海军工程大学研究生系列教学用书

应用泛函分析

YINGYONG
FANHAN
FENXI

王公宝 李卫军 何汉林 编著

湖北科学技术出版社

应用泛函分析

●湖北科学技术出版社

王公宝 李卫军 何汉林 编著

YINGYONG
FANHAN
FENXI

应用泛函分析　　© 王公宝　李卫军　何汉林　编著

责任编辑：刘　虹　　封面设计：王　梅

出版发行：湖北科学技术出版社　　电话：86782508
地　　址：武汉市武昌黄鹂路 75 号　　邮编：430077

印　　刷：湖北科学技术出版社黄冈印刷厂　　邮编：438000

850mm × 1168mm　32 开　10.5 印张　253 千字
2000 年 9 月第 1 版　　2000 年 9 月第 1 次印刷

印数：0 001-1 000
ISBN 7-5352-2511-X / G · 616　　定价：29.00 元

序

可以毫不夸张地说,泛函分析是改革开放以来我国高等教育中发展最快的学科之一,各个工科院校纷纷开设这门课程就是一个明证,这是在此以前不可能也根本做不到的。这一方面是和教育与科技的总体发展相适应的,另一方面也说明一个深刻的事实,泛函分析的思想与方法正在越来越强烈地渗透到从理科到工科、从工程到社会的各个学科中去。

泛函分析是20世纪初产生和发展起来的一门新兴数学学科,它的出现首先是分析数学内部发展的需要。当时数学分析的严密化已经完成,数学中不同的学科分支得到发展,数学本身已积累了较多的素材,通过分析和对比人们发现某些分支之间有许多共通之处,应用统一的方法去处理不同学科中类似的对象和问题成为人们的愿望和要求。另外一方面,在它产生与发展的进程中应用其思想方法解决数学物理和工程技术学科的问题取得成功,为这门学科的进一步发展注入了有生的力量。对于量子力学中一些算子的研究,电力工程中如何处理电脉冲的微积运算问题等等都属于这类问题。以今日我们所处的状况而言,泛函分析与这些学科的紧密联系不仅被保持下来了,而且有逐步发扬光大之势。

“20世纪是泛函分析的世纪。”(F. Browder)正因为泛函分析学科在20世纪经历了从产生到确立再到蓬勃发展的过程,到了今天泛函分析不仅有着巍峨的理论大厦,而且有着众多的理论分支。选取哪些基础内容作为向工科院校本科生或研究生讲解的材料,

是一个很费思量的问题。讲解过多则学员难以掌握，时间也不允许。讲解太少则不敷应用，学员对于整个学科的基础也没有较全面的了解，有时不免有避重就轻、浮光掠影之嫌。

本书作者为适应工科研究生的需要，在内容取舍上颇花费了一些功夫。首先，本书选取了比通常的同类教材更为丰富的内容加以讲解。其次，为了使学生接受这些内容，作者除了在第一章作了必要的实分析知识的铺垫之外，对于某些理论上难度较大的定理还采取部分介绍、部分证明的方法。虽然在别的教材中也曾见到过这种做法，但毕竟具体的剪裁有着很大的创新性。如此又可做到重点突出，既对于这一学科从整体上有所了解，又切切实实掌握对自己专业实用的东西。当然，对于具体的做法各人见仁见智，不会雷同，但毫无疑问这是一种有益的尝试。本书对概念的阐释，举例都能做到循循善诱，书的最后还讲述了有关理论在不动点问题，积分方程和最佳逼近问题等方面的应用，这对于读者是具有启发作用的。

编一本好的教材并不是一件容易的事，它是需要付出许多时间和精力的，有时也还要在实践中不断“磨练”，而它在培养科技人才方面的意义又是不可低估的。愿该书的出版为工科教学做出有益的贡献。

刘培德

2000 年 5 月于珞珈山

目　　录

第一章 实分析基础

本章将简要地介绍数学分析与实变函数的一些基本知识,内容包括集合与映射、实数的完备性、一致连续与一致收敛、勒贝格测度与可测函数、勒贝格积分等,这些基本知识是学习泛函分析的必要准备.

