陕西省高职高专规划教材

GaoDengShuXue

（文科）

# 高等数学

主审

张文鹏

主编

李智杰　郝军

3

陕西省高职高专规划教材

# 高 等 数 学

## （文 科）

主 编 李智杰 郝 军
副主编 张 拓 刘建强
何力争 马晓翊

西 北 大 学 出 版 社
中国·西安

## 内 容 简 介

本书根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学和经济数学课程教学基本要求》而编写。内容包括：函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数的微分学、行列式与矩阵、线性规划初步、概率论初步、数理统计初步。书后并附有部分常用公式表和数表以及习题参考答案。

本书特点：一是突出高职特色，依据高职文科类专业选取内容；二是内容处理深入浅出，引用大量实例，强化数学在实际中的应用。

本书可作为高职高专文科类专业通用教材，也可作为经济管理人员和数学爱好者的参考资料。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学：文科/李智杰等编 .—西安：西北大学出版社，2002.8
ISBN 7-5604-1723-X

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学－高等学校：技术学校－教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057163 号

**高等数学(文科)**
主编 李智杰 郝 军
西北大学出版社出版发行
(西北大学校内 邮编 710069 电话 8302590)
新华书店经销 西北工业大学印刷厂印刷
787 毫米×1092 毫米 1/16 开本 22.25 印张 541 千字
2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷
印数： 1—3000
ISBN 7-5604-1723-X/O·109 定价：26.00 元

# 前 言

本书是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学和经济数学课程教学基本要求》而编写。

教材在汲取了部分高职高专院校的文科类专业高等数学和经济数学教学改革成果的基础上，严格按照高职高专基础课教学“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，充分体现了“强化概念，注重应用”的特色。

本书在内容选取和处理上，紧紧抓住高职高专文科类专业实际，兼顾了数学内容的系统性，又准确把握住专业特点，为学生学习后继课程和持续性发展提供了必要的数学基础。具体有以下几方面特点：

(1) 引用大量实例突出其应用性，注意对学生应用意识、兴趣、能力的培养。

(2) 重视数学概念的理解，对有关定理、结论、方法的叙述力求通俗易懂，尽量进行几何直观解释，淡化了深奥的数学理论。

(3) 例题、习题选择难易适中，由简到难，层次清晰，突出了数学思维方法的训练，并在每章后进行知识总结和归纳。

本书内容可在教学实际中根据学生实际和专业特点等具体情况进行取舍。

参加本书编写的有吕忠田（陕西医学高等专科学校），刘建强、石岚（陕西国防工业职业技术学院），杨岗（陕西职业技术学院），李智杰、郭随兰、王春草（陕西杨陵职业技术学院），张拓（陕西财经职业技术学院），何力争、李志林（西安航空职业技术学院），马晓翊（陕西交通职业技术学院），郝军、欧向阳（陕西工业职业技术学院）。全书由李智杰、郝军定稿。

本书由西北大学张文鹏教授主审，在编写过程中得到编者所在院校和西北大学出版社的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢。

限于编者的水平，不妥之处在所难免，希望广大读者批评指正。

编 者

2002.6

# 目　录


第一章　函数的极限与连续 …… (1)
第一节　函数 …… (1)
一、函数的概念 …… (1)
二、函数的表示法 …… (3)
三、分段函数 …… (4)
四、函数的特性 …… (4)
习题一 …… (5)
第二节　初等函数 …… (6)
一、反函数 …… (6)
二、基本初等函数 …… (6)
三、复合函数 …… (9)
四、初等函数 …… (9)
五、经济分析中几种常见函数 …… (10)
习题二 …… (11)
第三节　数列的极限 …… (12)
一、数列的概念 …… (12)
二、数列的极限 …… (12)
三、数列极限的四则运算法则 …… (13)
习题三 …… (14)
第四节　函数的极限 …… (15)
一、当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限 …… (15)
二、当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限 …… (16)
习题四 …… (17)
第五节　函数极限的运算 …… (17)
一、函数极限的四则运算法则 …… (17)
二、两个重要极限 …… (20)
习题五 …… (23)
第六节　无穷小与无穷大 …… (23)
一、无穷小 …… (23)
二、无穷大 …… (24)
三、无穷小的性质 …… (24)
四、无穷小的比较 …… (25)
习题六 …… (26)
第七节　函数的连续性 …… (26)
一、函数的连续性定义 …… (27)
二、间断点 …… (28)
三、初等函数的连续性 …… (29)
四、闭区间上连续函数的性质 …… (30)
习题七 …… (31)
本章小结 …… (32)
复习题一 …… (32)
第二章　导数与微分 …… (35)
第一节　导数的概念 …… (35)
一、两个实例 …… (35)
二、导数的定义 …… (36)


