东北师范大学函授講义

高等代数

下册

方嘉琳 編
張立仁 校閲

吉林人民出版社

高 等 代 数

下 册

方 嘉 琳　編
張 立 仁　校閱

吉林人民出版社

1 9 5 7 · 長春

东北师范大学函投講义 **高等代数** 下册

方嘉琳 編
張立仁 校閱

吉林人民出版社出版 （長春市斯大林大街） 吉林省书刊出版业营业許可証出字第1号

長春新生企业公司印刷 新华書店吉林省分店发行

开本：850×1168 1/32 印張：6 3/4 字数：190千字 印数：7,500册

1957年11月第1版 1957年11月第1版第1次印刷

統一書号：13091·13 定价(8)：0.80元

第二篇　多項式理論初步

第五章　基本概念

§ 19. 代数运算

由于数学的发展，为了滿足各种技术及自然科学的需要，討論的对象就不能只限于数的范圍里，計算的方法也不能只限于普通的加、減、乘、除。譬如討論的对象可以是力、平面上的点、置換、未定元 x 的实系数多項式、函数、以及矩陣等等。由于这样扩大討論范圍，就使許多初看起来好象和代数沒有关联的問題，也得到了解决。数学的应用范圍就得到了很大的扩張。

在第一章里，我們已經看到了数环和数体，現在我們要將这些概念扩張到任意对象上去。首先我們用集合这一术語表示我們所討論的合乎某种条件的对象全体，并且常以 $M,N,\cdots\cdots$ 表示之。对象是沒有限制的，可以是任何物件。

例如整数的全体是一个集合，直綫上点的全体是一个集合，数体 P 上的 n 阶方陣的全体是一个集合，等等。

一个对象对于某一个集合 M 来說，可能在其中也可能不在其中。但不可能又在其中又不在其中。若 a 为 M 中的一个对象，则以

$$a\in M$$

表示之。常称为 a 屬于 M 或 M 含有 a。若 a 不在 M 中，则以

$$a\overline{\in} M$$

表示之。常称为 a 不屬于 M 或 M 不含有 a。而我們所观察的对象称为元素。

例如：M 是整数集，则

$$5\in M,\ 而\frac{2}{3}\overline{\in} M.$$

$P^{(n)}$ 为数体 P 上 n 維向量集合．則

$$(a_1,\cdots\cdots,a_n)\in P^{(n)},\quad (\text{其中 } a_j\in P)$$

而 n 級置換

$$\begin{pmatrix} i_1,\cdots, & i_n \\ j_1,\cdots, & j_n \end{pmatrix} \overline{\in} P^{(n)}.$$

不含任何元素的集合称为空集．例如綫性方程組

$$3x+2y=1$$

$$6x+4y=3$$

的解集合就是空集．

設 M，N 是兩个集合，当且仅当* M 的元素都是 N 的元素时，称 M 为 N 的子集，以

$$M\subseteq N$$

表示之．此时 N 亦称为 M 的包集．这时若 N 中最少有一个元素不在 M 中，則称 M 为 N 的眞子集，而称 N 为 M 的眞包集．以

$$M\subset N$$

表示之．当且仅当 M 的元素都是 N 的元素而且 N 的元素也都是 M 的元素时，称 M 与 N 相等．以

$$M=N$$

表示之．設 S，M，N 为三个集合，当且仅当 S 的元素不在 M 中就在 N 中，而且 M，N 的元素亦皆在 S 中时称 S 为 M 与 N 的并集，以

$$S=M\cup N$$

表示之．P，M，N 为三个集合，当且仅当 P 的元素旣在 M 中又在 N 中，而且 M，N 公有的元素皆在 P 中时，称 P 为 M 与 N 的交集，以

$$P=M\cap N$$

表示之．

註* 子集的意义是：若 M 的元素都是 N 的元素則称 M 为 N 的子集，否則 M 不为 N 的子集．这兩句話合为一句話前面用"当且仅当"的字样．

有关集合的概念，我們不做深入的探討，只介紹这几个术語和記号．以下我們將在集合中展开代数問題的討論．

在数环中曾經談过加法和乘法，这个加法和乘法，都是在数的中間进行．由于我們所討論的对象可以是任何物件，因此就必須先明确运算的一般概念．而这个概念，也必須和数的加法、乘法以及我們在初等数学或物理学中学过的未定元 x 的实系数多項式間或力間的运算概念相符合．为此我們引入下列定义．

