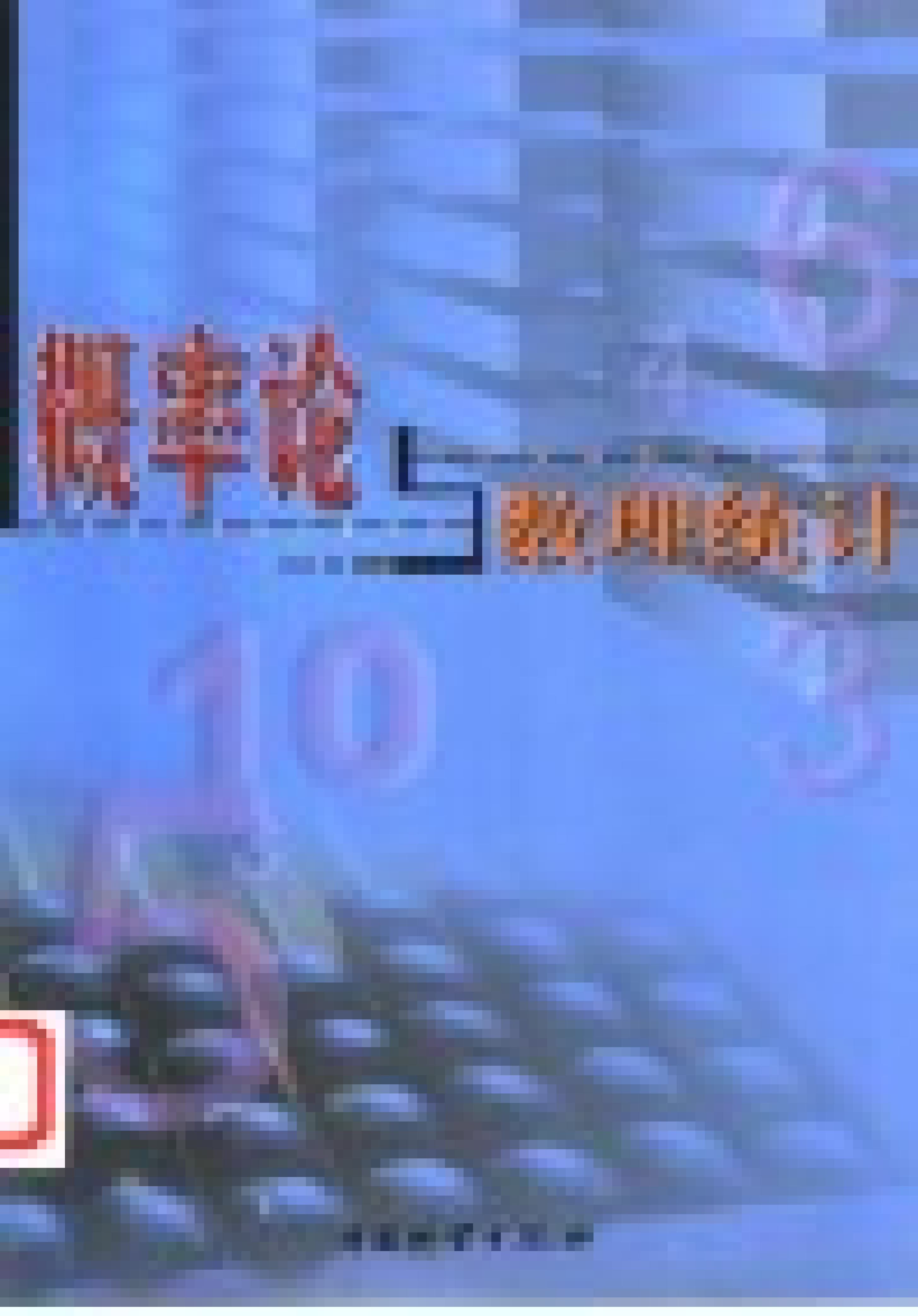
概率论与数理统计

许冰 等 编著

中国物资出版社



概率论与数理统计

许　冰　华就昆　王炳兴
陈钰芬　王淑茜　吴柏林
编　著

中国物资出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率与数理统计/许冰等编著. -北京:中国物资出版社,2002.7

