



018-45C,

24743

漢

譯

學何幾折新解氏三倪蓋斯



上海新亞書店出版

漢語 幾何學 新解析幾何學

版 電 月

不 准 售

一九四〇年八月初版

一九五二年八月十五版

定價人民幣 2 千元

編 譯 者 董 清

出 版 者 新 亞 書 店

上海河南中路159號

電 話: 94258

總發行所 中國科技圖書聯合發行所

上海中央路24號304室

電話: 2566 電報掛號: 21968

分發行所 上海 漢慶 新 亞 書 店

寧波 貴陽

23701-26700

原 序

著者於改訂本書時，凡諸教師向所贊許之點，無不加意爲之保留，且依著者之經驗更力求其完善。書中大旨絕少變更，惟足以助長學者之興趣者，略有增補而已。至於重排上之改變，目的蓋在供給一種前後一貫之發展，並將較新而較難之主題得於適當期間討論之。

本版以初版之新材料爲標準，當可爲讀者所鑒諒。解析幾何學之課程，現當包括超越曲線，參數方程式，圖形，及經驗方程式諸章。

多數教師甚願將立體解析幾何學部分稍予簡略，本版已能適合此項要求。但另有一部分教師，欲得充分之教材以供攻習微積分之預備者，其所需資料，亦悉已具備於本書矣。

書中問題業經全部加以改訂。其有冠以“特選問題”字樣者，以之供普通之練習則太難，蓋專爲優秀學者而設，俾得一練習難題之機會耳。

目次

第一章 參考公式及表

節數	頁數
1. 幾何學代數學及三角法中之公式.....	1
2. 特別角之三角函數真數值.....	4
3. 三角函數之符號規則.....	5
4. 三角函數之真數值.....	5
5. 希臘字母.....	5

第二章 笛卡兒坐標

6. 解析幾何學.....	6
7. 笛卡兒直角坐標 斜角坐標.....	6
8. 方向直線.....	9
9. 點.....	10
10. 分一線段為定比之點.....	11
11. 對於幾何學上定理之應用.....	13
12. 斜角及斜率.....	15
13. 平行線或垂直線之檢驗法.....	17
14. 角之公式.....	18
15. 面積.....	20

第三章 曲線及方程式

16. 曲線(一點之軌跡)之方程式.....	25
17. 方程式之軌跡.....	28
18. 方程式之討論.....	31
19. 提要.....	35
20. 水平及垂直漸近線.....	38
21. 交點.....	42

第四章 直 線

22. 直線方程式之次	45
23. 任意一次方程式之軌跡	45
24. 畫直線法	47
25. 點斜式	50
26. 兩點式	50
27. 截距式	51
28. 三直線交於一公共點之條件	51
29. 直線之法線方程式	54
30. 法線式之化法	55
31. 一直線至一點之垂直距離	58
32. 直線系	62
33. 通過已知二直線交點之直線系	64

第五章 圓

34. 圓之方程式	68
35. 圓之檢驗法	69
36. 三條件決定一圓	70
37. 根軸	75
38. 切線之長	76
39. 圓系	78

第六章 拋物線橢圓及雙曲線

40. 拋物線	81
41. 拋物線作圖法	83
42. 拋物拱	83
43. 畫拋物線法	84
44. 橢圓	86
45. 橢圓作圖法	89
46. 畫橢圓法	90
47. 特例	91
48. 雙曲線	92
49. 雙曲線作圖法	95

50. 畫雙曲線法	95
51. 共軛雙曲線及漸近線	97
52. 等軸雙曲線或直角雙曲線	100
53. 提要	100
54. 錐線	101
55. 二次曲線系	101

第七章 坐標之變換

56. 引論	103
57. 平移	103
58. 平移坐標軸以簡化方程式	105
59. 定理	108
60. 錐線之特徵方程式	109
61. 旋轉	111
62. 由轉軸法簡化方程式	112
63. 任意二次方程式之軌跡	114
64. 二次方程式之軌跡作圖法	117
65. 特例	122
66. 錐線之另一定義	123
67. 坐標軸之普遍變換	124
68. 軌跡之分類	125

