拓扑对偶定理

第一部分 闭集

П. С. 亚历山大罗夫著

科 学 出 版 社

拓撲對偶定理

第一部分 閉集

П. С. 亞歷山大羅夫 著
江　嘉　禾 譯

科 學 出 版 社
1959

П. С. АЛЕКСАНДРОВ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

內容簡介

本書是對歐氏空間中的閉集系統地闡述它的拓撲對偶理論.

爲了不致因缺乏拓撲學的基本知識而難於理解本書的內容，作者通過大量的篇幅——第一章到第三章——來介紹了拓撲學的一些基本知識. 從第四章開始才涉及這個專題的內容. 因此，本書不僅是拓撲學方面的一本專著,同時也是拓撲學的一本入門書.

本書論證謹嚴,敍述簡潔而清楚，尤其是一切從基本概念入手,即使對於不諳拓撲學而具有一定數學修養的讀者說來,也不難領會本書的內容.

序　言

在這個著作裏系統地闡述了對位於歐氏空間的集的拓撲對偶定理．第一部分是關於閉集的情形（邦特列雅金（Понтрягин）∇型與Δ型對偶定理）．第二部分是研究非閉集的一般情形；其中闡述了我在 1947 年所證明的一般對偶定理以及最新的西特尼可夫（Ситников）對偶定理，它算是在已知意義下徹底解決了對位於歐氏空間的集的拓撲對偶問題．

組合拓撲學的一切輔助定理都在第一部分的第一章中得到闡明．因此，本專論的第一部分同時也就是組合拓撲學的一般導引．

П. 亞歷山大羅夫

（1955 年 5 月 11 日於波列含沃-卡瑪羅夫卡）

目　錄

第一章

組合拓樸學的基本概念

§1. 複　形

1. 單形複形．三角剖分．多面體　單形複形乃是單形的集合．如果不預先作相反的聲明，我們總假定單形是開單形，即認爲單形的界點不屬於單形；單形的閉包就叫做閉單形．

在這個著作的第一部分中，我們只考慮有限複形，即要假定：複形只包含有限個單形．極爲重要的是完備性條件：任何單形，作爲所給複形的元素，它的任意面也是這個複形的元素*)．如果給了一個有限完備複形，其元素是歐氏空間或球形空間的開單形，它們兩兩不具有公共點，那麽這個複形就叫做(有限)三角剖分．容易看出，對應的閉單形，即是三角剖分中開單形的閉包，滿足下面的條件：這些閉單形中的任何兩個或者互不相交，或者是以這些單形的公共閉面相交．

在已知複形 K 中，全體單形的集論和就叫做這個複形的體，並以 $\tilde{K}$ 表之．成爲三角剖分之體的集叫做多面體；三角剖分 K 乃是多面體 $\tilde{K}$ 的一個三角剖分．

2. 抽象複形；納複　在任何單形複形中，單形一一對應着自己的架**)．這一情况就導致抽象單形複形的概念；我們設想任何元素的有限集 X，其元素約定叫做頂點，並且假設其中確定了某

---

*) 如果不預先作相反的聲明，我們總是假定，我們所考慮的複形滿足這個條件；然而我們却常常在完備複形中考慮不滿足完備性條件的子複形(特別是所謂開子複形——見後)．

對於每個非完備複形 K 而言，我們定義它的組合閉包 $[K]$ 是由所有的單形 $T \in K$ 以及這些單形的一切面組成的複形，$[K]$ 顯然是完備複形．

**) 單形的全體頂點之集叫做它的架．

些非空子集，稱之爲架或抽象單形.

這些架的集合就叫做抽象複形. 完備性條件變成下面的形狀：架的任何非空子集是架. 架的維數就是它的元素的個數減一；複形的維數乃是屬於它的一切架的維數中之最大者.

抽象複形的最重要的例子就是一組有限多個集的納複. 設 α 是這樣的組，它的每個元素 e 都對應着某個頂點（把集 e 本身當作頂點是最簡單不過的了，然而有時却不大合適）；某些頂點構成"架"，如果與之相應的集合具有非空的交. 這樣得到的抽象複形叫做所給集組的納複. 納複的概念是這整個著作裏的基本概念.

3. 星形 複形 K 中以單形 T 作爲自己的眞面或假面（單形的假面是指這單形本身*)）的一切單形之集叫做單形 T 的組合星形.

