概率论与数理统计

童恒庆　周树民
李跃波　张开鹏　编

武汉工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/童恒庆等编.—武汉:武汉工业大学出版社,2000.10

ISBN 7-5629-1625-X

Ⅰ.概…

Ⅱ.①童… ②周… ③李… ④张…

Ⅲ.①概率论-数理统计 ②高等学校-教材

Ⅳ.O211.4

武汉工业大学出版社出版发行

(武汉市武昌珞狮路122号　邮政编码430070)

各地新华书店经销

武汉工业大学出版社印刷厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:7.75　字数:192千字

2000年10月第1版　2000年10月第1次印刷

印数:1～5000册

定价:12.00元

前　言

国内已有众多的工科概率论与数理统计教材，然而教学实践与计算机信息时代召唤我们再写新篇。

编写本教材的目的和指导思想，是希望能够正确处理“概率论”与“数理统计”的关系，加强基础知识与提高应用能力的关系，重视传统知识与结合计算机技术的关系，内容浩繁与学时限制的关系，理论证明与现象说明的关系，教学内容封闭性与前沿知识开放性的关系，使概率论与数理统计这门经典学科更加贴近学生接受能力，贴近实际应用，贴近计算机信息时代，贴近这门课程的名称和大纲要求。

本书由三部分组成。第一部分是概率论基础，约需24学时，第二部分统计推断原理，约需16学时，第三部分实用统计方法入门，约需24学时。采用配套CAI演示和配套计算软件演示，是可以完成教学任务的。如果课程安排是40学时，第三部分可以作阅读材料。

本书出版得到武汉工业大学领导和武汉工业大学出版社的大力支持，非常感谢！

欢迎大家提出宝贵意见。

编者

1999.12.1

目　　录

第一部分　概率论基础

第二部分　统计推断原理

第三部分　实用统计方法入门

第一部分

概率论基础

第一章　随机事件及其概率

第一节　随机现象与随机试验

一、随机现象

在客观世界里，存在着各种现象，归纳起来有两类。一类是在一定条件下必然出现某种结果的现象，称之为**确定性现象**。例如，在标准大气压下，水加热到 100℃必然沸腾；异性电荷相互吸引等等。另一类是在一定条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，但预先不能确定出现哪种结果的现象，称之为**随机现象**。例如，向地上掷一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面，但预先不能确定出现哪种结果；一个战士在一定条件下向靶子射击，命中的环数可能是 10 环、9 环、…，但在每次射击之前，不能确定命中的环数等等。

在一次试验中，随机现象某结果的出现是偶然的，但在同一条件下，对随机现象进行大量重复的试验，就会发现它的各种结果的出现具有统计规律性。例如，重复掷一枚匀称的硬币，“出现正面”与“出现反面”大致各占半数。

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

二、随机试验

概率论中的试验不仅包括各种科学实验，甚至对某一现象的观察也认为是一种试验。在各种试验中，具有下列三个特点的试验称为**随机试验**：

(1)可以在相同条件下重复地进行试验；

(2)每次试验的可能结果不止一个，但预先不能确定会出现哪个结果；

(3)在试验之前知道试验所有可能出现的结果。

随机试验也简称为**试验**。例如掷一枚硬币与向靶射击的试验都是随机试验。

我们是通过随机试验来研究随机现象的。

第二节　样本空间与随机事件

一、样本空间

随机试验的所有可能出现的结果组成的集合称为**样本空间**，记为 Ω 。样本空间中的元素，即随机试验的每一个结果，称为**样本点**。

例 1-1　掷一枚硬币，观察出现正面 H、反面 T 的情况，则样本空间为

$$\Omega_1 = \{H,T\}$$

例 1-2　将一枚硬币掷三次，观察出现正面 H、反面 T 的情况，则样本空间为

$$\Omega_2 = \{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$$

例 1-3　将一枚硬币掷三次，观察出现正面的次数，则样本空间为

$$\Omega_3 = \{0,1,2,3\}$$

例 1-4　记录电话交换台一分钟内接到呼叫次数，则样本空间为

$$\Omega_4 = \{0,1,2,3,\cdots\}$$

例 1-5　在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命(单位：小时)，则样本空间为

$$\Omega_5 = \{t \mid t \geqslant 0\}$$

值得注意的是：样本的空间元素由试验的目的所确定。在上述例 1-2 和例 1-3 中，同是将一枚硬币掷三次，由于试验的目的不同，其样本空间也不一样。

二、随机事件

在随机试验中，样本空间的子集称为**随机事件**，简称**事件**，一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示。特别仅包含一个样本点的事件，称为**基本事件**。

设 A 是一个随机事件，当且仅当 A 中的某个样本点出现时，称**事件 A 发生**。因为空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，因此在每次试验中它都不发生，称 $\varnothing$ 为**不可能事件**；样本空间 Ω 包含所有的样本点，因此在每次试验中它总是发生，称 Ω 为**必然事件**。