定义1： 在一个非空集合 M 中，規定一个法則，使 M 中任意一对有次序的元素 a，b，根据規定的法則，在 M 內有且仅有一个元素 c 与之对应．这时，我們將这一法則叫做 M 內的代数运算．而 c 称为 a 与 b 的对应元．

因为代数中研究的重点，并不是具体对象的本身，而是在于那些对象上的所謂代数运算的一种关系．代数的主要問題就是研究代数运算的性質．

代数运算常用普通乘法所使用的記号代表．a，b 的对应元为 c 常以

$$c=ab$$

表示之．將 c 叫做 a 和 b 的乘积．也有时用加法符号代表代数运算，則以

$$c=a+b$$

表示之．將 c 叫做 a 与 b 的和．当然也可以应用另外的名称和符号．

在定义中所謂一对有次序的元素 a，b 是指出 a 与 b 和 b 与 a 是次序不同的兩对元素．依照所規定的对应法則，它們所对应的元素不一定是相同的．特别的，有下列定义．

定义2： M 內代数运算若对于 M 內任二元素 a，b 永远有

$$ab=ba$$

时，則称此代数运算滿足交換律．

今在集合 M 內确定一个代数运算，那么 M 內任意三个元素 a，b，c 的乘积

$$abc$$

表示什么意思？显然只根据代数运算的定义它是沒有意义的。但是我們可以規定它的意义。今規定

$$abc=(ab)c.$$

即 a，b，c 三个元素的乘积等于 a，b 的乘积和 c 的乘积。但它是否与 a 和 b，c 乘积的乘积一致呢？显然这是不一定的。即等式

$$(ab)c=a(bc)$$

是不一定成立的。特别的，我們有下列定义。

定义 3: M 內的一个代数运算，对于 M 內任意三个元素 a，b，c，若

$$(ab)c=a(bc).$$

則称此代数运算滿足結合律。

显然这个概念和数集中运算的結合律是一致的。它就意味着 3 个元素的乘积可以任意加括号。只若因子的順序不变，不論那兩个先相乘都得到相同的結果。

現在我們来观察几个例子。

例 1. 数的加法及乘法都是确定在整数集內的代数运算，并且都滿足交換律和結合律。

数的減法也是确定在整数集內的代数运算。但是不滿足交換律和結合律。

例 2. 数的除法不是确定在整数集內的代数运算，因为任意二数之商不一定还是整数。

例 3. n 阶方陣的乘法，是在数体 P 上 n 阶方陣的集合內确定的代数运算。这个运算不滿足交換律，但是滿足結合律。

例 4. 在数体 P 上 n 阶方陣的集合 M 內，重新确定一种运算。設 A 及 B 为 M 內任意兩个元素

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots\cdots b_{nn} \end{pmatrix}$$

其和为

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots\cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots\cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix},$$

这也是确定于 M 内的代数运算，通常称之为加法。显然这种加法是满足交换律和結合律的。

例 5. 設 a 为任一正整数，在 a 的一切非負整数冪的集合中，数的乘法是代数运算，也满足結合律和交换律。

上面几个例子都是大家所熟悉的，而且那些集合也都是无限个元素構成的，再举几个有限个元素的例子。

例 6. 在 a，b，c 的集合 M 内，規定

$$\begin{aligned} &aa=b, && ab=c, && ac=a, \\ &ba=a, && bb=c, && bc=a, \\ &ca=a, && cb=c, && cc=b, \end{aligned}$$