试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

三、利用定义示导数 …… (36)
四、导数的几何意义 …… (38)
五、可导与连续的关系 …… (38)
习题一 …… (39)
第二节 导数的运算 …… (40)
一、函数的和、差、积、商的求导法则 …… (40)
二、复合函数的求导法则 …… (41)
三、反函数的求导法则 …… (43)
四、隐函数的导数 …… (44)
五、由参数方程所确定的函数的导数 …… (45)
六、基本公式和求导法则 …… (47)
习题二 …… (48)
第三节 高阶导数 …… (48)
一、高阶导数的定义 …… (48)
二、高阶导数的运算 …… (49)
习题三 …… (51)
第四节 微分 …… (51)
一、微分的定义 …… (51)
二、微分的几何意义 …… (53)
三、微分公式及微分法则 …… (53)
四、微分形式的不变性 …… (54)
五、微分在近似计算中的应用 …… (55)
习题四 …… (56)
本章小结 …… (56)
复习题二 …… (57)
第三章 导数的应用 …… (60)
第一节 中值定理与罗必达法则 …… (60)
一、中值定理 …… (60)
二、罗必达法则 …… (61)
习题一 …… (64)
第二节 函数的单调性与极值 …… (64)
一、函数单调性的判定 …… (64)
二、函数的极值 …… (66)
习题二 …… (69)
第三节 函数的最大值与最小值 …… (69)
一、求最值的方法一 …… (69)
二、求最值的方法二 …… (70)
三、求最值的方法三 …… (71)
习题三 …… (72)
第四节 曲线的凹凸与拐点 …… (72)
一、曲线的凹凸定义及判定法 …… (72)
二、曲线的拐点及其求法 …… (73)
习题四 …… (75)
第五节 函数图形的描绘 …… (75)
一、曲线的水平渐近线与垂直渐近线 …… (75)
二、函数图形的描绘 …… (76)
习题五 …… (78)
第六节 导数在经济学中的应用 …… (78)
一、导数在经济分析中的应用 …… (78)
二、导数在经济最优化中的应用 …… (81)
习题六 …… (84)
本章小结 …… (85)
复习题三 …… (86)
第四章 不定积分 …… (88)

第一节 不定积分的概念 …… (88)
一、原函数 …… (88)
二、不定积分的定义 …… (89)
三、不定积分的几何意义 …… (89)
习题一 …… (90)
第二节 基本积分公式不定积分的性质 …… (90)
一、基本积分公式 …… (90)
二、不定积分的性质 …… (91)
习题二 …… (92)
第三节 换元积分法 …… (93)
一、第一类换元积分法（凑微分法） …… (93)
二、第二类换元积分法 …… (98)
习题三 …… (101)
第四节 分部积分法 …… (102)
习题四 …… (105)
第五节 积分表的使用 …… (105)
习题五 …… (107)
第六节 简单的微分使用 …… (107)
一、微分方程的概念 …… (107)
二、可分离变量的微分方程 …… (108)
三、一阶线性微分方程 …… (109)
习题六 …… (112)
本章小结 …… (113)
复习题四 …… (115)
**第五章 定积分** …… (117)
第一节 定积分的概念 …… (117)
一、引出定积分概念的实例 …… (117)
二、定积分的定义 …… (118)
三、定积分的几何意义 …… (119)
习题一 …… (120)
第二节 定积分性质及计算公式 …… (120)
一、定积分的基本性质 …… (120)
二、定积分的计算公式 …… (123)
习题二 …… (125)
第三节 定积分的积分法 …… (126)
一、定积分的换元法 …… (126)
二、定积分的分部积分法 …… (127)
习题三 …… (128)
第四节 广义积分 …… (128)
习题四 …… (130)
第五节 定积分的几何应用 …… (130)
一、平面图形的面积 …… (130)
二、立体的体积 …… (132)
习题五 …… (134)
第六节 定积分在经济中的应用 …… (134)
一、已知总产量的变化率求总产量 …… (134)
二、已知边际函数求总量函数 …… (135)
习题六 …… (135)
本章小结 …… (136)
复习题五 …… (136)
**第六章 多元函数的微分学** …… (139)
第一节 预备知识 …… (139)
一、空间直角坐标系 …… (139)
二、空间两点间的距离公式 …… (140)