複形 K 的子複形 K_0 叫做 K 中的開子複形，如果對任意的單形 $T\in K_0$ 而言，這個單形的整個星形也含於 K_0 中. 三角剖分的開子複形是非完備複形的最重要的例子.

複形 K 的子複形 K_0 叫做閉子複形，如果它的補集 $K\setminus K_0$ 是開子複形；若 K 是完備複形，則它的任何閉子複形也是完備複形.

單形 T 在複形 K 中的星形表爲 $O_K T$ 或簡寫做 OT.

完備單形複形的星形 $O_K T_1, \cdots, O_K T_r$ 具有非空的交，在而且僅在單形 $T_1, \cdots, T_r$ 是複形 K 的某個單形的面，即是單形 $T_1, \cdots, T_r$ 的架之和是某個單形 $T\in K$ 的架（這個單形 T 就叫做單形 $T_1, \cdots, T_r$ 的組合和）. 在這種情形下

$$O_K T_1 \frown \cdots \frown O_K T_r = O_K T.$$

要證明這個等式只須機械地檢查屬於這等式一端的每個單形也必定屬於另一端.

特別是，複形 K 的頂點 $e_0, \cdots, e_r$ 的星形 $O_K e_0, \cdots, O_K e_r$ 具有非

*) 單形複形 K 的全體架按照包含關係構成半有序集；這種順序自然搬到複形的單形上. 因此對複形 K 的兩個單形 T 和 T' 而言，如果 T 是單形 T' 的（可能是假的）面，則我們記作 $T'\geqslant T$；$T'>T$ 表示 T 是單形 T' 的眞面. 單形 $T\in K$ 的組合星形就由複形 K 的所有單形 $T'\geqslant T$ 組成. 顯然，一般說來，星形是非完備複形.

空的交,在而且僅在這些頂點構成複形K的某個單形的架. 換言之,複形K乃是其頂點星形組的納複.

若K是三角剖分,在大多數情形下我們不考慮複形K的組合星形,而考慮它們的體,即星形所含單形的和;我們稱之爲開星形並表爲$O_K T$;這種稱謂是由於複形K的開星形乃是多面體$\tilde{K}$的開集.不僅此,若K_0是三角剖分K的子複形,那麼它的體$\tilde{K}_0$是多面體$\tilde{K}$的開集,在而且僅在K_0是複形K的開子複形.

因爲複形K的任何一些子複形之體的交是這些複形之交的體,所以上面所證明的組合星形的交集性質對開星形也成立. 特別,複形K的頂點$e_0, \cdots, e_r$的開星形$o_K e_0, \cdots, o_K e_r$具有非空的交,在而且僅在這些頂點構成複形K的某個單形的架.

三角剖分K的頂點的開星形叫做這個三角剖分的主星形,並且我們有定理:

三角剖分K乃是其主星形組的納複.

4. 單形映像 命單形複形X的每個頂點e對應於單形複形X'的某個頂點$e' = f(e)$,並且滿足條件:若複形X的某些頂點$e_0, \cdots, e_r$構成X中某個單形的架,那麼頂點$f(e_0), \cdots, f(e_r)$,其中可能有些是相同的,就構成複形X'的某個單形的架("映像不破壞架"):

由於這個條件,對應於複形X的每個架,從而對應於每個單形$T = |e_0, \cdots, e_r|$,就得到複形X'的某個單形$T' = fT$於是我們得到映複形X入複形X'的映像;這樣定義的映像就叫做(映複形X入複形X'的)單形映像.

如果映複形X成複形X'的單形映像是一一的,則它叫做同構映像(同構),而可以用同構映像相互映成的複形X和X'就叫做彼此同構的. 容易證明:任何有限n維單形複形X同構於某個位於R^{2n+1}中的三角剖分.