显然这个对应关系也是 M 内的代数运算。这个对应关系常以下表表出：

$\cdot$	a	b	c
a	b	c	a
b	a	c	a
c	a	c	b

这个表称为乘法表。其規則是豎綫左側的数乘以横綫上側的数，其乘积写在其交差点处。

这个代数运算不满足交换律如 $ab=c$ 而 $ba=a$。也不满足結合律如 $a(aa)=c$ 而 $(aa)a=a$。

例 7. 在 a，b 的集合 M 内，規定乘法

·	a	b
a	c	b
b	b	c

它不是 M 内的代数运算，因 $c \overline{\in} M$。

例 8. 在 a，b，c 的集合 M 内，規定乘法

·	a	b	c
a	a	c	b
b	c	a	a
c	b	a	a

显然这个乘法表确定一个代数运算。它滿足交換律，因为 $ab=ba=c$，$ac=ca=b$，$bc=cb=a$ 任二元素皆可換。但它不滿足結合律，如 $(aa)b=c$ 而 $a(ab)=b$。

例 9. 在 a，b 的集合 M 內規定乘法

·	a	b
a	a	b
b	b	a

显然也确定一个代数运算，它滿足交換律，因 $ab=ba=b$。也滿足結合律，因在三个元素的乘积中，若有一个或三个因子是 b，則其积为 b。沒有或有兩个因子是 b，則其积为 a。与括号的添加是无关系的。

例 10. 在数体 P 上 n 維向量的集合中，向量的加法是代数运算。也滿足交換律和結合律。

例 11. 置換的乘法。

在四級置換集合中，任取兩个四級置換，如

$$S_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

我們考察先施置換 S_1，再施置換 S_2，会产生怎样的結果。由于置換 S_1 使 1 对应 2，而由 S_2 使 2 对应 1。所以繼續施行 S_1 和 S_2 时则 1 对应 1。由于置換 S_1 使 2 对应 4，而 S_2 使 4 对应 2，所以繼續施行 S_1 和 S_2 时，则 2 对应 2。同理由于繼續施行 S_1 和 S_2 使 3 对应 4，使 4 对应 3。綜合上述，由于繼續施行 S_1 和 S_2 的結果，我們得出一个完全确定的新的置換

$$S_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}.$$

S_3 叫做 S_1 和 S_2 的乘积。且用下列記号表示:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$$

一般的，所謂兩个 n 級置換 S_1 和 S_2 的积，是指繼續施行 n 級置換 S_1 和 S_2 所得到的 n 級置換。显然这个乘法是确定在 n 級置換集合中的一个代数运算。

由上例我們又可以看到

$$S_2S_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$$

与 S_3 不相等，即这种乘法是不滿足交換律的。但是我們可以看到它滿足結合律。

事实上，如果 S_1 使某数 α 对应 β，S_2 使 β 对应 γ，S_3 使 γ 对应 δ，则 S_1S_2 使 α 对应 γ，繼之施以 S_3 使 γ 对应 δ。即施行 $(S_1S_2)S_3$ 的結果，使 α 对应 δ。

另一方面由于 S_1 使 α 对应 β，而 S_2S_3 使 β 对应 δ。故施行 $S_1(S_2S_3)$ 的結果，使 α 对应 δ。換句話說 $(S_1S_2)S_3$ 与 $S_1(S_2S_3)$ 的結果是一致的，故 $(S_1S_2)S_3=S_1(S_2S_3)$。

由上面这些例子中看到，交換律和結合律对于我們所确定的代数运算来說，是不一定成立的。

其次討論多个元素的乘积，关于 n 个元素的乘积可以归納定义如下：

$$a_1a_2a_3=(a_1a_2)a_3,$$
$$a_1a_2a_3a_4=(a_1a_2a_3)a_4,$$

一般的

$$a_1a_2\cdots\cdots a_n=(a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1})a_n.$$

即三个元素的乘积，等于前兩个元素的乘积，然后再乘以第三个元素。四个元素的乘积，等于前三个元素的乘积，然后再乘以第四个元素等等。如此类推。

当 M 中代数运算滿足結合律时，三个元素的乘积是可以任意加括号的，这个事实对于任意多个因子也都是成立的。

定理 1: 若 M 中代数运算滿足結合律，則任意 n 个元素的乘积，只若因子的順序不变，与括号的任意添加无关。即

$$(a_1a_2\cdots\cdots a_p)(a_{p+1}\cdots\cdots a_q)\cdots\cdots(a_{r+1}\cdots\cdots a_s)(a_{s+1}\cdots\cdots a_n)$$
$$=a_1\cdots\cdots a_n .$$