三、曲面与方程 …… (140)
习题一 …… (142)
第二节　多元函数的极限与连续 …… (143)
一、多元函数的定义 …… (143)
二、二元函数的定义域 …… (143)
三、二元函数的图形 …… (144)
四、二元函数的极限概念 …… (145)
五、二元函数的连续性 …… (146)
六、有界闭区域上二元连续函数的性质 …… (147)
习题二 …… (148)
第二节　偏导数 …… (149)
一、偏导数的概念及其计算 …… (149)
二、偏导数在经济分析中的应用举例 …… (151)
三、高阶偏导数 …… (152)
习题三 …… (154)
第四节　全微分 …… (155)
一、全微分及其计算 …… (155)
二、全微分在近似计算中的应用 …… (157)
习题四 …… (157)
第五节　多元复合函数求导法则及隐函数求导公式 …… (158)
一、多元复合函数的概念 …… (158)
二、多元复合函数求导的一般法则 …… (158)
三、多元复合函数求导的几种特殊情形 …… (159)
四、隐函数求导公式 …… (161)
习题五 …… (163)
第六节　多元函数的极值 …… (164)
一、二元函数的极值 …… (164)
二、二元函数的最大值和最小值 …… (166)
三、条件极值与拉格朗日乘数法 …… (168)
习题六 …… (170)
本章小结 …… (171)
复习题六 …… (172)
第七章　行列式与矩阵 …… (176)
第一节　行列式的定义 …… (176)
一、二阶行列式 …… (176)
二、三阶行列式 …… (177)
三、代数余子式与三阶行列式的降价展开式 …… (178)
四、$n$ 阶行列式 …… (179)
习题一 …… (180)
第二节　行列式的性质 …… (180)
习题二 …… (184)
第三节　$n$ 阶行列式的计算及克莱姆法则 …… (185)
一、行列式的计算 …… (185)
二、克莱姆法则 …… (187)
习题三 …… (189)
第四节　矩阵的概念 …… (190)
一、矩阵的概念 …… (190)
二、几种特殊的矩阵 …… (192)
习题四 …… (194)
第五节　矩阵的运算 …… (194)
一、矩阵的加法与数乘法 …… (194)
二、矩阵的乘法 …… (196)
习题五 …… (199)
第六节　逆矩阵 …… (200)

一、逆矩阵的概念 …… (200)
二、逆矩阵的性质 …… (200)
三、逆矩阵的求法 …… (201)
四、用逆矩阵解线性方程组 …… (202)
习题六 …… (203)
第七节　矩阵的秩和初等变换 …… (204)
一、矩阵的秩 …… (204)
二、矩阵的初等变换 …… (205)
三、用初等变换求矩阵的秩 …… (205)
四、用初等变换求逆矩阵 …… (207)
习题七 …… (208)
第八节　一般线性方程组 …… (208)
一、一般线性方程组解的判定 …… (208)
二、用初等变换解线性方程组 …… (210)
习题八 …… (213)
本章小结 …… (213)
复习题七 …… (214)
第八章　线性规划初步 …… (217)
第一节　线性规划问题的数学模型 …… (217)
一、实例 …… (217)
二、线性规划问题数学模型的一般形式 …… (219)
三、线性规划问题数学模型的标准形式 …… (219)
习题一 …… (221)
第二节　线性规划问题的图解法 …… (222)
习题二 …… (224)
第三节　线性规划问题的单纯形解法 …… (225)
一、线性规划问题的曲式 …… (225)
二、单纯形解法的基本思想 …… (226)
三、单纯形解法的基本步骤 …… (230)
习题三 …… (234)
本章小结 …… (235)
复习题七 …… (235)
第九章　概率论初步 …… (238)
第一节　随机事件与样本空间 …… (238)
一、随机现象 …… (238)
二、随机事件 …… (238)
三、样本空间 …… (239)
习题一 …… (240)
第二节　事件间的关系与古典概型 …… (240)
一、事件间的关系与运算 …… (240)
二、概率的统计定义 …… (241)
三、古典概型 …… (241)
习题二 …… (243)
第三节　概率的基本公式 …… (243)
一、概念的加法公式 …… (243)
二、条件概率 …… (245)
三、概率的乘法公式 …… (246)
四、全概率公式 …… (246)
习题三 …… (248)
第四节　事件的独立性和 $n$ 次独立实验概型 …… (248)
一、事件的独立性 …… (248)
二、事件独立性的几个命题 …… (249)
三、$n$ 重见努利概型 …… (250)
习题四 …… (251)