例 1-6 在例 1-2 的试验中，"第一次出现正面"，即

$$A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$$

是一个随机事件。

例 1-7 在例 1-5 的试验中，灯泡的"寿命小于 500 小时"，即

$$A_2 = \{t \mid 0 \leqslant t < 500\}$$

是一个随机事件。

三、事件的关系与运算

由于事件是一个集合，因而事件的关系与运算可以类似集合的关系与运算来处理。

设 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是样本空间 Ω 的子集，有下列关系与运算：

1. **包含事件**

若 $A \subset B$，则称事件 B 包含事件 A。这表明事件 A 发生必然导致事件 B 发生。

2. **相等事件**

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 等于事件 B。这表明当且仅当事件 A 发生时，事件 B 发生。

3. **并事件**

事件 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$ 称事件 A 与事件 B 的并事件。这表明事件 A 与事件 B 至少一个发生时，事件$A\cup B$ 发生。

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并事件，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的并事件。

4. **交事件**

事件 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$ 称事件 A 与事件 B 的交事件。这表明事件 A 与事件 B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生。有时 $A\cap B$ 也记为 AB。

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的交事件。

5. **差事件**

事件 $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 但 $\omega\notin B\}$ 称事件 A 与事件 B 的差事件。这表明事件 A 发生但事件 B 不发生时，事件$A-B$ 发生。

6. **互不相容事件**

若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容。这表明事件 A 与事件 B 不能同时发生。

7. **对立事件**

若 $A\cap B=\varnothing$ 而且 $A\cup B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件。这表明事件 A、B 必发生一个，但只发生一个。A 的对立事件记为 $\overline{A}$。

四、事件运算规律

设 A,B,C 为三个事件，有下列运算规律：

1. **交换律**

$$A \cup B = B \cup A, AB = BA$$

2. **结合律**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$$

3. **分配律**

$$A(B \cup C) = AB \cup AC, A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$$

4. **德·摸根律**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

一般地，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，则有

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_n$$

例 1-8 设样本空间 $\Omega = \{0,1,2,3\}$，$A = \{0,1\}$，$B = \{1,3\}$，则

$A \cup B = \{0,1,3\}$，　　$AB = \{1\}$，

$A - B = \{0\}$，　　$\overline{A} = \{2,3\}$。

例 1-9 设 A、B、C 为三个事件，试用这三个事件表示下列事件：

(1)A、B、C 中至少有一个发生；

(2)A、B、C 中恰好有一个发生；

(3)A、B、C 中不多于一个发生。

解 (1) 因为 A、B、C 中至少有一个发生就是 A 发生，或 B 发生，或 C 发生，即 A、B、C 的并，所以可以用 $A \cup B \cup C$ 来表示。

(2) 因为 A、B、C 中恰好有一个发生就是 A 发生，B、C 不发生，或 B 发生，A、C 不发生，或 C 发生，A、B 不发生，所以可以用 $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$ 来表示。

(3) 因为 A、B、C 中不多于一个发生就是 A、B、C 中恰好有一个发生，或 A、B、C 都不发生，所以可以用 $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 来表示。

第三节 频率与概率

一、频率

设在相同条件下，进行了 n 次试验。在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 与 n 之比称为事件 A 发生的频率，记为 $F_n(A)$，即

$$F_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

显然，频率具有下列性质：

(1) $F_n(A) \geqslant 0$；

(2) $F_n(\Omega) = 1$；

(3) 设 A、B 互不相容，则

$$F_n(A \cup B) = F_n(A) + F_n(B)$$

例 1-10 将一枚硬币掷 100 次，若"出现正面"52 次，则"出现正面"频率为 $F_{100}(A) = 0.52$。

可以想象，假定硬币匀称时，当试验的次数不同时，事件 A 的频率可能不尽相同，但试验的次数越多，事件 A 的频率越接近0.5，即事件 A 的频率具有稳定性。为了揭示这一性质，历史上曾有人做过重复掷硬币的试验，其记录结果如表 1-1 所示。

表 1-1

试验者	掷币次数	正面出现的次数	频 率
德·莫根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维 尼	30000	14994	0.4998

例 1-11 检查某厂产品，结果列于表 1-2 中。从表 1-2 看出，

当抽取件数较小时，不合格品频率很不相同，但当抽取件数逐渐增多时，不合格品率稳定于 0.1。

表 1-2

抽取件数	5	10	150	600	900	1200	1800	2400
不合格品数	0	3	19	52	100	109	169	248
不合格品频率	0.0	0.33	0.127	0.087	0.111	0.091	0.094	0.103