ISBN 7-5047-1883-1

Ⅰ.概... Ⅱ.许... Ⅲ①概率论②数理统计 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 049526 号

责任编辑:沈兴龙　　责任校对:顾　勇

责任印刷:沈兴龙　　责任设计:于　是

中国物资出版社出版发行

网址:http://www.clph.com.cn

社址:北京市西城区月坛北街 25 号

电话:(010)68392746　邮编:100834

全国新华书店经销

保定市印刷厂印刷

开本:787×1092mm　1/16　印张:13.625　字数:207 千字

2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-5047-1883-1/G·0433

印数:5200 册

定价:29.00 元

目　　录

第一章　概率计算

未来因多变而不确定,才使世界充满神奇而多彩!

概率论,作为对不确定性的一种度量,将展示其科学而有效的方法和工具,用以揭开未来不确定性的面纱,协和人与自然,实现人类享受自然所追求.

第一节　随机事件的集合描写

明天股票价格指数涨还是跌? 下周末到园丁公园游玩, 天气晴好还是阴雨? 女影星 A 与大导演 B 恋情何年结束? 抽烟是否会增加致癌的机会?

上面这些自然与人交融的不确定现象,虽然现在还未知发生哪种结果,但是,随着时间的推移,其出现的结果是确定可知的,如:股价涨或跌,天气好或坏.这种事先未知,事后可知的现象,称为**随机现象**,事后出现的确定结果称为**随机事件**,事后所有可能出现的结果,组成一个**样本空间**.

为了随机事件与样本空间定义的确定性,和便于数学的定量分析,现将它们作抽象的集合描写:

用 $\Omega=\{\omega_t: t\in T\}$ 表示**样本空间**,则**随机事件** A,可表示为 $\boldsymbol{A\subset\Omega}$.

这里,具体的随机事件与抽象的集合知识相互交融,其结果是:随机事件得到抽象描写,而抽象集合得到具体表达.随机事件的具体表达赋予集合生动的现实意义,而其抽象描写也使随机事件的数学度量成为可能.

由此,有必要描述,事件与集合交融的一些基本知识.

一、事件间的关系

(一) 包含与相等

包含:事件 A 发生必然导致 B 发生 $\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow\{\omega\in A\Rightarrow\omega\in B\}$

相等：$A=B \Leftrightarrow A \subset B$ 与 $A \supset B$ 与同时成立.

不可能事件和必然事件分别用：Φ 和 Ω 表示.

对于任意事件 A，有 $\Phi \subset A \subset \Omega$.

（二）对立与互不相容

A 的对立 $\equiv \overline{A}=\{\omega \in \Omega$ 而且 $\omega \notin A\}$

这时 $A \cap \overline{A}=\Phi, A \cup \overline{A}=\Omega$.

A 与 B 互不相容事件 $\Leftrightarrow A \cap B=\Phi$.

直觉地，两事件对立，一定互不相容，反之未必. 因为 **A 与 B 互不相容**，不必要求 $A \cup B=\Omega$.

二、事件间的运算——并与交

并：事件 A 与 B 至少发生一个 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A \cup B=\{\omega \in A}$ **或者** $\boldsymbol{\omega \in B\}}$

交：事件 A 与 B 同时发生 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A \cap B=\{\omega \in A}$ **而且** $\boldsymbol{\omega \in B\} \equiv AB}$

【例 1.1】 跳伞运动员朝地面上跳伞，降落地有三个同心圆，半径分别为 1、2、3 米，用 A_i 记降落在半径为 i 的圆内，$i=1,2,3$. 试说明下列事件的含义：

(1) $\overline{A}_3$，(2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$，(3) $A_1 A_2 A_3$，(4) $A_1 A_2$

解 (1)降落在半径为 3 米的圆外.

(2)降落在半径为 3 米的圆内，

(3)降落在半径为 1 米的圆内，

(4)降落在半径为 1 米和 2 米的两个圆周围成的圆环内.

【例 1.2】 试用集合的运算符号，表示下列随机事件：

(1) A 发生，而 B 不发生，

(2) A、B、C 至少发生一个，

(3) A、B、C 最多发生一个 ，

(4) A、B、C 中恰好发生两个.