証明: 我們用归納法来証明这一結果。当 $n=3$ 时由定理的条件知道它是成立的。現在假設这个結果对于所有小于 n 的正整数 k 都是成立的，来証明对于正整数 n 也成立。　　　　(1)

(1) 式的左端是任意添加了括号，由于多个元素的乘法定义，它是与

$$[(a_1\cdots\cdots a_p)\cdots\cdots(a_{r+1}\cdots\cdots a_s)](a_{s+1}\cdots\cdots a_n) \qquad (2)$$

相等的，在 (2) 中方括号內因子个数少于 n，故根据归納法假設可以把 (2) 式写成

$$(a_1\cdots\cdots a_s)(a_{s+1}\cdots\cdots a_n) . \qquad (3)$$

再由多个因子乘法的定义

$$a_{s+1}\cdots\cdots a_n=(a_{s+1}\cdots\cdots a_{n-1})a_n.$$

(3) 式可以改写为

$$(a_1\cdots\cdots a_s)[(a_{s+1}\cdots\cdots a_{n-1})a_n].$$

再根据結合律，得

$$[(a_1\cdots\cdots a_s)(a_{s+1}\cdots\cdots a_{n-1})]a_n. \qquad (4)$$

（4）式方括号內因子数目仍少于 n，所以根据归納法假設得

$$(a_1\cdots\cdots a_{n-1})a_n,$$

再根据多个因子乘法的定义，最后这个乘积等于

$$a_1a_2\cdots\cdots a_n,$$

由此得出等式（1）的右端。这就証明了不論 n 为任何正整数，n 个因子的乘积，只若因子的順序不变，可以任意添加括号，其結果恒相等。

这个性質也显示了結合律的重要性。在一个确定代数运算的集合中，当結合律成立时，只若不改变因子的次序就可以任意的計算几个元素的乘积，这是非常方便的。

⊗再来討論交換律。交換律就是二元素乘积，其次序可以变动。那么对于 n 个元素的乘积来說，次序是否可以任意变动呢？虽然代数运算适合交換律，一般来說 n 个元素的乘积次序是不可以变动的。例如上列例 8 是滿足交換律的。观察 aba，依乘法定义得

$$aba=(ab)a=ca=b.$$

但將次序变动为 aab 时，

$$aab=(aa)b=ab=c.$$

显然

$$aab\neq aba.$$

这就說明了虽然 M 內代数运算滿足交換律，但多个元素的乘法，次序也是不能任意排列的。

当代数运算同时滿足交換律和結合律时却有下列結果。

定理 2: 若 M 內代数运算滿足交換律及結合律，則任意 n 个元素的乘积与因子的排列次序无关。

証明: 用归納法。当因子的个数为 2 时，由定理的条件知是对的。假設因子的个数小于 n 时定理成立。我們来証明因子的个数是 n 时定理也成立。即若 b_1，b_2，$\cdots\cdots$，b_n 为 a_1，a_2，$\cdots\cdots$，a_n 的任意一个排列，則

$$b_1b_2\cdots\cdots b_n=a_1a_2\cdots\cdots a_n.$$

在 $b_1,\cdots\cdots,b_n$ 中必有一个 a_n，不防設 $b_i=a_n$。則

註: ⊗——⊗符号間的內容可以略去不看。

$$b_1b_2\cdots\cdots b_i\cdots\cdots b_n=b_1b_2\cdots\cdots b_{i-1}a_nb_{i+1}\cdots\cdots b_n.$$