第五节　离散型随机变量及其分布列 …… (251)
一、随机变量 …… (251)
二、离散型随机变量的概率分布 …… (252)
三、几个常见离散型随机变量及其概率分布 …… (253)
习题五 …… (254)
第六节　连续型随机变量的概率密度及常见分布 …… (255)
一、密度函数 …… (255)
二、常用的连续型随机变量的概率分布 …… (255)
习题六 …… (258)
第七节　随机变量的分布函数 …… (259)
一、离散型随机变量的分布函数 …… (259)
一、连续型随机变量的分布函数 …… (261)
习题七 …… (262)
第八节　随机变量的数学期望与方差 …… (263)
一、数学期望及其简单性质 …… (263)
二、方差及其简单性质 …… (266)
习题八 …… (268)
本章小结 …… (269)
复习题九 …… (272)
第十章　数理统计初步 …… (274)
第一节　总体　样本　统计量 …… (274)
一、总体和样本 …… (274)
二、统计量 …… (275)
三、$n$ 个常用统计量的分布 …… (275)
习题一 …… (278)
第二节　参数估计 …… (278)
一、点估计 …… (278)
二、区间估计 …… (280)
习题二 …… (283)
第三节　假设检验 …… (284)
一、假设检验问题 …… (284)
二、正态总体的参数假设检验 …… (286)
三、两个正态总体的假设检验 …… (287)
习题三 …… (289)
第四节　一元回归分析 …… (289)
一、散点图与回归直线 …… (290)
二、回归直线方程的建立 …… (290)
三、相关程度的检验 …… (292)
习题四 …… (294)
本章小结 …… (295)
复习题十 …… (296)
附录 …… (298)
附表一　标准正态分布表 …… (298)
附表二　泊松分布表 …… (299)
附表三　$t$ 分布表 …… (302)
附表四　$\chi^2$ 分布表 …… (303)
附表五　F 分布表 …… (304)
附表六　相关系数 $r$ 显著性检验表 …… (310)
附表七　简易积分表 …… (311)
习题与复习题参考答案 …… (320)
参考文献 …… (345)

# ·第一章

# 函数的极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，函数刻划了变量之间的相互制约的关系；极限刻划了变量的变化趋势，连续函数是一类重要的函数．本章对函数的概念做了必要的复习、补充和加深，并介绍极限和连续的概念．

## 第一节　函　　数

### 一、函数的概念

**（一）变量与常量**

我们在研究实际问题时，经常会遇到两类不同的量：一类是在过程中保持不变的、取一个固定数值的量，称为常量；另一类是在过程中会发生变化的、取不同数值的量，称为变量．常量的例子很多，如圆周率 $\pi$、重力加速度 $g$ 等等，变量的例子也很多，如温度、时间、某种商品的价格和需求量等等．

需要指出的是，变量与常量的概念是相对的，同一个量在一定条件下是常量，而在另外的条件下则可能是变量．例如人民币的存款利率，在 1996 年第一季度没有调整，可以看作常量，若考察从 1990 年到 2000 年之间的人民币存款利率，它经过了多次调整，就是一个变量．

**（二）区间与邻域**

1．区间

变量的变化范围是一数集，而区间是用得较多的一数集．

设 $a$ 和 $b$ 都是实数，且 $a<b$，则数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间，记作$(a, b)$．

类似地，数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间，记作 $[a, b]$．

$$\{x \mid a \leqslant x < b\}$$

$$\{x \mid a < x \leqslant b\}$$

称为半开半闭区间，分别记作$[a,b)$和$(a, b]$．

以上这些区间都称为有限区间，其中 $a$ 和 $b$ 称为区间的端点，数 $b-a$ 称为区间的长度．

另外还有无限区间，引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)和 $-\infty$(读作负无穷大)，则数集

$$\{x \mid x > a\}$$

$$\{x \mid x \geqslant a\}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$$\{x \mid x < b\}$$
$$\{x \mid x \leqslant b\}$$

称为半开或半闭无限区间,分别记作$(a,+\infty)$,$[a,+\infty)$,$(-\infty,b)$,$(+\infty,b]$.