§1 集合与映射

§1.1 集合及其运算

关于集合与集合运算的初步知识,我们在高等数学、线性代数及概率论等课程中已有所了解,这里再回顾一下集合的几种运算.

并集 设 A、B 是两个集合,由 A 的元素与 B 的元素的全体构成的新集合称为 A 与 B 的**并集**,记为 $A\cup B$. 于是有:$x\in A\cup B \Longleftrightarrow x\in A$ 或 $x\in B$.

设 $\{A_\lambda \mid \lambda\in I\}$ 为某一族确定的集合(这里 I 是指标 λ 的一个集合),称由各个 A_λ 的元素的全体构成的新集合为它们的并集,记为 $\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda$. 于是有:$x\in \bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda \Longleftrightarrow \exists\,\lambda_0\in I$ 使 $x\in A_{\lambda_0}$.

交集 设 A、B 是两个集合,由 A、B 的公共元素组成的新集合称为 A 与 B 的**交集**,记为 $A\cap B$. 于是有:$x\in A\cap B\Longleftrightarrow x\in A$ 且 $x\in B$.

定义$\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda$为所有$A_\lambda(\lambda\in I)$的公共元素组成之集. 即有$x\in\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda\Longleftrightarrow\forall\lambda\in I$有$x\in A_\lambda$.

定理 1.1 设B是一个集合, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$是一族集合, 则有如下分配律:

(1) $B\cap(\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda)=\bigcup\limits_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda)$;

(2) $B\cup(\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda)=\bigcap\limits_{\lambda\in I}(B\cup A_\lambda)$.

证 (1) 只需证明等式两边的集合互相包含即可. $\forall x\in B\cap(\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda)$, 有$x\in B$, $x\in\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda$, 即$\exists\lambda_0\in I$使$x\in A_{\lambda_0}$, 从而$x\in B\cap A_{\lambda_0}\subset\bigcup\limits_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda)$, 故有

$$B\cap(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda)\subset\bigcup_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda).$$

又$\forall x\in\bigcup\limits_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda)$, 必$\exists\lambda_0\in I$使$x\in B\cap A_{\lambda_0}$, 即有$x\in A_{\lambda_0}\subset\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda$, $x\in B$, 从而$x\in B\cap(\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda)$, 所以

$$\bigcup_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda)\subset B\cap(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda).$$

于是
$$B\cap(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda).$$

(2) 证明留作习题.

差集及余集 设A、B是两个集合, 定义A与B的**差集**$A\setminus B$为属于A而不属于B的元素的全体组成之集. 于是$x\in A\setminus B\Longleftrightarrow x\in A$且$x\notin B$.

若$B\subset A$, 则称差集$A\setminus B$为B关于A的**余(或补)集**. 今后, 所讨论的集合往往都是某个基本集X的子集, 就简单地把差集$X\setminus A$叫做A的**余(或补)集**, 记作A^C, 即$A^C=X\setminus A(A\subset X)$.

显然, $A\setminus\varnothing=A$, $A\setminus A=\varnothing$, $\varnothing\setminus A=\varnothing$, $X^C=\varnothing$, $\varnothing^C=X$, $(A^C)^C=A$, 若$A\subset B$, 则$B^C\subset A^C$.

定理 1.2 设$\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$是一族集合(它们都是$X$的子集), 则有如下 De Morgan 律:

(1) $(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda)^C=\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda^C$;

(2) $(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^C=\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^C$.

证 只证(2),(1)的证明留作习题.

$\forall x\in(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^C$,即 $x\in X$,$x\notin\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda$,于是 $\exists\lambda_0\in I$,$x\notin A_{\lambda_0}$,又 $x\in X$,故 $x\in A_{\lambda_0}^C\subset\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^C$,从而 $(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^C\subset\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^C$. 反之,$\forall x\in\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^C$,则 $\exists\lambda_0\in I$,使 $x\in A_{\lambda_0}^C$,即 $x\in X$,$x\notin A_{\lambda_0}$,而 $\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda\subset A_{\lambda_0}$,故 $x\notin\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda$,于是 $x\in(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^C$,所以 $\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^C\subset(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^C$. 于是 $(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^C=\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^C$.

