

3. 写回路方程

$$2i_1+\dot{x}_1+x_3=u_1(t) \tag{1-24a}$$

$$-x_3+\frac{1}{3}\dot{x}_2+i_2=-u_2(t) \tag{1-24b}$$

4. 从两组方程中消去非状态变量项

本例中，消去i_1，i_2就可得到状态方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-2x_1-x_3+u_1(t)\\ \dot{x}_2&=-3x_2+3x_3-3u_2(t)\\ \dot{x}_3&=2x_1-2x_2\end{aligned} \tag{1-25}$$

写矩阵形式，即

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 3\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix} \tag{1-26}$$

写成状态矢量矩阵微分方程形式，即

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u} \tag{1-27}$$

输出方程，如设定从右端输出，则有

$$y=x_2+u_2(t) \tag{1-28}$$

写成矩阵形式，则有

$$y=[0\quad 1]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+[0\quad 1]\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} \tag{1-29}$$

或　$$\mathbf{y}=C\mathbf{x}+D\mathbf{u} \tag{1-30}$$

二、由系统微分方程导出状态方程

如何从已知的系统微分方程，导出状态方程将按线性微分方程中是否含有作用函数导数

项，分两种情况讨论。

1.微分方程中不含作用函数导数项的情况

设n阶系统为

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=u \tag{1-31}$$

现令 $y=x_1$

$\dot{x}_1=\dot{y}=x_2$

$\dot{x}_2=\ddot{y}=x_3$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)}=x_n$

$\dot{x}_n=y^{(n)}=-a_nx_1-a_{n-1}x_2-\cdots-a_1x_n+u$

则方程（1-31）可转化成

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+Bu \tag{1-32}$$

其中

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\\-a_n&-a_{n-1}&\cdots&-a_1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0\\\\\vdots\\\\1\end{pmatrix}$$

在推导中，选取y，$\dot{y}$，…，$y^{(n-1)}$为n个状态变量，从而得到状态方程(1-32)。其中系数阵A和B的元素与微分方程的系数的关系十分清晰。

输出方程为

$$y=[1\quad 0\quad 0\quad\cdots\quad 0]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \tag{1-33}$$

或 $y=C\mathbf{x}$

$C=[10\cdots0]$

输出方程为一代数方程。

例[1-1] 设系统的微分方程为

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=u$$

求系统的状态方程

解 选取状态变量为

$x_1=y$

$x_2=\dot{y}=\dot{x}_1$

$x_3=\ddot{y}=\dot{x}_2$

再从微分方程解出最高导数项$\dddot{y}$，便可得到状态方程

$\dot{x}_1=x_2$

$\dot{x}_2=x_3$

$\dot{x}_3=-6x_1-11x_2-6x_3+u$

或写成

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}$$

其中

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2.微分方程中含有作用函数导数项的情况

如果系统的微分方程含有作用函数的导数项时，比如

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny$$
$$=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu \tag{1-34}$$

那么就不把y，$\dot{y}$，$\ddot{y}$，…，$y^{(n-1)}$当作一组状态变量，并且也不能采用前面的简捷方法。这是因为n个一阶微分方程

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=x_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$\dot{x}_n$$
$$\dot{x}_n=-a_nx_1-a_{n-1}x_2-\cdots-a_1x_n+b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_nu$$

在$x_1=y$时可能得不到唯一的解

对于这种情况，在寻找状态变量时的主要问题就在于，上面n个方程的最后一个方程右端包含有导数项。

一组状态变量必须是这样的：它们能消去状态方程中u的导数项。

下面介绍一种方法以解决如何把含有作用函数项的微分方程转化成状态方程。

先来看一个三阶系统的微分方程

$$\dddot{y}+a_1\ddot{y}+a_2\dot{y}+a_3y=b_0\dddot{u}+b_1\ddot{u}+b_2\dot{u}+b_3u \tag{1-35}$$

希望的状态方程形式应当是

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}[u] \tag{1-36}$$

其中不能含有导数项。为此可以定义

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+c_1u\\\dot{x}_2&=x_3+c_2u\\\dot{x}_3&=-a_3x_1-a_2x_2-a_1x_3+c_3u\end{aligned}\right\} \tag{1-37}$$

以及

$$y=x_1+c_0u \tag{1-38}$$

式(1-36)、(1-38)是根据状态方程和输出方程的标准形式设定的，于是问题就变成如何从式(1-35)的系数a和b来求c_0，c_1，c_2和c_3。

由式(1-37)、(1-38)可得

$$\dot{y}=\dot{x}_1+c_0\dot{u}=x_2+c_0\dot{u}+c_1u \tag{1-39}$$

$$\ddot{y}=\dot{x}_2+c_1\dot{u}+c_0\ddot{u}=x_3+c_0\ddot{u}+c_1\dot{u}+c_2u \tag{1-40}$$

$$\dddot{y}=\dot{x}_3+c_2\dot{u}+c_1\ddot{u}+c_0\dddot{u}=-a_3x_1-a_2x_2-a_1x_3+c_3u+c_2\dot{u}+c_1\ddot{u}+c_0\dddot{u}$$

$$=-a_3x_1-a_2x_2-a_1x_3+c_0\dddot{u}+c_1\ddot{u}+c_2\dot{u}+c_3u \qquad (1\text{-}41)$$