全体实数的集合 $R$ 也记作$(-\infty,+\infty)$.

2. 邻域

设 $\delta$ 和 $a$ 是两个实数，且 $\delta>0$，则数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，记作$\bigcup(a,\delta)$，即

$$\bigcup(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

其中点 $a$ 叫做$\bigcup(a,\delta)$的中心，$\delta$ 叫做$\bigcup(a,\delta)$的半径．若去掉邻域中心，则称此邻域为去心邻域．

**（三）函数的定义**

在同一变化过程中，出现的各个变量并不是孤立地在变，而是相互联系、相互制约的，如一天内的气温是随时间的变化而变化的，某种商品的市场需求量是受该商品的价格影响的，自由落体在下落过程中，物体下落的路程 $s$ 和经历的时间 $t$ 之间有如下关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

显然，$s$ 和 $t$ 是按这个式子确定的关系相互制约的，$t=0$ 表示物体刚开始下落的时刻，这时 $s=0$. 经历 2 秒后物体下落的路程为

$$\frac{1}{2}g\cdot 2^2=2g$$

等等，总之，$s$ 随 $t$ 的变化而变化．设物体着地的时刻为 $T$，则当时间 $t$ 在〔0，$T$〕内任取一个数值时，相应的路程 $s$ 的数值也随之惟一地确定．变量之间的这种相依关系在数学中称为函数关系，下面，我们给出函数的确切定义．

**定义** 设在某一变化过程中有两个变量 $x$ 和 $y$，如果对于 $x$ 在某一范围 $D$ 内的每一个取值，按照一定的对应法则 $f$，变量 $y$ 都有惟一确定的值与它对应，则称 $y$ 为 $x$ 的函数，记作 $y=f(x)$，其中称 $x$ 为自变量，称 $y$ 为因变量，自变量 $x$ 的取值范围 $D$ 称为函数的定义域．

如果 $x_0$ 是 $D$ 内某一值时，我们就说函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义，这时函数的对应值 $f(x_0)$ 称为 $x_0$ 点的函数值，所有函数值的集合称为函数的值域．如 $y=\sin x$ 或 $f(x)=\sin x$ 表示 $y$ 为 $x$ 的正弦函数，在 $x_0=\frac{\pi}{2}$ 处的函数值为

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

**例 1** 设出租车载客的收费标准为：3 公里以内的路程收费 5 元，此后每公里加收 1.2 元．由此可知，出租车载客时的收费数 $F$ 与行驶的公里数 $x$ 之间的函数关系为

$$F(x)=\begin{cases}5 & 0<x\leqslant 3\\ 5+1.2(x-3) & x>3\end{cases}$$

若出租车载某乘客行驶 2 公里,则应收费 5 元,即 $F(2)=5$;行驶 8 公里时应收费为

$$F(8)=5+1.2(8-3)=11\text{ 元}$$

给定一个函数后,其定义域是同时给定的．在实际问题中,函数的定义域则要由问题的实际意义来决定,如自由落体下落的路程函数中,函数的定义域应为区间[0, $T$],若把 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 当作关于 $t$ 的二次多项式来看待,那么它的定义域应为区间$(-\infty,+\infty)$．如果函数是用没有实际背景的数学式子给出的,那么函数的定义域应从理论上使数学式子有意义．

**例 2**　求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$;

(2) $y=\frac{1}{x-3}+\ln(x-2)-\sqrt[3]{x+1}$.

解　(1) 要使 $y$ 有意义，必须有 $4-x^2\geqslant 0$，因此，函数的定义域为 $-2\leqslant x\leqslant 2$，也可以用区间表示为 $[-2, 2]$

(2) 要使 $y$ 有意义，必须有 $x-3\neq 0$，且 $x-2>0$，因此，函数的定义域为 $x>2$ 且 $x\neq 3$，用区间表示为$(2, 3)\cup(3, +\infty)$.