幂集 设 A 是一集合,由 A 的所有子集(包括空集及 A 本身)所构成的集,称为集合 A 的**幂集**,记作 $P(A)$. 例如若 $A=\{1,2,3\}$,则 A 的幂集为

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

容易知道,n 个元素的集合之幂集有 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$ 个元素. 基于这个事实,往往也把一般集 A 的幂集 $P(A)$ 记作 2^A,即 $P(A)\triangleq 2^A$. 应该注意的是空集 $\varnothing$ 的幂集仅含一个元素 $\varnothing$,即 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$,空集的幂集不再是空集.

笛卡尔积

定义 1.1 由 n 个具有给定次序的元素组成的序列,称为**有序 n 元组**,记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

有序 n 元组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 中第 i 个元素 a_i,称为该有序 n 元组的第 i 个分量. 当 $n=2$ 时又称 (a,b) 为有序对. 两个有序 n 元组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是相等的,当且仅当 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$. 因此 $(1,2)\neq(2,1)$.

定义 1.2 集合 A 与 B 的**笛卡尔**(Descartes)**积**定义为

$$A\times B\triangleq\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

它是有序对(a,b)的集合.

例 1.1 设 $A=\{0,1\}$, $B=\{0,2\}$,则

$$A\times B=\{(0,0),(0,2),(1,0),(1,2)\},$$
$$B\times A=\{(0,0),(0,1),(2,0),(2,1)\},$$

可见 $A\times B\neq B\times A$.

例 1.2 设 A、B 均为实数集$\boldsymbol{R}$,则

$$\boldsymbol{R}^2\triangleq\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}=\{(x,y)\mid x、y\in\boldsymbol{R}\}$$

$$\boldsymbol{R}^n\triangleq\underbrace{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\cdots\times\boldsymbol{R}}_{n个}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

习惯上在讨论几何问题或使用几何的语言描述问题时,把集合的元素叫做**点**.今后我们将使用下列集合而不加解释:

$\boldsymbol{N}$ 为全体正整数的集;

$\boldsymbol{Z}$ 为全体整数的集;

$\boldsymbol{Q}$ 为全体有理数的集;

$\boldsymbol{R}$ 为全体实数的集;

$\boldsymbol{C}$ 为全体复数的集.

§1.2 映射

映射是现代数学中的一个基本概念.把实数集上的函数概念推广到一般的集合上就得到了映射的概念.

定义 1.3 设 A、B 是两个非空集合,f 是一个对应规则,它使每个 $x\in A$,对应惟一的元素 $y\in B$,记为 $y=f(x)$,则称 f 是 A 到 B 的一个**映射**,记作

$$f:A\to B \text{ 或 } A\xrightarrow{f}B.$$

A 叫做映射 f 的**定义域**,记为 $D(f)$,$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$称为映射 f 的**值域**.一般地 $f(A)\subset B$.我们把值域 $f(A)$又记作 $R(f)$,称$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in A\}\subset A\times B$ 为映射 f 的**图形**或**图像**.

当 B 为数域时，称映射 f 为**泛函**.

映射又称为**算子**或**变换**. 两个映射 $f,g:A\to B$ 称为是相等的，若 $\forall a\in A, g(a)=f(a)$，记为 $f=g$.

通常称 $f:x\mapsto x(\forall x\in X)$ 为 X 上的**恒等映射**，记为 I_X. 若 $X\subset Y$，称 $i:a\mapsto a(\forall a\in X)$ 为 X 到 Y 的一个**包含映射**.

例 1.3 设 $C^{(1)}[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上所有具有一阶连续导数的函数的集合，$C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上全体实(复)值连续函数的集合，那么求导运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ 就定义了一个映射 f，即

$$f:C^{(1)}[a,b]\to C[a,b],\ x(t)\mapsto x'(t).$$

例 1.4 定积分 $f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\ (\forall x\in C[a,b])$ 定义了 $C[a,b]$ 上的一个实(或复)泛函.