解 (1)$A\bar{B}$，(2)$A\cup B\cup C$,(3)$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\cup A\bar{B}\,\bar{C}\cup\bar{A}\,B\bar{C}\cup\bar{A}\,\bar{B}\,C$,
(4)$AB\bar{C}\cup\bar{A}\,BC\cup A\bar{B}\,C$

【例 1.3】 在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的.在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电.记 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的温度按递增顺序排列的温度值，试用 t_0 和 $T_{(i)}$，$l\leqslant i\leqslant 4$ 表示出“电炉断电”事件 E

解 $E=\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$

第二节 随机事件的概率度量

随机事件能否用数学来度量?

首先，有下面两个统计实例.

【例 1.4】 在众多英文小说中，从表面上，小说内容，作家个性，使 26 个英文字符出现是随机的，但是，人们通过大量的实证研究，发现 26 个英文字符，在众多小说中，出现的频率是稳定的.

字母	空格	E	T	O	A	N	I	R	S
频率	0.2	0.105	0.072	0.0654	0.063	0.059	0.055	0.054	0.052
字母	H	D	L	C	F	U	M	P	Y
频率	0.047	0.035	0.029	0.023	0.0225	0.0225	0.021	0.0175	0.012
字母	W	G	B	V	K	X	J	Q	Z
频率	0.012	0.011	0.0105	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001

数据引自 L. Brillouin, Science and Information Theory, New York, 1956

【例 1.5】 尽管每个小孩在出生前不知是男还是女，但是，人类的延续一直能均衡男女出生比率.这如同历史上许多科学家，重复抛掷一个均匀硬币的试验一致.

试验者	抛掷次数 n	正面数 m	频率 m/n
蒲丰	4 040	2 048	0.5069
皮尔逊	12 000	6 019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005

数据引自,格涅坚科,概率论教程,高等教育出版社.

随机现象产生的事件,其特点是

事先——未知将产生何种结果——随机性,

事后——其结果是完全知道的——确定性.

事先的随机性,不再是微积分中,确定性函数 $y=f(x)$所度量范围.

事后的确定性,使事先度量存在可能性,至少可以猜测哪种结果将产生的可能性较大.

实例 1.4 和 1.5 表明随机事件可能做出度量,但是,如何决定度量值?

通常称随机事件的定量值为:概率值,其方法主要有

(一)统计定义

一个随机实验重复 n 次,其中 A 事件共发生了f_A 次,则 A 事件发生的概率定义为

$$P(A)=f_A/n$$

叫做事件发生的频率或称**经验概率**.

这种经验概率计算方式需要大量的试验数据.因此,也称为**客观概率**.例如欲调查民众对于城市东扩规划的看法.通过对市民的电话民意调查.令 A 表示赞成城市东扩规划.在 100 位随访者中,有 65 位赞成,因此 $P(A)=0.65$.若样本增加到 1 000 位时,发现有 714 位赞成.此时 $P(A)=0.714$.以频率作为随机事件的概率度量,其缺点为,随机实验往往无法在环境不变下长期进行,不同的 n,概率值存在差异性.

上面的例子 1.4 和 1.5 就是这种方法确定的概率值.

（二）主观定义

一事件发生的概率，常由人们对此事件的经验或心里的感觉而决定．如特殊疾病，无法根据其样本计算频率．只有通过当事人或专业人士的先验认定，预测其可能性，即事件发生的大约概率．又如 A 先生第一次参加百米径赛，依其以往的经验和认知，自我评估约有八成的夺冠，因此

$$P(A\text{ 先生胜})=0.8$$

即为一种认定的**主观概率**．

但是，经验或感觉不仅会随空间和时间的变化而改变，而且在同一时空内也会因人而异．因此先验或主观认定出来的概率，会颇多争议．

（三）古典定义

若以 $\#(\Omega)$ 表示在样本空间 Ω 内，发生所有事件的计数（如个数、长度、面积和体积等），$\#(A)$ 表示属于 A 事件的计数．则 A 事件发生的概率定义为