由定理1知它等于

$$(b_1b_2\cdots\cdots b_{i-1})[a_n(b_{i+1}\cdots\cdots b_n)].$$

由交换律和結合律知它等于

$$[(b_1\cdots\cdots b_{i-1})(b_{i+1}\cdots\cdots b_n)]a_n.$$

但 $b_1\cdots\cdots$, b_{i-1}, b_{i+1}, $\cdots\cdots$, b_n 为 $a_1\cdots\cdots a_{n-1}$ 的一个排列。由归納法假設知

$$(b_1\cdots\cdots b_{i-1})(b_{i+1}\cdots\cdots b_n)=a_1\cdots\cdots a_{n-1}$$

故

$$b_1b_2\cdots\cdots b_n=(a_1\cdots\cdots a_{n-1})a_n=a_1a_2\cdots\cdots a_n.$$

定理得証。⊗

在一个集合中，有时可确定若干个代数运算，如例1中整数的加法和乘法，例3例4中方陣的加法和乘法等等。本書只限于討論具有一个及兩个代数运算的集合。对于具有兩个代数运算的集合而言，分配律也很重要，它是兩个代数运算間的一种关系。

定义4: 集合 M 中，有确定的加法及乘法兩种代数运算，若对于 M 中任意三个元素 a, b, c 恒有

$$a(b+c)=ab+ac$$

时，則称这兩个代数运算滿足左分配律。若恒有

$$(b+c)a=ba+ca$$

时，則称这兩个代数运算滿足右分配律。若兩边同时成立，則簡称之为它們滿足分配律。

显然整数集的加法和乘法是滿足分配律的。数体 P 上 n 阶方陣集合中的加法和乘法也是滿足分配律的。

实际上，对于任意三个 n 阶方陣

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots\cdots b_{nn} \end{pmatrix}$$

及

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots\cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\cdots\cdots c_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1} & c_{n2}\cdots\cdots c_{nn} \end{pmatrix}$$

我們来証明

$$(A+B)C=AC+BC.$$

在方陣 $(A+B)C$ 的第 i 行第 j 列元素为 $A+B$ 的第 i 行与 C 的第 j 列对应元素的乘积之和。即

$$\sum_{s=1}^{n}(a_{is}+b_{is})c_{sj}.$$

在方陣 AC 的第 i 行第 j 列的元素为 A 的第 i 行与 C 的第 j 列对应元素乘积之和，即

$$\sum_{s=1}^{n}a_{is}c_{sj}.$$

同理 BC 的第 i 行第 j 列的元素为

$$\sum_{s=1}^{n}b_{is}c_{sj}.$$

則 $AC+BC$ 的第 i 行第 j 列的元素为

$$\sum_{s=1}^{n}a_{is}c_{sj}+\sum_{s=1}^{n}b_{is}c_{sj}.$$

因为在数体 P 中元素間滿足分配律，故

$$\sum_{s=1}^{n}(a_{is}+b_{is})c_{sj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}c_{sj}+\sum_{s=1}^{n}b_{is}c_{sj}.$$

即方陣 $(A+B)C$ 中第 i 行第 j 列的元素与方陣 $AC+BC$ 中第 i 行第 j 列的元素相同。而 i 及 j 是表示 1，2，……，n 中的任意数，故所有对应元素都是相同的。因此

$$(A+B)C=AC+BC.$$

同理推得

$$C(A+B)=CA+CB.$$

故集合 R 中加法与乘法間的分配律成立。

⊗但在 a，b，c 的集合 M 内，以例 6 的乘法表所确定的代数运算为乘法，以例 8 的乘法表所确定的代数运算为加法，这两个代数运算間就不满足分配律。如

$$b(c+b)=b\cdot a=a,$$

$$bc+bb=a+c=b,$$

$$\therefore \quad b(c+b)\neq bc+bb.$$

又

$$(b+a)c=cc=b,$$

$$bc+ac=a+a=a,$$

$$\therefore \quad (b+a)c\neq bc+ac.$$

这説明左右分配律都不满足。

若乘法交换律成立，则

$$a(b+c)=(b+c)a.$$

即左分配律与右分配律一致，不必有左右的区别。但若乘法交换律不成立，即使左（右）分配律成立，右（左）分配律却不一定成立。

如在 a，b，c 的集合 M 内，規定乘法为

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

显然它不满足交换律，再規定加法为