4

杨奇　田代军　韩维信

线性代数与解析几何

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

线性代数与解析几何

杨 奇 田代军 韩维信

天 津 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何/杨奇主编. —天津: 天津大学出版社, 2002.10
ISBN 7—5618—1673—1

Ⅰ.线… Ⅱ.杨… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材②解析几何—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 073892 号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨风和
地　　址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷	河北省昌黎县人民胶印厂
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	148mm×210mm
印　　张	14.75
字　　数	405 千
版　　次	2002 年10月第 1 版
印　　次	2002 年10月第 1 次
印　　数	1—4 000
定　　价	20.00 元

内容简介

本书系统地介绍了线性代数与解析几何的基本理论和方法，特别注意代数与几何的结合与联系. 在提供几何背景的基础上，加强了线性空间及其线性变换的教学，并把它们作为核心内容放到书中较前位置来讲授，让读者尽早接触公理化定义与方法，为学习现代数学打下基础. 本书共分 9 章：向量的运算·平面与直线、方阵的行列式·线性方程组、矩阵及其运算、线性空间、线性变换、欧几里得空间、常见曲面、二次型、抽象代数基本概念介绍. 其中第 9 章介绍群、环、域的基本概念，是选学内容. 本书每章之后都有小结，并配有一定数量的习题，其中含有填空选择题.

本书可作为高等院校各非数学专业的教材及教学参考书，也可供自学者及有关人员参考.

前　言

近年来，由于众多学科和科学技术的迅速发展，特别是由于计算机的普遍使用，使得线性代数得到日益广泛的应用．线性代数的重要性在于它考虑了一类简单的数学模型，而大量的理论及应用问题，可以通过“线性化”变成线性代数的问题．作为基础训练，熟练掌握线性代数的理论与方法是十分必要的．与微积分一样，线性代数已是大学数学教育中一门主要的基础课程．

在以往的非数学专业的数学教学中，线性代数一般安排在微积分课程之后，因而在学习线性代数时，学生已经有了一定程度的大学数学的训练；但是从教学实践中看，学生从学习微积分转到学习线性代数，仍然感到比较困难．究其原因，一方面是因为线性代数中所研讨的 n 维向量、矩阵、线性空间、线性变换及其思维方式，与学生在前面课程中已经熟悉的微积分的内容及其思维方式差别很大；另一方面是因为，先入为主的微积分教学和训练所形成的思维定势很难在学时数相对较少的线性代数课程中及时得到扭转，这更增加了学生学习的困难．因此，不少院校已尝试把线性代数和微积分作为大学数学入门课程同时开设，以克服学生学习的困难．同步开设线性代数与微积分这两门课程还有以下考虑：在21世纪，代数、几何、微积分的相互渗透与相互结合会更加密切，因此，要使学生从大学一年级开始就逐步培养把代数与几何、微积分联系起来的能力．另外，提前开设线性代数课程，也为高等数学课程中多元微积分内容的更新、线性微分方程组内容的引入提供了可能．

线性代数实际上产生于解析几何，线性代数的许多基本概念和方法都有很强的几何背景，从几何角度来学习线性代数比较容易理解，其效果比从代数角度来学习更好．因此，将本来就有密切联系的线性代数与解析几何统一为一门课程既利于教学，也利于读者融会贯通．这种作法也为数学家陈省身所提倡，这更增强了我们尽快进行这种尝试的信

心.

本书是编者在天津大学进行多年教学实践和改革探索的基础上编写的,其基本内容符合《工科数学课程教学基本要求》,并适当地做了一些改革的尝试.其目的是希望学生通过这门课程的学习,打下一个良好的数学基础,提高数学素质以及分析问题、解决问题的能力.

所谓线性代数学,就是或者直接研究线性空间的几何问题,或者将线性空间的一些几何问题化为矩阵问题.因此,线性空间理论和矩阵理论实际上是相辅相成的.基于这一认识,我们仍以矩阵为主线,以矩阵的运算和各种等价关系(如相抵、相似、相合、正交相似)为重点,讲授一些基本的计算技巧和处理方法;另一方面,我们加强了线性空间和线性变换的教学,并把它们作为核心内容放在书中较前的位置来讲授,让读者尽早接触公理化定义和方法.由于它们比较抽象,初学者往往不能很快地适应并掌握它们,只有通过反复运用,才能逐渐熟练.读者一旦掌握其中的要领,对今后学习现代数学新知识是大有裨益的.

代数学的研究对象是各种代数系统及其相互关系.代数学在数学与其他学科(如理论物理、计算机科学、通信理论、系统工程等)中的影响与应用日益扩大,它的一些观点和方法也为越来越多的人所掌握和运用.而线性代数只是代数学中一个较初等的分支,它研究一类较简单的代数系统——线性空间及其线性变换.我们采用现代数学的观点来阐述线性代数的理论是想让读者最终能较好和较深入地掌握线性代数的内容,为以后学习现代数学新知识打好基础.

本书虽然比较崇尚理性思维的培养,但起点并不高,尽量注意与中学数学内容的衔接,时刻想到该书是一本大学数学的入门教材.其理论的阐述、概念的引入力求符合人们的认识规律.我们采用由具体事物抽象出一般概念,再从一般概念回到具体事物去的辩证观点.既注重立论的准确和证明的严谨,也注重讲清想法和思路.在不需要增加较多新知识的前提下,多介绍一些应用,多举一些实例.