定义 1.4 设 f 是 A 到 B 的一个映射，若 $f(A)=B$，即对 B 中的每个元 y，都存在 A 中元 x(一个或几个)，使 $f(x)=y$，则称 f 是一个**满射**；若对 $f(A)$ 中的每个元 y，都存在 A 中惟一的元 x，使 $f(x)=y$，或者等价地对于 A 中任意两个不同元 x_1 与 x_2，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是一个**单射**；既是满射，又是单射，也就是说，对于 B 中的每个元 y，都存在 A 中的惟一元 x，使 $f(x)=y$，则称 f 是一个**双射**(或**一一对应，一一映射**).

例 1.3、例 1.4 中的映射均是满射而不是单射.

例 1.5 坐标变换(旋转及平移) $(x,y)\mapsto(x',y')$

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+b \end{cases}\quad(\alpha,a,b\text{ 固定})$$

定义了一个映射 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$，这是双射. 特别地，当 $\alpha=a=b=0$ 时，f 是恒等映射.

设有映射 $f:X\to Y$. 若 $A\subset X$，记 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}\subset Y$，若 $B\subset Y$，记 $f^{-1}(B)=\{x\mid f(x)\in B\}\subset X$. 当 $B=\{b\}$ 时，

$f^{-1}(\{b\})$简记为 $f^{-1}(b)$.

定理 1.3 设 X、Y 为非空集合,$f:X\to Y$,$A\subset X$,$B\subset Y$,$A_\lambda\subset X(\lambda\in I)$,$B_\mu\subset Y(\mu\in T)$,$I$、$T$ 为指标集,则有下面的关系式成立:

(1) $A\subset f^{-1}(f(A))$,当 f 是单射时等式成立;

(2) $f(f^{-1}(B))\subset B$,当 f 是满射时等式成立;

(3) $f(\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda)=\bigcup\limits_{\lambda\in I}f(A_\lambda)$;

(4) $f(\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda)\subset\bigcap\limits_{\lambda\in I}f(A_\lambda)$;

(5) $f^{-1}(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu)=\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$;

(6) $f^{-1}(\bigcap\limits_{\mu\in T}B_\mu)=\bigcap\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$;

(7) $f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$,$B_1,B_2\subset Y$.

证 仅证(1)和(5),其余的留给读者.

(1) 对 $\forall a\in A$,因 $f(a)\in f(A)$,故 $a\in f^{-1}(f(A))$,于是

$$A\subset f^{-1}(f(A)),$$

若 f 是单射,那么对 $\forall x\in f^{-1}(f(A))$,有 $f(x)\in f(A)$,即 $\exists a\in A$,使 $f(x)=f(a)$,因 f 是单射,故 $x=a$,于是 $x\in A$,因此

$$f^{-1}(f(A))\subset A.$$

综上所述有 $A=f^{-1}(f(A))$.

(5) 对 $\forall a\in f^{-1}(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu)$,则 $f(a)\in\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu$,故 $\exists\mu_0\in T$,使 $f(a)\in B_{\mu_0}$,即 $a\in f^{-1}(B_{\mu_0})\subset\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$,因此

$$f^{-1}(\bigcup_{\mu\in T}B_\mu)\subset\bigcup_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu).$$

对 $\forall a\in\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$,则 $\exists\mu_0\in T$,使 $a\in f^{-1}(B_{\mu_0})$,$f(a)\in B_{\mu_0}$,于是 $f(a)\in\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu$,即 $a\in f^{-1}(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu)$,因此又有

$$\bigcup_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)\subset f^{-1}(\bigcup_{\mu\in T}B_\mu),$$

综上所述有 $f^{-1}(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu)=\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$.

定义 1.5 设有映射 $f:X\to Y$, $A\subset X$. 若映射 $\varphi:A\to Y$ 满足对 $\forall a\in A$, 有 $\varphi(a)=f(a)$, 则称 φ 为映射 f 在 A 上的**限制**, 记作 $\varphi=f|_A$.

与定义 1.5 相反的概念是定义 1.6.