$$P(A)=\#(A)/\#(\Omega) \tag{1.1}$$

概率的统计定义需要大量的数据信息作为基础，而主观定义由于随意性较大，难于使众多人信服．本书将基本上用古典（或称理论）定义．

例如　一个小孩出生是男孩的概率，历史上有许多统计学家做过大量的实证工作，得到结论是

$$P(A)=22/43$$

这是一个典型的统计定义概率值．

现在，用概率古典定义，应该是，由合理的假设：

$$P(A)=P(\overline{A}),P(A)+P(\overline{A})=1$$

得到理论推导：

$$P(A)=1/2$$

这可以算是一个典型的古典（理论）定义概率值．

【例 1.6】　以投掷一颗骰子两次为例，所有可能的结果为 $\Omega=\{(1,1),(1,2),\ldots,(5,6),(6,6)\}$，此时

$\#(\Omega)=36$．若 A 表示点数和为 4 的事件集合，即 $A=\{(1,3),$

$(3,1),(2,2)\}$.

则 A 事件发生的概率为

$$P(A)=\#(A)/\#(\Omega)=3/36=1/12.$$

1777 年法国科学家蒲丰提出了下列著名问题.

【例 1.7】 平面上画着一些平行线,它们之间的距离都等于,向此平面任投一长度为的针,试求此针与任一平行线相交的概率.

解 以 x 表示针的中点到最近的一条平行线的距离. φ 表示针与平行线的交角.则有

$$\Omega=\{(x,\varphi):0\leqslant x\leqslant a/2,0\leqslant\varphi\leqslant\pi\},$$
$$A=\{(x,\varphi):0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant x\leqslant(l/2)\sin\varphi\}$$

于是

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi}{\frac{1}{2}\alpha\pi}=\frac{2l}{\pi\alpha}$$

由于最后的答案与 π 有关,因此不少人想利用它来计算 π 的数值,其方法是投针次 N,计算针与线相交的次数 n,再以频率值 n/N 作为概率 P 之值代入上式,求得

$$\pi=\frac{2lN}{an}$$

下表是一些试验的相关资料.

实验者	年份	针长	投掷次数	相交次数	实验值
Smith	1855	0. 6	3 204	1 218	3.1554
Fox	1884	1. 0.75	1 030	489	3.1595
Lazzerini	1901	2. 0.83	3 408	1 808	3.1415929

数据引自:Gridgeman. N. T. Geometric probability and the number π. Scripta Mathematica,25(1960),183—195.

值得注意的是这里采用的方法:建立概率模型,与感兴趣的量——如 π——相关,然后设计适当的随机实验,并通过这个实验的结果来确定这个量.

现在,利用计算机,按照上述思想建立起的Monte-Carlo方法,已有广泛的

应用.

计算理论概率的方法也叫做古典方法,此种方法依靠抽象的推理与逻辑分析,而不必进行实际的试验.

概率的古典定义,从公式(1.1)可见,至少要求:

1) 样本空间整体的可计算性:. $\#\Omega = \#\{\omega_t : t \in T\} < \infty$.——分母计量时的存在性.

2) 样本空间内基本事件间发生有相等的可能性. $P\{\omega_t\} = P\{\omega_s\}$, $t, s \in T$.——分子计量时的可加性.

【例 1.8】 两朋友准备外出旅游,用抛掷一个硬币来确定旅游城市,考虑到女士优先权. 若连续出现两次正面,由男士确定旅游城市,否则,由女士确定旅游城市. 试问由女士确定旅游城市的事件的概率有多大?

解 (1) $\Omega = \{AA, A\bar{A}, \bar{A}\}$, $B = \{A\bar{A}, \bar{A}\}$, $P(B') = 2/3$

(2) $\Omega' = \{AA, A\bar{A}, \bar{A}A, \bar{A}\bar{A}\}$, $B = \{\bar{A}A, A\bar{A}, \bar{A}\bar{A}\}$, $P(B) = 3/4$

解(1)还是解(2)对?

此例子关联事件间的等可能性问题:通常假设 $P(\bar{A}) = 1/2 = P(A)$为合理,即有 $P(A\bar{A}) = 1/4 \neq 1/2 = P(\bar{A})$,因此,解(1)不行.但是,现实的问题是,如果第一次抛掷出现 $\bar{A}$,旅游城市已由女士决定,不必再抛掷第二次.由此可见,现实的问题,能成为概率的解,还须构造解(2)的 Ω'.