第八章 切線

69. 切線方程式	127
70. 普遍定理	130
71. 法線之方程式	131
72. 次切矩及次法矩	132
73. 由已知斜率求切線法	133
74. 過曲線外一點之切線	133
75. 已知斜率之切線方程式	135
76. 錐線之切線及法線之性質	138

第九章 極坐標

77. 極坐標	143
---------------	-----

78. 極方程式作圖法	143
79. 極方程式作圖捷法	147
80. 直角坐標與極坐標之關係	149
81. 應用 直線與圓	151
82. 錐線之極坐標方程式	152
83. 交點	154
84. 用極坐標求軌跡法	155

第十章 超越曲線

85. 自然對數	159
86. 正弦曲線	164
87. 週期性	166
88. 畫正弦曲線法	166
89. 其他三角曲線	169
90. 縱標之加法	171
91. 界限曲線	173

第十一章 參數方程式與軌跡

92. 參數方程式作圖法	177
93. 從參數方程式求直角坐標方程式	179
94. 同曲線之各種參數方程式	180
95. 用參數方程式解軌跡問題	183
96. 由對應線之交點確定軌跡	189
97. 錐線之直徑	191

第十二章 函數,圖形,及經驗方程式

98. 函數	196
99. 函數之圖形	197
100. 函數之立式及作圖	199
101. 由經驗所定之函數	203
102. 直線律	203
103. 平均法	204
104. 上例註釋	206

105.	含二常數之諸律	208
106.	乘幂律	209
107.	指數律及雙曲線律	212
108.	拋物線律	216
109.	平均法應用於普通拋物線律	218
110.	代數方程式之圖解	220
111.	超越方程式之圖解	223

第十三章 笛卡兒空間坐標

112.	笛卡兒坐標	226
113.	重要關係	227
114.	直線之方向餘弦	229
115.	直線之方向數	230
116.	長	232
117.	二方向直線間之角	233
118.	平行線及垂直線之檢驗法	234
119.	分一線段為定比之點	235
120.	空間之軌跡	238
121.	面之方程式	238
122.	曲線之方程式	239
123.	方程式之軌跡	239

第十四章 空間之平面及直線

124.	平面方程式之法線式	242
125.	任意一次方程式之軌跡	243
126.	特別平面	245
127.	平面之截距及跡線	246
128.	兩平面間之角	248
129.	三條件決定之平面	249
130.	以截距表平面方程式	251
131.	一平面至一點之垂直距離	253
132.	平面系	255
133.	直線之普遍方程式	255

134. 直線方程式之各種形式	261
135. 直線之投影面	262
136. 直線與平面之相對位置	268

第十五章 特殊曲面

137. 球面	271
138. 柱面	274
139. 錐面	275
140. 曲面方程式之討論	277
141. 二次曲面	281
142. 橢圓面	281
143. 單葉雙曲面	283
144. 雙葉雙曲面	284
145. 橢圓拋物面	286
146. 雙曲拋物面	288

第十六章 立體解析幾何學補編

147. 迴轉曲面	291
148. 直紋曲面	293
149. 直紋二次曲面	295
150. 斜柱面	297
151. 曲線之投影柱面	298
152. 空間曲線之參數方程式	301

第十七章 坐標之變換,各種坐標系

153. 坐標軸之平移	304
154. 坐標軸之旋轉	304
155. 含 x, y, z 之二次方程式之軌跡	307
156. 普遍三元二次方程式之簡化法	309
157. 極坐標	310
158. 球面坐標	311
159. 柱面坐標	311
索引	315

斯 蓋 倪 三 氏

新 解 析 幾 何 學

解 析 幾 何 學

第 一 章

參 考 公 式 及 表

1. 下列諸公式及定理,在幾何學,代數學,及三角法中業已加以證明,以後各章,間須應用之.

幾 何 學

(1) 下列諸公式中, r 表半徑, a 表高, B 表底面積, s 表斜高.

圓 圓周 $= 2\pi r$. 面積 $= \pi r^2$.

棱柱 體積 $= Ba$.

棱錐 體積 $= \frac{1}{3}Ba$.

直圓柱 體積 $= \pi r^2 a$. 側面積 $= 2\pi r a$. 全面積 $= 2\pi r(r + a)$.

直立圓錐 體積 $= \frac{1}{3}\pi r^2 a$. 側面積 $= \pi r s$. 全面積 $= \pi r(r + s)$.