事實上,設$a_1, \cdots, a_s$是複形X的全體頂點. 我們在R^{2n+1}中取出任何一些佔有最廣位置的點$b_1, \cdots, b_s$,即其中任何$2n+2$個點都不同時位於空間R^{2n+1}的$2n$維平面上.在而且僅在$a_{i_0}, \cdots, a_{i_r}$

構成複形 X 的架時，我們就在點 $b_{i_0}, \cdots, b_{i_r}$ 上張上一個 R^{2n+1} 中的單形．如此得到的單形 $|b_{i_0}, \cdots, b_{i_r}|$ 兩兩不具有公共點；事實上，我們考慮單形

$$|b_{i_0}, \cdots, b_{i_h}| \text{和} |b_{j_0}, \cdots, b_{j_k}|,$$

它們對應着複形 X 的單形

$$|a_{i_0}, \cdots, a_{i_h}| \text{和} |a_{j_0}, \cdots, a_{j_k}|.$$

因為複形 X 的維數等於 n，所以 $h \leqslant n$ 與 $k \leqslant n$，因此單形 $|b_{i_0}, \cdots, b_{i_h}|$ 與 $|b_{j_0}, \cdots, b_{j_k}|$ 的架的和是由不多於 $(h+1)+(k+1) \leqslant 2n+2$ 個點組成，從而是空間 R^{2n+1} 的某個單形的架，這個單形以 $|b_{i_0}, \cdots, b_{i_h}|$ 和 $|b_{j_0}, \cdots, b_{j_k}|$ 作為自己的面；這樣一來，這些單形就不具有公共點了．

總之，我們在 R^{2n+1} 中造出的這些單形就構成一個三角剖分，它顯然同構於複形 X．

設 f 是映複形 X 成複形 X' 的單形映像．這時複形 X 的每個單形 T 的頂點被映成複形 X' 的某個單形 T' 的頂點；而這時也就定義了映單形 T 成單形 T' 的仿射映像；容易看出，在複形 X 的每個單形上所定義的仿射映像總起來就構成映多面體 $\tilde{X}$ 入多面體 $\tilde{X}'$ 的一個連續（"局部仿射"）映像，我們把它表為 $\tilde{f}$*)．

於是，映三角剖分 X 入三角剖分 X' 的單形映像 f 產生映多面體 $\tilde{X}$ 入多面體 $\tilde{X}'$ 的連續映像 $\tilde{f}$；映像 $\tilde{f}$ 也叫做單形映像．

5. 三角剖分的從屬及其重分　按定義三角剖分 K' 從屬於三角剖分 K，如果三角剖分 K' 的每個單形 T' 都被包含在三角剖分 K 的某個（顯然是唯一的）單形 T 內；單形 T 叫做單形 T' 在三角剖分 K 中的負荷．如果 K' 從屬於 K，那麼顯然 $\tilde{K}' \subseteq \tilde{K}$；如果 $\tilde{K}' = \tilde{K}$，即若每個單形 $T \in K$ 都是它所包含着的三角剖分 K' 的單形之和，則 K' 叫做三角剖分 K 的重分**)．

---

*) 常常也簡寫做 f．

**) 為了以後的需要，必須注意，對於一個非完備複形 K 而言，它的重分定義為它的組合閉包 $[K]$ 的某個重分的子集，它是由這個重分的所有位於複形 K 的單形上的單形組成．

6. 重心重分 重心重分乃是所給三角剖分 K 的最簡單的重分之一，它無疑又是最重要的重分. 我們在每個單形 $T\in K$ 中取一個點，把它叫做單形 T 的中心；通常是把單形 T 的重心取作這個點. 以複形 K 的單形的中心作爲頂點的三角剖分 K_1 叫做複形 K 的重心重分(因此複形 K_1 的頂點與複形 K 的單形成一一對應)；複形 K_1 的某些頂點按定義構成這個複形的架，如果它們能够寫成這樣的順序：

$$e_0, e_1, \cdots, e_r,$$

使得與之相應的單形 $T_i\in K$ 構成降序列

$$T_0 > T_1 > \cdots > T_r, \tag{1}$$

其意義是：T_1 是單形 T_0 的面，T_2 是單形 T_1 的面等等.

證明三角剖分 K_1 從屬於 K 並不困難. 證明 K_1 是複形 K 的重分却基於複形上的錐形這一重要概念. 複形 X 上具有頂點 o 的錐形乃是一個抽象(非完備的)複形 oX，它的單形是頂點 o 本身以及一切形如 $|oe_1\cdots e_r|$ 的單形，其中 $|e_1\cdots e_r|$ 是 X 的單形. 三角剖分 K 的重心重分 K_1 可以利用歸納法來作出：複形 K 的零維單形(即是它的頂點)原封不動地屬於複形 K_1. 我們假設，複形 K 的一切維數 $\leqslant r$ 的單形的重心重分已經定義；若 $T^{r+1}\in K$ 是一個 $r+1$ 維單形，那麽只須在單形 T^{r+1} 的已經重分了的面上造出以單形 T^{r+1} 的中心作爲頂點的錐形時，就得到它的重心重分；這個錐形立即以單形 T^{r+1} 的重分的形式來實現.