定义域和对应法则是函数概念中的两大要素,两个函数只有当它们的表达式相同且定义域也相同时,才认为是两个相同的函数,否则就认为它们是两个不同的函数．例如,$f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是两个相同的函数;$f(x)=2\lg x$ 与 $g(x)=\lg x^2$ 从形式上看似乎相同,但它们的定义域不同:$f(x)$ 的定义域是$(0,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,因此,$f(x)$ 与 $g(x)$ 是两个不同的函数．

## 二、函数的表示法

**(一) 解析法**

用数学式子来表示因变量与自变量之间的函数关系的方法称为解析法（或公式法)，表示函数关系的数学式子称为解析式，解析法是表示函数关系的主要方法，也是最常用的方法，如本节例 1、函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 等等，都是用解析法表示函数关系．解析法的特点是便于理论分析和数值计算．

**(二) 图形法**

用坐标平面上的图形来表示函数关系的方法称为图形法．其特点是直观性强．如下面的例子．

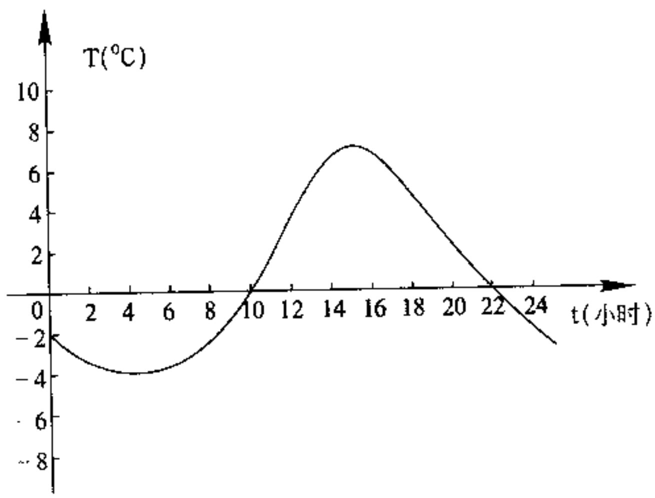



图 1－1　某天的气温变化实测图

**例 3**　图 1－1 是某地气象站的温度记录仪一昼夜之间自动画成的气温曲线，它表示某一天从 $t=0$ 点钟到 $t=24$ 点钟小时内气温 $T$ (℃) 随时间 $t$ 而变化的函数关系．

**(三) 列表法**

用一个列有一系列自变量值与对应函数值的表格来表示函数关系的方法称为列表法．

如数学中的对数表、三角函数表、经济工作中的价目表、利率表，等等都是函数的列表法表示．

**例 4**　某一时期银行的人民币整存整取定期储蓄存期与年利率之间的对应关系如下表

表 1－1

| 存　期 | 三个月 | 六个月 | 一　年 | 二　年 | 三　年 | 五　年 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 年利率（%） | 3.33 | 5.40 | 7.47 | 7.92 | 8.28 | 9.00 |

这张表就表示了存期和年利率两个变量之间的函数关系．

## 三、分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 $x$ 不同的取值，不能用一个统一的解析式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数．如本节例 1 中所举的车费函数，再如符号函数（图 1－2）

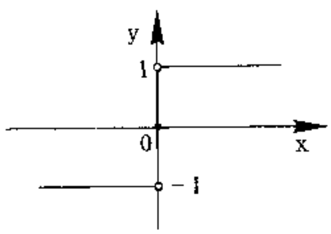



图 1－2

$$f(x)=sgnx=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$．

**例 5**　设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\0\ , & x=0\\x^2-1, & x<0\end{cases}$　求 $f(0),f(-1),f(2)$.

**解**　$f(0)=0$

$f(-1)=(-1)^2-1=0$

$f(2)=2^2+1=5$

## 四、函数的特性

### (一) 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在某一区间 $D$ 内有定义，若存在一个正数 $M$，对于一切 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 $D$ 内有界，否则称 $y=f(x)$ 在 $D$ 内无界．

例如，$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的；$y=\dfrac{1}{x}$在$(1,2)$内有界，在$(0,1)$内无界．

### (二) 单调性

有些函数的函数值随自变量的增大而增大，有些函数的函数值随自变量的增大而减小，这就是函数的增减性，也称为单调性．严格地讲，就可定义为：

设函数 $y=f(x)$ 定义在区间$(a,b)$内，若对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在区间$(a,b)$内是单调递增的；若总有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在区间$(a,b)$内是单调递减的．区间$(a,b)$称为函数 $y=f(x)$ 的单调区间．