球 體積 $= \frac{4}{3}\pi r^3$. 面積 $= 4\pi r^2$.

代 數 學

(2) 二次方程式 $Ax^2 + Bx + C = 0$.

解: 1. 因子分解法: 將 $Ax^2 + Bx + C$ 分解為因子, 命各因子等於零, 解之以得 x .

2. 配方法: 移 C 於等號之右側, 用 x^2 之係數徧除全式, 加 x 之半係數之平方於兩側, 再求平方根.

3. 用公式法:
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

根之性質 公式中根號內之式 $B^2 - 4AC$ 稱為判別式, 依判別式為正, 為零, 或為負, 而二根為不相等之實數, 或為相等之實數, 或為虛數.

(3) 對數

$$\log ab = \log a + \log b. \quad \log a^n = n \log a. \quad \log 1 = 0.$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b. \quad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a. \quad \log_a a = 1.$$

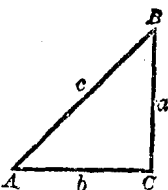
三 角 法

(4) 直角三角形 銳角 A 之三角函數, 定義如下:

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}, & \cos A &= \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}, & \tan A &= \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}, \\ \csc A &= \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}, & \sec A &= \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}, & \cot A &= \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}. \end{aligned}$$

定理 直角三角形之一邊等於斜邊乘此邊所對之角之正弦之積或等於斜邊乘此邊鄰角之餘弦之積.

(5) 普偏角 如角 XOA 為由一直線從 OX 之位置旋轉至 OA 之位置所成, 其直線依逆時針方向旋轉時, 所成之角為正; 如依順時針方向旋轉時, 所成之角為負. 則稱此定直線 OX 曰初線, 轉 OA 曰終線 (參看下面圖)



(6) 角之度量 量角之大小, 通常有二法; 即有兩種單位角.

當度法 單位角為旋轉一周之 $\frac{1}{360}$, 謂之一度.

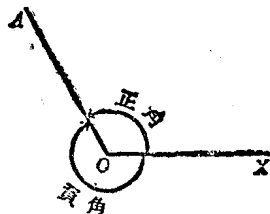
弧度法 單位角為與半徑等長之弧所對之圓心角, 名之曰弧度, 簡稱曰徑.

以上兩種單位角之關係可以方程式

$$180 \text{ 度} = \pi \text{ 徑} (\pi = 3.14159 \dots)$$

表之, 又解此式, 得

$$1 \text{ 度} = \frac{\pi}{180} = 0.0174 \dots \text{ 徑}; \quad 1 \text{ 徑} = \frac{180}{\pi} = 57.29 \dots \text{ 度}.$$



由上述定義,可得

$$\text{一角所含弧度} = \frac{\text{所對之弧}}{\text{半徑}}$$

引用上列等式,可化一種量法爲他種量法.

(7) 三角函數之關係

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x};$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}; \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x; \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$$

(8) 簡化角度公式

角度	正弦	餘弦	正切	餘切	正割	餘割
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$
$90^\circ - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$
$90^\circ + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$-\csc x$	$\sec x$
$180^\circ - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$-\sec x$	$\csc x$
$180^\circ + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$-\sec x$	$-\csc x$
$270^\circ - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$-\csc x$	$-\sec x$
$270^\circ + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$\csc x$	$-\sec x$
$360^\circ - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$

$$\frac{p}{2} = \sqrt{15} \cdot 2$$

(9) $(x+y)$ 及 $(x-y)$ 之三角函數

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$x = \frac{2}{16}$$

$$\frac{2}{24}$$

(10) $2x$ 及 $\frac{1}{2}x$ 之函數

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}; \quad \sin \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}};$$

$$\cos \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}; \quad \tan \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}};$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x; \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

(11) 任意三角形之關係 餘弦律 在任意三角形中，一邊之平方等於其他兩邊平方之和，減此兩邊與其夾角餘弦乘積之二倍；即

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

三角形之面積 任意三角形之面積等於兩邊與其夾角之正弦相乘積之半；即

$$\text{面積} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B.$$

2. 特別角之三角函數真數值

弧 數	度 數	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1
π	180°	0	-1	0	∞	-1	∞
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	∞	0	∞	-1
2π	360°	0	1	0	∞	1	∞