将式(1-39)、(1-40)两边分别乘以a_2和a_1，式(1-38)乘以a_3，然后再将它们与式(1-41)相加，于是得

$$\dddot{y}+a_1\ddot{y}+a_2\dot{y}+c_3y=-a_3x_1-a_2x_2-a_1x_3+c_0\dddot{u}+c_1\ddot{u}$$

$$c_2\dot{u}+c_3u+a_1x_3+a_1c_0\ddot{u}+a_1c_1\dot{u}+a_1c_2u+a_2x_2+a_2c_0\dot{u}+a_2c_1u+a_3x_1+a_3c_0u$$

$$=c_0\dddot{u}+(c_1+a_1c_0)\ddot{u}+(c_2+a_1c_1+a_2c_0)\dot{u}+(c_3+a_1c_2++a_2c_1+a_3c_0)u$$

$$=b_0\dddot{u}+b_1\ddot{u}+b_2\dot{u}+b_3u$$

利用等式两端同类项系数相等的关系，可得

$$\begin{aligned}
&c_0=b_0\\
&c_1=b_1-a_1b_0\\
&c_2=b_2-a_2b_0-a_1(b_1-a_1b_0)\\
&c_3=b_3-a_3b_0-(a_2-a_1^2)(b_1-a_1b_0)-a_1(b_2-a_2b_0)
\end{aligned} \qquad (1\text{-}42)$$

于是，对于$c_k(k\geqslant1)$有通式

$$c_k=b_k-\sum_{j=0}^{k-1}a'_{k-j}c \qquad (1\text{-}43)$$

利用式（1-43），可很容易由n阶微分方程系数a_i，b_j求出c_k（i，j，$k=0$，1，…，n）并是可方便地写出相应地形式如式（1-36）的状态方程。

例〔1-2〕 设一个系统的微分方程为。

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=\dddot{u}+8\ddot{u}+17\dot{u}+8u$$

求相应的状态方程。

解 该方程的系数a_i和b_j分别为

$$\begin{aligned}
&a_0=1 &\qquad& b_0=1\\
&a_1=6 && b_1=8\\
&a_2=11 && b_2=17\\
&a_3=6 && b_3=8
\end{aligned}$$

根据式（1-42）可以算出

$c_0=1$；　　$c_1=2$；　　$c_2=-6$；　　$c_3=16$

由式（1-36）可得状态方程为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ -6\\ 16\end{pmatrix}[u]$$

输出方程为　$y=x_1+u$

　　　　　　（$\because c_0=1$）

所述方法很容易被推广到n阶系统。

与三阶系统类似，可直接写出其相应的状态方程：

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & 0 & 1\cdots\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots\cdots & -a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_{n-1}\\ c_n\end{pmatrix}[u] \tag{1-44}$$

其中 c_k可由式（1-43）确定。

三、由传递函数导出状态方程

传递函数的定义是当初始条件为零时，系统的输出量（响应函数）的拉普拉斯变换与系统的输入量（作用函数）的拉普拉斯变换之比。若微分方程是

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_0u^{(m)}+b_1u^{(m-1)}$$

$$+\cdots+b_{m-1}\dot{u}+b_mu\ (n\geqslant m) \tag{1-45}$$

则传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n} \tag{1-46}$$

传递函数是一种以系统参数表示的系统输入量与输出量间的关系式，它表达了系统本身的特性，确切地说是系统的端部特性，它不能表明系统的物理结构和内部特性。

由于许多实际物理系统可以直接写出它的传递函数，而且微分方程也可方便地导出传递函数，因此，如何由传递函数推导系统状态方程就成为人们十分感兴趣的一个问题。下面介绍一种较为简便的状态变量图法．以了解传递函数如何转化成状态方程。

所谓状态变量图实际上是一种系统模拟图。其基本方法是用一些简单的基本模拟单元的组合来模拟一个实际的复杂的系统。模拟单元有三种：即积分器、放大器和加法器等。这三种单元都具有运算功能。有了这三种模拟单元，就可按真实系统的要求，组合出各种各样的模拟系统，其传递函数与真实系统相同。这种模拟系统方块图就是相应真实系统的系统模拟图。

例如有一积分方程

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau\\ &=\int_{-\infty}^{0}u(\tau)d\tau+\int_{0}^{t}u(\tau)d\tau\\ &=y(o)+\int_{0}^{t}u(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{1-47}$$

式（1-47）的拉氏变换式为

$$Y(s)=\frac{y(o)}{s}+\frac{1}{s}U(s) \tag{1-48}$$

若将式（1-47）、（1-48）的$y(t)$，$Y(s)$看成输出，$u(\tau)$、$U(s)$看成是输入，$y(o)$，$\frac{y(o)}{s}$看成是初始条件，则两式可方便地用图1-7所示的框图表示。

图1-7说明，微积分方程式可用带有积分器和加法器的框图来模拟。对于传递函数，可用框图来表示，如