註 舉例可見，三角剖分 K 的重心重分具有極爲直觀的幾何意義；但複形 K_1 也可以極便利地了解爲抽象複形；可以取複形 K 的單形作爲這個抽象複形的頂點，這時單形 $T_i\in K$ 的降序(1)就作爲複形 K_1 的架. 這樣一來，定義複形 K 的重心重分的唯一基礎乃是這樣一樁事實：任何複形都以所謂幾何順序關係形成半有序集：$T'>T$ 表示 T 是單形 T' 的眞面.

7. 共軛於三角剖分 K 的星形複形 在三角剖分 K 的重心重分 K_1 的每個單形 $\tau=|e_0\cdots e_r|$ 中，給出了某個自然的頂點順序；這就是複形 K 的那些單形的降序

$$T_0 > T_1 > \cdots > T_r, \tag{1}$$

它們的中心乃是單形 τ 的頂點. 因此在任何單形 $\tau \in K_1$ 的頂點之間具有"最大"頂點 e_0, 它對應着序列 (1) 中具有最大維數的單形 T_0, 並且具有"最小"頂點 e_r, 它對應着序列 (1) 中具有最小維數的單形 T_r. 取複形 K_1 中具有同一個最大頂點(設它是單形 T 的中心 e)的一切單形之集, 我們就得到複形 K_1 位於單形 T 上的一切單形之集, 它的構成這個(開)單形的重心重分; 反之, 取複形 K_1 中以給定單形 T 的中心 e 作爲自己的最小頂點的一切單形之集, 就得到複形 K_1 的某個非完備子複形 U, 它叫做共軛於複形 K 的單形 T 的開重心星形. 重心星形 U 的組合閉包 $[U]$ 叫做共軛於複形 K 的單形 T 的閉重心星形*).

完備複形 $[U]\backslash U$ 是開重心星形 U 對它的組合閉包 $[U]$ 的補集, 叫做重心星形 U 的邊緣. 重心星形 U' 包含在重心星形 U 的邊緣中, 在而且僅在共軛於星形 U 的單形 T 是共軛於星形 U' 的單形 T' 的面. 在這種情形下, 重心星形 U' 就叫做重心星形 U 的(眞)面.

重心星形的邊緣完全由它的面形成. 共軛於複形 K 的任何頂點的重心星形都叫做主星形; 這種星形不是任何其他重心星形的面**). 共軛於三角剖分 K 的元素的一切重心星形之集連同半有序關係: $U > U'$, 如果星形 U' 是星形 U 的面(即單形 T 是單形 T' 的面), 就叫做共軛於三角剖分 K 的星形複形 K^*.

三角剖分的重心重分 K_1 以兩種方式分解成兩兩互不相交的複形: 其一, K_1 是複形 K 的(開)單形的重心重分之和; 其二, K_1 是共軛於複形 K 的單形的(開)重心星形之和; 如此, 複形 K^* 的體就是同一個多面體 $\tilde{K}_1 = \tilde{K} = \tilde{K}^*$. 複形 K_1 本身就在不同的意義下成爲複形 K 和複形 K^* 的重分.

爲了以後的需要, 必須注意: 任何單形 $T_i \in K$ 與任何星形

---

*) 開重心星形 U 構成閉星形 $[U]$ 的開子複形.