弧 數	度 數	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1

3. 三角函數之符號規則

象限	sin	cos	tan	cot	sec	csc
第一.....	+	+	+	+	+	+
第二.....	+	-	-	-	-	+
第三.....	-	-	+	+	-	-
第四.....	-	+	-	-	+	-

4. 三角函數之真數值

經數	度數	sin	cos	tan	cot		
0.000	0°	0.000	1.000	0.000	∞	90°	1.571
0.017	1°	0.017	1.000	0.017	57.29	89°	1.553
0.035	2°	0.035	0.999	0.035	28.64	88°	1.536
0.052	3°	0.052	0.999	0.052	19.08	87°	1.518
0.070	4°	0.070	0.998	0.070	14.30	86°	1.501
0.087	5°	0.087	0.996	0.088	11.43	85°	1.484
0.175	10°	0.174	0.985	0.176	5.67	80°	1.396
0.262	15°	0.259	0.966	0.263	3.73	75°	1.309
0.349	20°	0.342	0.940	0.364	2.75	70°	1.222
0.436	25°	0.423	0.906	0.466	2.14	65°	1.134
0.524	30°	0.500	0.866	0.577	1.73	60°	1.047
0.611	35°	0.574	0.819	0.700	1.43	55°	0.960
0.698	40°	0.643	0.766	0.839	1.19	50°	0.873
0.785	45°	0.707	0.707	1.000	1.00	45°	0.785
		cos	sin	cot	tan	度數	經數

5. 希臘字母

字母 讀音

A α Alpha

B β Beta

Γ γ Gamma

Δ δ Delta

Ε ε Epsilon

Ζ ζ Zeta

Η η Eta

Θ θ Theta

字母 讀音

Ι ι Iota

Κ κ Kappa

Λ λ Lambda

Μ μ Mu

Ν ν Nu

Ξ ξ Xi

Ο ο Omicron

Π π Pi

字母 讀音

Ρ ρ Rho

Σ σ Sigma

Τ τ Tau

Υ υ Upsilon

Φ φ Phi

Χ χ Chi

Ψ ψ Psi

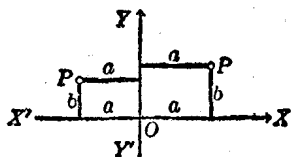
Ω ω Omega

第二章

笛卡兒坐標

6. 解析幾何學中之問題，須運用坐標，方程式及代數方法解決之。

7. 笛卡兒*直角坐標 設 XX' , YY' 爲一平面內互相垂直之兩垂線，其交點爲 O 。從 YY' 至平面內一點之距離，稱爲該點之橫標；從 XX' 至一點之距離，稱爲該點之縱標。以此二距離並遵守下述之符號規則，即得決定平面內一點之位置：一點 P 在 YY' 之右時， P 之橫標爲正，在 YY' 之左時則爲負；點 P 在 XX' 之上時，其縱標爲正，在 XX' 之下時則爲負。

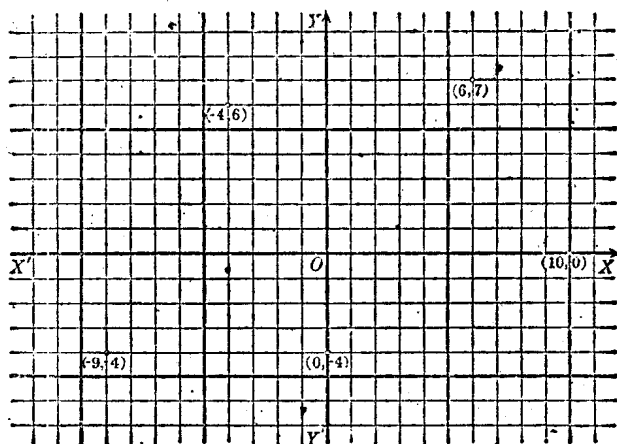


點 P 之橫標 a 及縱標 b 總稱爲 P 之坐標，記以 (a, b) ，括弧中橫標常寫在縱標之前。 XX' 與 YY' 兩直線稱爲坐標軸： XX' 爲 x 軸（或稱橫軸）， YY' 爲 y 軸（或稱縱軸）。點 O 稱爲原點。