【例 1.9】 考虑一个有两个小孩的家庭,问至少有一个女孩 B 的概率有多大?

用 A 表示女孩,则 $\Omega = \{AA, A\bar{A}, \bar{A}A, \bar{A}\bar{A}\}$, $B = \{AA, A\bar{A}, \bar{A}A\}$,

因此 $P(B) = \#(B)/\#(\Omega) = 3/4$.

但是,细致的读者会对上面的解答提出疑义.样本空间应该是:两个女孩或者两个男孩或者一男一女,因为至少有一个女孩的问题 B,并没有要求区分老大或老二哪一个是女孩.所以,

$$\Omega = \{AA, A\bar{A}, \bar{A}\bar{A}\}, B = \{AA, A\bar{A}\}, P(B) = \#(B)/\#(\Omega) = 2/3$$

出现两个不同的答案,这是计量所不允许的.但是,就概率古典定义满足条

件而言:样本空间的可计算性和事件间的等可能性,似乎看不出有明显的问题.况且,答案 2/3 的样本空间构造似乎更符合实际问题.到底哪个答案合理?

因此,为使概率计算的分析推演过程,合乎人类的共同认知与思考水准,必须给定一些概率公理,以便合理进行理论与实务的演算.因为在认知一致的架构上,概率的表示与应用才有意义.

1933 年,前苏联科尔莫戈罗夫院士提出了概率公理化结构,使概率论成为一门严谨的科学理论.

二、概率公理

在样本空间 Ω 中,不是所有的 $A\subset\Omega$,都有惟一确定的概率值 $P(A)$,因此事先可以做一个限制,建立概率空间(Ω,F,P),使得事件 $A\in F$,有惟一确定的概率值 $P(A)$,

利用通常集合并$\cap$和交$\cup$的记号,

$\mathscr{F}=\{A:A\subset\Omega\}$限制为满足下述条件的 σ 域:

(a)$\Omega\in\mathscr{F}$

(b) 若 $A\in\mathscr{F}$, 则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$

(c) 若 $A_n\in\mathscr{F}, n=1,2,\cdots$,则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$

P 限制为满足以下条件的概率公理:

(1) 非负性:$P(A)\geqslant 0$

(2) 规范性:$P(\Omega)=1$

(3) 可加性: $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i).A_i\cap A_j=\Phi, i\neq j$,

由概率公理,可以发现,例 1.9 中关于 2/3 的答案,考虑到等可能性 $P(A)=P(\overline{A})=1/2$ 为合理假设时,其规范性公理不能满足.因为 $P(\Omega)=3/4\neq 1$.

【例 1.10】 甲抛掷硬币 $n+1$ 次,已抛掷 n 次,求甲抛掷出的正面次数多于已抛掷出正面次数的概率.

解 记A = 甲抛掷出的正面次数多于已抛掷出正面次数,

B = 甲抛掷出的反面次数多于已抛掷出反面次数.

由正反面的对称性,有

$$P(A)=P(B)$$

注意到甲抛掷的次数比已抛掷次数多一次，有

$$P(\overline{A})=P(B)$$

所以有

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(A)=1/2$$

借助于计数测度知识,其中包括排列组合知识,实现概率计算,这是直接按概率定义计算概率值的方法.但是,有时事件本身比较复杂,排列组合计算也繁琐,难于直接计算,这时可以采用分解复杂事件为简单事件,通过加法和乘法公式,来计算,或者建立相应的概率模型.

下面,通过由概率公理导出的公式来计算概率值.

第三节　加法公式与乘法公式

一、加法公式——互不相容

加法公式 假设 A 与 B 为样本空间 Ω 中的两事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \tag{1.2}$$

集合之间的并是不同于数之间的加,元素重复的只能算一次,例如:$A=\{1,2.3\}$,$B=\{1,3,4\}$,则 $A\cup B=\{1,2.3,4\}$,而 $A\cup B\neq\{1,1,2.3,3,4\}$.因此,在(1.2)式右边 $P(A)$计算中包含 $P(A\cap B)$,$P(B)$的计算中又包含 $P(A\cap B)$,这样 $P(A\cap B)$就多算了一次,只有减去一次 $P(A\cap B)$,才能和(1.2)式左右两边计算相等.