例如，$y=2x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调递增的；$y=x^2$ 在$(-\infty,0)$内单调递减，而

在$(0, +\infty)$内单调递增．

**(三) 奇偶性**

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称(即若 $x\in D$,则必有 $-x\in D$),如果对任一 $x\in D$,总有 $f(-x)=f(x)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 为偶函数;如果对任一 $x\in D$,总有 $f(x)=-f(-x)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 为奇函数．

例如,$f(x)=x^2+1$ 是偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$．又例如,$f(x)=x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$．

奇函数的图形关于原点对称；偶函数的图形关于 $y$ 轴对称．

**(四) 周期性**

设函数$y=f(x)$的定义域为 $D$,如果存在正数 $T\neq 0$,使得对于任一 $x\in D$,有 $x+T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,常数 $T$ 称为$f(x)$ 的周期．

显然,若 $T$ 是$f(x)$的一个周期,则$2T$、$3T$等等也往往是$f(x)$的周期．通常我们说周期函数的周期是指最小正周期．

例如，$y=\sin x$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数．$y=\tan x$ 是周期为 $\pi$ 的周期函数．．

## 习题一

1．下列各题中，函数 $f(x)$与 $g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,　　$g(x)=x+1$;

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$,　　$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(3) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$,　　$g(x)=1$;

(4) $f(x)=x$,　　$g(x)=(\sqrt{x})^2$.

2．求下列函数的定义域:

(1)$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$;　　(2)$y=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x-1}$;

(3)$y=\ln(x+3)+\sqrt{6-x}$;　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

3．设 $f(x)=x^2+1, g(x)=\dfrac{1}{x}$,试求 $f(x+1), f(x)+1, f[g(x)], g[f(x)]$.

4．设 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\geqslant 0\\ x-1, x<0\end{cases}$,求 $f(0), f(\frac{1}{2}), f(-1)$.

5．判断下列函数的奇偶性:

(1)$y=x^2+\cos x$;　　(2)$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$;

(3)$y=xe^{x^2}$;　　(4)$y=x^3+x$.

6．旅客乘火车时，随身携带物品，不超过 20 千克的免费，超过 20 千克的，每千克收费 0.20 元，超过 50 千克的部分每千克加收 50%费用，试列出收费与物品重量的函数关系．

7．市内公用电话通话时间 3 分钟内收费 0.3 元，3 分钟以后，每分钟加收 0.15 元，试列出电话费与通话时间的函数关系．

# 第二节　初等函数

## 一、反函数

在函数关系中，自变量和因变量的地位并不是绝对不变的．例如，正方形的面积 $s$ 与边长 $a$ 之间的函数关系为 $s=a^2$，这里 $a$ 是自变量，$s$ 是因变量，$s$ 是 $a$ 的函数，当边长 $a$ 的值给定后，面积 $s$ 的值就惟一确定．反过来，若由面积值确定边长值，则有 $a=\sqrt{s}$，这里 $a$ 成了因变量，$s$ 成了自变量，表明边长 $a$ 是面积 $s$ 的函数，这就是反函数的概念．

**定义 1**　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $D$，值域是 $M$，如果对于 $y$ 的每一个值($y\in M$)，$x$ 都有惟一确定的值($x\in D$)与它对应，那么就可以确定 $x$ 也是 $y$ 的函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数．

由于习惯上常用 $x$ 表示自变量，用 $y$ 表示函数，所以，我们把函数 $y=f(x)$ 反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$．

**例 1**　求 $y=2x+1$ 的反函数．

解　根据 $y=2x+1$ 解出 $x=\frac{1}{2}(y-1)$，再互换 $x$ 和 $y$ 的位置，就得到函数 $y=2x+1$ 的反函数是 $y=\frac{1}{2}(x-1)$．

**例 2**　求 $y=x^2\ (x\geqslant 0)$ 的反函数．

解　由 $y=x^2\ (x\geqslant 0)$ 解出 $x=\sqrt{y}$，所以函数 $y=x^2\ (x\geqslant 0)$ 的反函数为 $y=\sqrt{x}$（图 1－3）．