数学家华罗庚生前曾多次教导青年学生,要真正打好基础,必须经过“由薄到厚”和“由厚到薄”的过程.“由薄到厚”是学习、接受的过程,“由厚到薄”是消化、提炼的过程.遵照华先生的教导,在每章结束之后,

我们作了一个小结,归纳其中的要点和解题的思考方法,希望对读者的学习和复习有所帮助.另外也想引导读者,注意培养自己作小结的习惯和能力.读者可以根据自己的学习体会,试着写出自己的小结.

各章末都配有适量的习题,其中一部分是近年来的考研试题.学数学的最好方法是“做数学”.希望读者通过这些习题的练习,巩固和掌握所学基本理论和方法.

本书是在天津大学同名讲义的基础上修改而成的.使用本教材所需学时大约为70,可根据实际情况来取舍打“*”的内容.天津大学数学系的张颖、崔石花两位年轻教师在校阅和使用本讲义的过程中提出了许多宝贵意见.在编写和出版本书的过程中一直得到天津大学教务处、理学院、数学系的大力支持,在此一并表示感谢.

由于编写时间仓促,加之编者水平有限,书中不当和错误之处一定不少,恳请同行和读者批评指正.

编　者

2002年5月

符 号 说 明

$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{P}$	数域(通常指 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$)
$\mathbf{R}^n$	实 n 维(列)向量空间
$\mathbf{C}^n$	复 n 维(列)向量空间
$\mathbf{P}^n$	(域 $\mathbf{P}$ 上)分量取自 $\mathbf{P}$ 的 n 维(列)向量空间
$\mathbf{R}^{m\times n}$	实 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{C}^{m\times n}$	复 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{P}^{m\times n}$	元素取自 $\mathbf{P}$ 的 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{0}$	零向量或线性空间的零元素
$\boldsymbol{O}$	零矩阵或零变换
$\boldsymbol{E}_n$	n 阶单位矩阵
D_n	n 阶行列式
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$ 或 $\det \boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ 或 $r(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\operatorname{tr} \boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$\widetilde{\boldsymbol{A}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^*$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\overline{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 的各元素取复共轭的矩阵
$\boldsymbol{E}_{ij}$	第 i 行 j 列元素为 1,其余元素为 0 的矩阵
$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$	以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为对角元的对角矩阵
$\boldsymbol{\varepsilon}_i$	第 i 个单位坐标向量,即第 i 个分量为 1,其余分量为 0 的向量

$\lvert \boldsymbol{\alpha} \rvert$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度
$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积
$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角
$\mathbf{R}[x]_n$	次数不超过 n 的一元实系数多项式的集合
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$W_1 \cap W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的交
$W_1 + W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的和
I	单位变换(或恒等变换)
$\sigma(V)$或 $\mathrm{im}\ \sigma$	线性变换 σ 的像集(或像空间)
$\sigma^{-1}(V)$或 $\ker \sigma$	线性变换 σ 的核
$\det \sigma$	线性变换 σ 的行列式
$\mathrm{rank}\ \sigma$	线性变换 σ 的秩
$\mathrm{tr}(\sigma)$	线性变换 σ 的迹
$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$	由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间
$L(V)$	线性空间 V 上所有线性变换的集合
$V_{\lambda_0}(\sigma)$	线性变换 σ 的属于 λ_0 的特征子空间
$W_{\lambda_0}(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征子空间
$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵(或等价)
$\boldsymbol{A} \backsim \boldsymbol{B}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似
$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同(或相合)
$V \cong V'$	线性空间 V 与 V' 同构
$W^{\perp}$	子空间 W 的正交补
$A \Rightarrow B$	若 A 成立,则 B 成立;即 A 是 B 的充分条件;也即,B 是 A 的必要条件
$A \Leftrightarrow B$	A 是 B 的充分必要条件;即 A 成立当且仅当 B 成立;也即,A 等价于 B
$\cdots$	省略号,表示未写出或不便一一写出的类似元素

目　录

第 1 章　向量的运算·平面与直线

本章,我们以中学所学欧几里得几何学的知识为基础,以向量为出发点,把空间的结构改用向量运算来表达,把空间的基本性质用一套简便好用的运算律来描述.又通过建立坐标系,使空间中的向量和点都可以用有序实数组(称其为坐标)来表示.这样既可以利用向量的运算来研究图形的性质,也可以利用代数方程来表示图形并研究图形的性质.解析几何就是要把几何学的研讨从大体上是定性的描述提升到定量的表达,实现空间结构和空间性质的代数化、数量化.而向量及其运算律则构成一种具有丰富几何内涵的新型代数系统.这种代数系统既是解析几何的基础,也是线性代数的"发祥地".

在这一章里,我们要介绍数域与向量的概念、向量的线性运算和两种乘法运算以及它们的运算规律,并建立空间坐标系,再以此为工具讨论空间的平面和直线.

1.1　数域

我们知道,数是数学的一个最基本的概念,一切计算最后都归结为数的代数运算.数的概念经历了一个长期的发展过程.从逻辑上讲,数的扩充是从自然数集 $\mathbf{N}$ 到整数集 $\mathbf{Z}$,然后是有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$,即

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}.$$

数的扩充与数的运算有关,其中加、减、乘、除四种运算是最基本的代数运算,它们有许多好用的运算律.概括地说,代数学的基本思想就是设法有效地运用运算律去谋求各种类型代数问题的通用解法,即以通性求通解.这些通性正是有理数、实数、复数的全体所共有的.具有这些通性的集合对于以后一些问题的讨论是重要的.为此,我们引入一个