**) 通常, 複形 K 的單形 T 叫做主單形, 如果它不是同一個複形中任何異於它的單形的面.

$U_j \in K^*$ 的交是由一切這樣的單形 $\tau \in K_1$ 組成，它們以單形 T_i 的中心 e_i 作爲自己的最大頂點，而以星形 U_j 的中心 e_j（即共軛於它的單形 T_j 的中心）作爲自己的最小頂點．由此立刻得出，單形 T_i 與星形 U_j 相交，在而且僅在單形 T_j 是單形 T_i 的面．要使閉單形 $\overline{T}_i$ 與閉星形*) $\overline{U}_j$ 相交，同樣的條件也是必要而充分的．事實上，若 $\overline{T}_i$ 與 $\overline{U}_j$ 相交，則存在這樣的 $T_{i_1} \leqslant T_i, U_{j_1} \leqslant U_j$，使得 T_{i_1} 與 U_{j_1} 相交，而這時 $T_i \geqslant T_{i_1} \geqslant T_{j_1} \geqslant T_j$，即 $T_i \geqslant T_j$．

特別：1. 單形 T_i^r 與共軛於它的星形 U_i 的交僅由單形 T_i^r 與星形 U_i 的公共中心組成，並且閉單形 $\overline{T}_i^r$ 與共軛於複形 K 的異於它的 r 維單形的閉重心星形互不相交．

2. 複形 K 的每個閉單形 $\overline{T}$ 包含在共軛於其頂點的閉重心星形之體的和中，並且與任何不以單形 T 的頂點爲中心的主重心星形都不相交．由此推出，複形 K 乃是其閉的主重心星形組的納複．

8. 複形的連通性 複形叫做連通複形，如果它不能表成它的兩個非空的互不相交的閉子複形之和的形狀．若複形不連通，則它唯一地分解成它的連通區——兩兩互不相交的最大連通子複形，其中每一個都同時成爲所給複形之旣閉又開的子複形．

容易驗證：完備單形複形是連通的，在而且僅在其任意二頂點 e_1 與 e_2 均能以此複形中之“折綫”，即一維單形的有限序列

$$(e_1e_2),(e_2e_3),\cdots,(e_{s-1}e_s)$$

連結起來，其中任何兩個相鄰元素均具有公共頂點．

9. 今後使用複形概念的範圍．假流形 與完備單形複形同時，我們今後也須得考慮它們的開子複形，或者，同樣地，考慮開於其組合閉包的單形複形．與此同時，我們還得考慮共軛於三角剖分（首先是 n 維球面的三角剖分）的星形複形．

可以是非完備的一類極重要的複形便是所謂 n 維組合假流形．

開於其組合閉包的單形複形 K 叫做 n 維（組合）假流形，如果它滿足下面三個條件：

---

*) 這裏違背上面採用的定義而把閉星形 $\overline{U}_i$ 了解爲星形 $[U_i]$ 的體．

1. 複形 K 是勻同的 n 維複形；這就是說，其中不存在維數大於 n 的單形，且其維數小於 n 的每個單形都是某個 n 維單形的面．

2. 複形 K 是強連通複形；這就是說，複形 K 的任意兩個 n 維單形 T_1^n 和 T_s^n 均能以 K 中單形的有限序列

$$T_1^n, T_2^n, \cdots, T_{s-1}^n, T_s^n$$

連結起來，其中每兩個相鄰元素 T_i 與 T_{i+1} 均具有公共的 $n-1$ 維面．

3. 複形 K 的每個 $n-1$ 維單形都是這個複形的兩個而且只是兩個 n 維單形的公共面．

完備假流形通常叫做閉假流形．

註　我們業已把組合假流形定義爲（滿足某些條件的）複形；形容詞"組合"一詞，我們常常略去，着重指出的正是這一情況．

組合假流形的體也叫做（幾何）假流形．

10. 曲多面體　同胚於多面體的任何集合（拓撲空間）叫做曲多面體．若給了多面體 $P=\tilde{K}$，以及給了把它映成曲多面體 Q 的拓撲映像，那麼在這個映像下，多面體 P 的三角剖分 K 就變爲曲多面體 Q 的"曲三角剖分"．關於這點，詳見[1]的第 4 章，§ 6．

§ 2. 組合拓撲學的一些最簡單的代數概念

複形的 Δ 羣和 ∇ 羣（貝蒂羣）

1. 定向　使單形具有定向，或確定其定向，就是說，把它的頂點排成一個確定的順序，並且認爲可以用偶置換把一個變成另一個的兩個順序確定同一個定向．這樣一來，n 維單形的頂點所能具有的順序雖然總共有 $(n+1)!$ 個，然而定向却只有兩個．單形連同其確定的定向總起來就叫做定向單形．我們以 t^n 表示 T^n 的兩個定向中的某一個；這時另一個就表爲 $-t^n$，並且我們常常寫做 $T^n=|t^n|=|-t^n|$．零維定向單形（前面的定義對它喪失作用）簡直就是所給的點（"頂點"），它取兩個係數 $+1$ 或 -1 中的一個．如果定向單形 t^n 以其頂點順序

$$e_0, e_1, \cdots, e_n$$

來給出，則我們寫做

$$t^n = (e_0 e_1 \cdots e_n).$$

於是

$$t^n = \varepsilon(e_{i_0} e_{i_1} \cdots e_{i_n}),$$

其中 ε 乃是置換

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ i_0 & i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