定义 1.6 设有映射 $\varphi:A\to B$, 且 $A\subset X$, $B\subset Y$, 若映射 f: $X\to Y$ 满足对 $\forall x\in A$, 有 $f(x)=\varphi(x)$, 则称映射 f 为 φ 从 A 到 X 的一个**延拓**.

譬如, $A\subset B$, 包含映射 $i:A\to B$ 是恒等映射 I_B 在 A 上的限制, 而恒等映射 I_B 可看成是包含映射 $i:A\to B$ 的一个延拓.

类似于复合函数概念, 也可以定义映射的复合.

定义 1.7 设有映射 $f:A\to B$ 及 $g:B\to C$, 由 f,g 确定的 A 到 C 的映射

$$h:a\mapsto g(f(a))\quad(\forall a\in A)$$

叫做映射 f 和 g 的**复合**, 记为 $h=g\circ f$, 即 $h(a)=g(f(a))$ ($\forall a\in A$). 有时将 $g\circ f$ 简记为 gf.

容易验证关于映射的复合满足结合律:

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h).$$

定义 1.8 设有映射 $f:A\to B$, 若存在映射 $g:B\to A$, 使得 $g\circ f=I_A$, $f\circ g=I_B$, 则称 f 是**可逆映射**, g 叫做 f 的**逆映射**.

定理 1.4 设 $f:A\to B$ 是可逆映射, 则其逆映射是惟一的.

证 设 g_1、g_2 均为 f 的逆映射, 则

$$g_i\circ f=I_A,\ f\circ g_i=I_B\quad(i=1,2).$$

故

$$g_1=g_1\circ I_B=g_1\circ(f\circ g_2)=(g_1\circ f)\circ g_2=I_A\circ g_2=g_2.$$

由于可逆映射 f 的逆映射是惟一的, 今后就用符号 f^{-1} 表示 f 的逆映射.

定理 1.5 $f:A\to B$ 是可逆映射的充要条件是 f 是双射.

证 必要性 设 f 是可逆映射,f^{-1} 是 f 的逆映射,$\forall a_1$、$a_2 \in A$ 且 $a_1 \neq a_2$. 因为

$$a_1 = I_A(a_1) = (f^{-1}f)(a_1) = f^{-1}(f(a_1)),$$
$$a_2 = I_A(a_2) = (f^{-1}f)(a_2) = f^{-1}(f(a_2)),$$

故
$$f^{-1}(f(a_1)) \neq f^{-1}(f(a_2)).$$

于是 $f(a_1) \neq f(a_2)$,所以 f 是单射.

$\forall b \in B$,因为 $b = I_B(b) = (f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b))$,即 $\exists f^{-1}(b) \in A$,使 $f(f^{-1}(b)) = b$. 所以 f 是满射.

综上所述 f 是双射.

充分性 设 $f: A \to B$ 是双射,则对 $\forall b \in B$,A 中有惟一元 a 使 $f(a) = b$,定义映射 $g: B \to A$ 为 $g(b) = a$,显然对 $\forall b \in B$,$f \circ g(b) = f(g(b)) = f(a) = b$,故 $f \circ g = I_B$,又对 $\forall a \in A$,$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = a$,故 $g \circ f = I_A$,由可逆映射的定义知 f 是可逆映射,且 g 是 f 的逆映射.

§1.3 可数集与不可数集

在抽象地研究集合的时候,集合中所含元素的多少是一个重要的概念. 有限集与无限集,可数集与不可数集,这些都是数学上常常碰到的概念. 如何判断一个集合所含元素的多少呢? 对有限集而言,要知其元素的个数最直接的方法是把集合中元素一个一个地"数"出来,这等于将集合中各元素按某一方式给它们编号:$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,其中 $i \neq k$ 时,a_i 和 a_k 是不同的元素. 这样就把 A 和自然数列的某一个片断 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 一对一的对应起来,最后对应的一个自然数 n 显然就是 A 中的元素的个数. 有时候,我们并不需要确切地知道两个集合 A 与 B 所含元素的个数,但却要知道它们所含的元素谁多谁少,此时最行之有效的办法是将 A 的元素与 B 的元素对应起来. 为此引入下面的概念.