从上述两个例子中可以看出，频率一方面具有随机性，同时另一方面又具有统计规律性。对于同一事件 A，如果试验的次数 n 不太大时，其频率 $F_n(A)$ 取值不一定相同，说明它具有随机性；但当试验的次数 n 相当大时，频率 $F_n(A)$ 将稳定于某一数值 p，说明它具有统计规律性。

二、概率

在一次随机试验中，事件 A 可能发生也可能不发生，其发生可能性的大小称为事件 A 的**概率**，记为 $P(A)$。换言之，$P(A)$ 就是对事件 A 发生可能性大小的定量描述。事件 A 发生的可能性大，则 $P(A)$ 大，事件 A 发生的可能性小，则 $P(A)$ 小。

概率与频率有着内在的联系。事件的概率是客观存在的，频率是概率的表现形式，事件的概率通过频率表现出来。在相同条件下进行的重复试验中，随着试验次数的增加，如果事件 A 的频率稳定于某个常数 p 时，则 $P(A) = p$。

与频率类似，概率具有下列基本性质：

(1) $P(A) \geqslant 0$； (1.1)

(2) $P(\Omega) = 1$； (1.2)

(3) 设 A、B 互不相容，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{1.3}$$

例 1-12 将一枚匀称硬币掷一次，则“出现正面”与“出现反

面”的概率都等于 0.5。

习惯上，称(1.1)式为概率的非负性，(1.2)式为概率的规范性，(1.3)式为概率的可加性。

三、概率的性质

由概率的基本性质可以推得概率的一些重要性质。

性质 1 不可能事件的概率为 0，即

$$P(\varnothing) = 0 \tag{1.4}$$

证 因为 $\Omega = \Omega \cup \varnothing$，且 $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$，由概率的可加性(1.3)式知

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$$

所以 $P(\varnothing) = 0$。

性质 2 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \tag{1.5}$$

这一性质称为概率的有限可加性，它是概率可加性(1.3)的推广，可以用数学归纳法来证 明，留给读者作为练习。

性质 2 还可以进一步推广到概率的可列可加性的情况：若 $A_1, A_2, \cdots$是可列个两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) \tag{1.6}$$

性质 3 设 A, B 是两个事件，若 $A \subset B$，则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \tag{1.7}$$

$$P(B) \geqslant P(A) \tag{1.8}$$

证 由 $A \subset B$ 知 $B = A \cup (B - A)$ 且 $A(B - A) = \varnothing$，再由概率的有限可加性(1.3)，得

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A),$$

故 $$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

又由概率的非负性(1.1)式知 $P(B-A)\geqslant 0$，故

$$P(B)\geqslant P(A)$$

性质 3 中的(1.8)式通常称为概率的单调性。

性质 4 对任一事件 A，

$$P(A)\leqslant 1 \tag{1.9}$$

证 因 $A\subset\Omega$，由概率的单调性(1.8)式得

$$P(A)\leqslant P(\Omega)=1$$

性质 5 对于任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{1.10}$$

证 因 $\overline{A}\cup A=\Omega$，且 $\overline{A}\cap A=\varnothing$，由(1.2)式与(1.3)式得

$$1=P(\Omega)=P(\overline{A}\cup A)=P(\overline{A})+P(A)$$

故

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质 6 对于任意两事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.11}$$

证 因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A(B-AB)=\varnothing$，$AB\subset B$，由(1.3)式及(1.7)式得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B-AB)\\&=P(A)+P(B)-P(AB)\end{aligned}$$

显然，当两个事件 A,B 互不相容时，$P(AB)=P(\varnothing)=0$，(1.11)式化为(1.3)式。可见，概率可加性是性质 6 的特例。

性质 6 可以推广到 $n(n>2)$ 个事件的情况。例如，设 A,B,C 为任意三个事件，则有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\end{aligned} \tag{1.12}$$

一般地，对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，可以用数学归纳法证得

$$P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\tag{1.13}$$

上式可称“加奇减偶公式”，即将奇数个事件之交的概率相加，减去偶数个事件之交的概率。

例 1-13 设 A、B、C 为三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=1/8$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率是多少？

解 因 $ABC\subset AB$，由概率的非负性(1.1)式与单调性(1.8)式知

$$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$$

从而得知 $P(ABC)=0$。又因三个事件 A,B,C 至少有一个发生的事件为 $A\cup B\cup C$，由(1.12)式知

$$\begin{aligned}&P(A\cup B\cup C)\\=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)\\&-P(BC)+P(ABC)\\=&1/4+1/4+1/4-0-1/8-0+0=5/8\end{aligned}$$

第四节 古典概型

一、古典概型

频率的统计规律性提供了一种通过试验确定概率的一般方法。但是，在某些特殊情况下，我们可以不通过试验，而根据问题本身所具有的某种“对称性”，并利用人们长期积累的关于“对称性”的实际经验，直接计算事件的概率。例如，掷一枚匀称的硬币，即使不作试验，也会想到“出现正面”与“出现反面”的概率相等。这种确