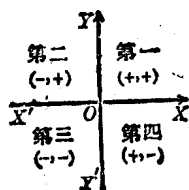
直角坐標系中之畫點工作，以用坐標紙爲最簡便，該紙面畫有相等之小方格，各方格之邊皆與坐標軸平行。

* 笛卡兒 (Rene Descartes 1596—1650) 爲介紹坐標觀念於幾何學研究之第一人，故稱笛卡兒坐標。

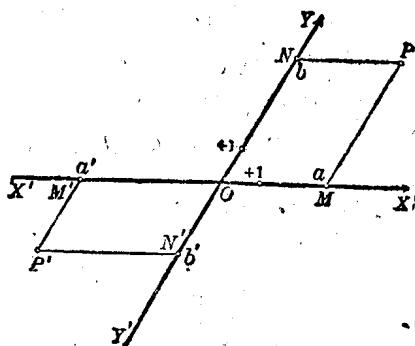
下圖所畫諸點，假定其長之單位與各坐標軸上之一方格相等，則其畫法如下：



從點 O 沿 $X'X$ 數出若干格與已知橫標之數相等(橫標爲正時向右數，橫標爲負時向左數)。從如此所決定之一點，再依縱標之爲正或爲負，向上或向下數取若干格與已知縱標之數相等。



直角坐標軸分平面爲四部分，每一部分稱爲象限。各象限之記法如圖，並指明各象限中坐標之適當符號。



爲與直角坐標分別起見，如其兩軸不相垂直時(參看右圖)，則名之曰斜角

坐標。今 P 之坐標爲平行於坐標軸之 MP 及 NP 兩直線。橫標爲 $NP(=OM)$ ，縱標爲 MP 。前述之符號規則，此處仍適用之。

下列諸問題，除言明斜角坐標者外，均假定爲直角坐標。

平面內任意一點 P ，可決定二數，即 P 之坐標是也。反之，已知二實數 a' 與 b' 時，平面內常可作出坐標爲 (a', b') 之一點 P' ，因取 $OM' = a'$ ， $ON' = b'$ ，通過 M' 及 N' 引兩直線平行於坐標軸，則此兩直線相交於 $P'(a', b')$ 。故

每點可決定一對實數；反之，一對實數可決定一點。

代數學上之虛數，在此圖示法中並無位置。因此，初等解析幾何學之坐標祇以代數學上之實數爲限。

問 題

- 試準確畫出 $(6, 2)$ ， $(-2, 6)$ ， $(3, -3)$ ， $(4, 0)$ ， $(0, -2)$ ， $(-4, -3)$ 諸點。
- 一點移動時，其橫標恆爲 -3 ，問此點之軌跡爲何？又若其縱標恆爲 4 ，則此點之軌跡爲何？
- 試作三角形，其頂點如下：
 - $(3, 4)$ ， $(0, -4)$ ， $(2, 4)$ 。
 - $(1, -1)$ ， $(-4, 3)$ ， $(-6, -2)$ 。
 - $(3, 5)$ ， $(3, 10)$ ， $(0, 2.5)$ 。
 - $(2, 0)$ ， $(-1, \sqrt{3})$ ， $(-1, -\sqrt{3})$ 。
 - (b, d) ， (c, d) ， $(a, 0)$ 。
- 求問題 3 之 (c)，(d)，(e) 三角形之面積。 答：(d) $3\sqrt{3}$ 。
- 試作四邊形，其頂點如下：
 - $(0, -4)$ ， $(6, 2)$ ， $(0, 4)$ ， $(-6, 2)$ 。
 - $(0, 0)$ ， $(4, 5)$ ， $(8, 0)$ ， $(7, 3)$ 。
 - (a, b) ， $(-a, b)$ ， $(a, -b)$ ， $(-a, -b)$ 。
- 某點之橫標等於縱標，其軌跡爲何？又若橫標等於縱標之負值，則其軌跡爲何？
- 用幾何學作圖法精確作出 $(\sqrt{2}, 3)$ ， $(\sqrt{3}, 2)$ ， $(\sqrt{5}, \sqrt{6})$ 諸點。
- 等邊三角形之邊爲 6 吋，其底邊與 x 軸相疊合，底邊之中點落於原點。問頂點之坐標爲何？(有二種情形。)