这是(1.2)式成立的直观解释.

下面通过概率公理给出严格的证明.

证　因 $A\cup B=A\cup B\overline{A}$,$A\cap B\overline{A}\subset A\cap\overline{A}=\Phi$,由可加性公理

$$P\{A\cup B\}=P(A\cup B\overline{A})=P(A)+P(B\overline{A}) \tag{1.3}$$

又 $B=BA\cup B\overline{A}$,$BA\cap B\overline{A}$,$BA\cap B\overline{A}\subset A\cap\overline{A}=\Phi$,由可加性公理

$$P(B)=P(BA\cup B\overline{A})=P(BA)+P(B\overline{A}) \tag{1.4}$$

结合(1.3)式和(1.4)式,即得到(1.2)式.

特别地,若 A 与 B 两事件互不相容,即 $A\cap B=\phi$ 空集,则加法公式(1.2)

式即为可加性公理,因为此时有 $P(A\cap B)=0$.

【例 1.11】 花园新村成年人有 20% 人订阅都市快报,16% 订阅钱江晚报,8% 的人都市与钱江两报都订阅.在花园新村成年人中随机选一人,问此人至少订阅都市与钱江两报之一的概率多大?

解 记 A = 订阅都市快报,B = 钱江晚报,则问题的解是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.2+0.16-0.08=0.28$$

用数学归纳法,推广加法公式(1.2)式,可以得到

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}p(\bigcap_{i=1}^{n}A_i) \tag{1.5}$$

加法公式的应用,需要 $P(A\cap B)$的数值,即便是作如下的变换

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\cap\overline{B}) \tag{1.6}$$

仍然需要计算 $P(\overline{A}\cap\overline{B})$的值.

【例 1.12】 花园新村成年人中 20% 会抽烟,30% 会吃酒,而在会抽烟人中 80% 会吃酒,在花园新村成年人中随机选一人,问此人同时会抽烟与吃酒的概率多大?

解 记 A = 会抽烟,B = 会吃酒,问题中给出条件

会抽烟人中 80% 会吃酒,这是一个对事件 B 附加了信息条件 A,称为条件 A 下,B 发生的概率,记为 $P(B|A)=0.8$.

$$P(B|A)\neq P(B)=0.3$$

如同在定义了可加性公理后,推导出加法定理一样,下面将引入条件概率的定义,并借此导出乘法公式.

二、乘法公式——事件的独立性

样本空间 Ω 中的两事件 A 与 B,$P(A)>0$,在 A 事件已发生的条件下 B 事件发生的概率称为**条件概率**,以 $P(B|A)$表示,定义为

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1.7}$$

由此得到

乘法公式

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) \tag{1.8}$$

由两事件交的对称性：$A \cap B = B \cap A$，自然有

$$P(B \cap A) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B) \tag{1.9}$$

当然，这里须要条件：$P(A) > 0$ 和 $P(B) > 0$，以便(1.7)式中分母的存在.

特别地，条件 A 的信息无助于求 B 事件发生的概率，即

$$P(B \mid A) = P(B) \tag{1.10}$$

则称事件 A 与 B 统计独立，简称独立.此时有

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{1.11}$$

不独立的两事件称为相依.

(1.8) 式很容易推广到：

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.12}$$

当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$ 时.

事实上.由乘法公式

$$上式右边 = P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)}{P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)} = 上式左边.$$

由(1.11) 式定义可以得到：

A 与 B 独立等价于 $\overline{A}$ 与 B 独立.

证　$\Rightarrow$：由加法公式、乘法公式，A 与 B 独立，得到

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B)\{1 - P(A)\} = P(B)P(\overline{A}) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$：由加法公式、乘法公式，$\overline{A}$ 与 B 独立，得到

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) - P(\overline{A}B) = P(B) - P(\overline{A})P(B) \\ &= P(B)\{1 - P(\overline{A})\} = P(B)P(A) \end{aligned}$$

考虑到对称性：$AB = BA$，同样可得到，A 与 B 独立等价于 A 与 $\overline{B}$ 独立，进而从