的符號。

若 $t^n = (e_0 \cdots e_n)$ 與 $t'^n = (e'_0 \cdots e'_n)$ 是 R^n 中兩個 n 維定向單形，則存在唯一的把 R^n 映成自己的仿射映像，它把 $e_0, \cdots, e_n$ 分別變成 $e'_0, \cdots, e'_n$；如果這個仿射映像爲正(即具有正的行列式*))，則單形 t^n 與 t'^n 叫做在 R^n 中是同向的。反之它們就叫做反向的。這一定義合理，因爲所給單形 $T^n \subset R^n$ 的頂點的任意偶置換都能以包含着所給單形的空間的正仿射映像來實現，而奇置換則能以負仿射映像來實現。把空間映成自身的仿射映像爲正，如果它能用一個連續畸變變成恆同映像，以及爲負，如果它能用連續畸變變成鏡面映像；因此下述命題成立：

假設在 $n-1$ 維平面 $R^{n-1} \subset R^n$ 中給了一組 n 個無關點 $e_1, \cdots, \cdots, e_n$；此外，假設在 R^n 中給了不在平面 R^{n-1} 上的兩個點 e'_0 與 e''_0。那麼保留點 $e_1, \cdots, e_n$ 不動，而把 e'_0 變成 e''_0 的仿射映像爲正，如果點 e'_0 與 e''_0 位於平面 R^{n-1} 的同一側，並且在相反的情形下就爲負。

從所闡述的理由得出，空間 R^n 的某個 n 維單形 $|t^n|$ 的選定定向確定了同一個空間 R^n 中任何其他單形的與之同向的定向(即是用正仿射映像從所給定向變來的那個定向)。在這種意義下，我們就說，空間 R^n 的某個 n 維單形的定向確定整個空間 R^n 的定向。

2. 關聯係數　假設 t^n 是一個定向單形，t^{n-1} 是它的某個 $n-1$ 維定向面。單形 $|t^n|$ 具有唯一的頂點 e，不成爲面 $|t^{n-1}|$ 的頂

*) 如所周知，仿射映像的行列式的符號與 R^n 中仿射坐標系統的如何選擇無關。關於這點，見[1]的附錄 2．

點(即對立於這個面的頂點). 取面$|t^{n-1}|$的某個頂點順序 $e_1, \cdots, e_n$, 它確定面$|t^{n-1}|$的選定定向 t^{n-1}. 這時, 把頂點 e 置於面 $|t^{n-1}|$ 的所有頂點之前,就得到單形$|t^n|$的全體頂點的確定順序

$$e, e_1, \cdots, e_n,$$

並且這個順序或者確定定向 t^n, 或者確定定向 $-t^n$*). 在第一種情形下,我們就說,定向單形 t^n 與 t^{n-1} 的關聯係數 $(t^n: t^{n-1})$ 等於 $+1$,而在第二種情形下,就說它等於 -1. 換言之,關聯係數 $\varepsilon = (t^n: t^{n-1})$由方程

$$t^n = \varepsilon(et^{n-1})$$

來定義.

顯然,我們有

$$(-t^n: t^{n-1}) = (t^n: -t^{n-1}) = -(t^n: t^{n-1}). \tag{1}$$

其次,命 $t^n = (e_0 \cdots e_n)$與 $t_i^{n-1} = (e_0 \cdots \hat{e}_i \cdots e_n)$, 其中 $\hat{e}_i$ 表示頂點 e_i 被删掉;那麼

$$(t^n: t_i^{n-1}) = (-1)^i,$$

因此,特別有,

$$((e_0e_1e_2 \cdots e_n): (e_1e_2 \cdots e_n)) + \\ + ((e_0e_1e_2 \cdots e_n):(e_0e_2 \cdots e_n)) = 0. \tag{2}$$

現在我們取一個 n 維單形,它的兩個$(n-1)$維面以及這兩個選定的 $n-1$ 維面的公共 $n-2$ 維面. 所有這四個單形取完全任意的定向,我們把它們表為 $t^n, t_0^{n-1}, t_1^{n-1}, t^{n-2}$.