函数 $y=f(x)$ 的图形和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1－4)．

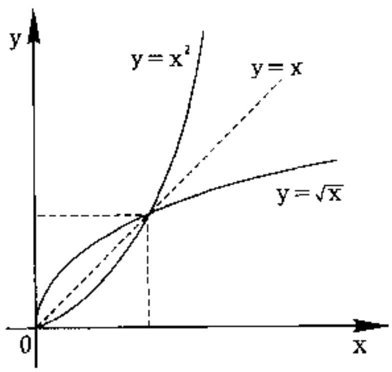



图 1－3

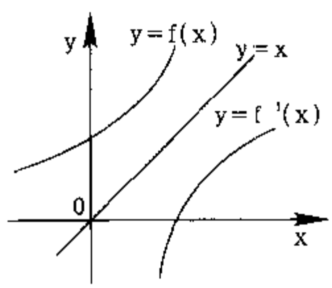



图 1－4

## 二、基本初等函数

### (一) 常值函数

函数 $y=c$（$c$ 为常数)称为常值函数．其定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $\{c\}$，常值函数的图形是一条平行于 $x$ 轴的直线．

**（二）幂函数**

函数 $y=x^{\alpha}$（$\alpha$ 为实数）称为幂函数．其图形和性质随指数 $\alpha$ 的取值而定，以下分三种情况讨论：

1．当 $\alpha=0$ 时，$y=1$，它是定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$的常值函数．

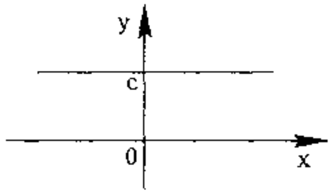
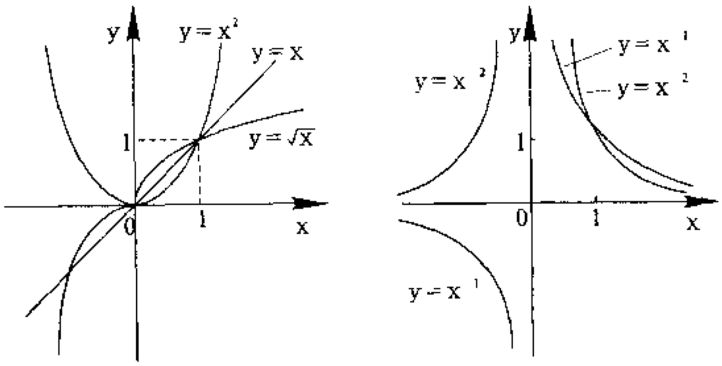



图 1－5 常值函数的图形

2．当 $\alpha>0$ 时，如 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\sqrt{x}$ 等等（图 1－6（$a$）），在［0，$+\infty$)内单调递增．

3．当 $\alpha<0$ 时，如 $y=x^{-1}$，$y=x^{-2}$ 等等（图 1－6（$b$）），在$(0,+\infty)$内单调递减．




(a) (b)

图 1－6

**（三）指数函数**

函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）称为指数函数．它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$．当 $a>1$ 时，函数单调递增；当 $0<a<1$ 时，函数单调递减．指数函数的图形都经过点(0,1)，如图 1－7 是 $y=2^x$ 和 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图形．

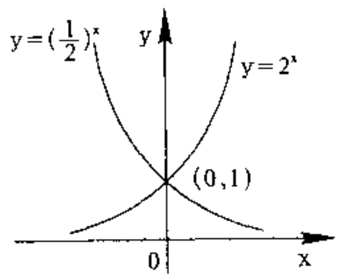



图 1－7

**（四）对数函数**

指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的反函数是函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），称之为对数函数．其定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$．当 $a>1$ 时，函数单调递增；当 $0<a<1$ 时，函数单调递减．所有函数图像都经过点(1,0)．如图 1－8 是 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图形．

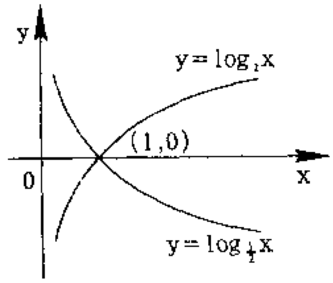



图 1－8

在高等数学中常使用 $a=e$ 时的对数函数 $y=\log_e x=\ln x$，称为自然对数，这里 $e=2.71828\cdots$它是一个无理数．

**（五）三角函数**

**1．正弦函数**

函数 $y=\sin x$ 称为正弦函数．其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为［$-1$,1］，它是以 $2\pi$ 为周期的有界的奇函数，图形如图 1－9 所示．

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com