不失一般性,可以假設

$$t^{n-2} = (e_2 \cdots e_n);\ t_0^{n-1} = \pm(e_1e_2 \cdots e_n);\ t_1^{n-1} = \pm(e_0e_2 \cdots e_n).$$

我們來證明:等式

$$(t^n: t_0^{n-1})(t_0^{n-1}: t^{n-2}) + (t^n: t_1^{n-1})(t_1^{n-1}: t^{n-2}) = 0 \tag{3}$$

成立.

不失一般性,我們可以假設定向 t_0^{n-1} 與 t_1^{n-1} 是這樣,使得

---

*) 定向$(ee_1 \cdots e_n) = \pm t^n$ 只依賴於單形 $t^{n-1} = (e_1 \cdots e_n)$的定向,而與確定這個定向的頂點順序 $e_1, \cdots, e_n$ 的如何選擇無關. 事實上,頂點 $e_1, \cdots, e_n$ 的偶置換確定頂點 $e, e_1, \cdots, e_n$ 的偶置換 (因為 e 保留不動). 由於剛才所指出的情形,用(et^{n-1})表示定向單形$(ee_1 \cdots e_n)$是合理的.

$(t_0^{n-1}: t^{n-2}) = +1$, $(t_1^{n-1}: t^{n-2}) = +1$. 事實上，如果最後兩個等式中至少有一個不成立，例如說，$(t_0^{n-1}: t^{n-2}) = -1$，那麼我們就在(3)中把定向 t_0^{n-1} 換成 $-t_0^{n-1}$，而要證明的等式(3)的左端却保持不變.

於是，只須對於 $(t_0^{n-1}: t^{n-2}) = (t_1^{n-1}: t^{n-2}) = +1$ 來證明等式(3). 然而在這種情形下，對於已經選定的記號而言，我們有

$$t_0^{n-1} = (e_1 e_2 \cdots e_n), t_1^{n-1} = (e_0 e_2 \cdots e_n),$$

而要證明的等式(3)就變成已經證明了的等式(2).

現在對兩個定向單形 t^n, t^{n-1} 而言，如果單形 $|t^{n-1}|$ 不是單形 $|t^n|$ 的面，我們總假設 $(t^n: t^{n-1}) = 0$.

對於 $i = 0, 1, \cdots, n$，以 t_i^{n-1} 表示單形 $|t^n|$ 的 $n-1$ 維面的某個完全任意的定向，我們就能把同樣的等式(3)表成

$$\sum_i (t^n: t_i^{n-1})(t_i^{n-1}: t^{n-2}) = 0 \tag{4}$$

的形狀；要知道除了隣接於面 t^{n-2} 的面 t_0^{n-1} 與 t_1^{n-1} 的相應兩項外，這個和式中所有的項都等於零.

若 K 是任意的完備單形複形，$|t^n|$ 是它的某個 n 維單形，而 $|t^{n-2}|$ 是它的某個 $n-2$ 維單形，則對複形 K 的每個 $n-1$ 維單形選取確定的定向 t_i^{n-1} 後，我們仍然有等式(4)，其中和式展佈在複形 K 的所有 $n-1$ 維單形上.

3. 鏈. 算子 Δ. 貝蒂羣 定向單形 t^n 的邊緣 Δt^n 按定義是這樣得到的：只要使單形 t^n 的每個任意定向面 t_i^{n-1} 都以“權”或“係數”的形式附上它的關聯係數 $(t^n: t_i^{n-1})$（在單形 t^n 的邊緣中這個面就具有這個係數）. 換言之，定向單形 t^n 的邊緣 Δt^n 定義爲代數表達式

$$\Delta t^n = \sum_i (t^n: t_i^{n-1})\, t_i^{n-1}. \tag{5}$$

特別，若

$$t^n = (e_0 \cdots e_n), t_i^{n-1} = (e_0 \cdots \hat{e}_i \cdots e_n),$$

則

$$\Delta t^n = \sum (-1)^i t_i^{n-1}.$$