GAODENGDAISHU

普通高等教育“十五”国家级规划教材

高等代数

（第二版）上册

丘维声

高等教育出版社

高等代数

（第二版）

上　册

丘维声

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等代数．上册／丘维声．—2版．—北京：高等教育出版社,2002.7
ISBN 7-04-011235-3

Ⅰ.高... Ⅱ.丘... Ⅲ.高等代数—高等学校—教材 Ⅳ.015

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第043550号

高等代数(第二版) 上册
丘维声

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
		版　　次	1996年6月第1版
开　　本	787×960　1/16		2002年7月第2版
印　　张	15.75	**印　　次**	2002年7月第1次印刷
字　　数	240 000	**定　　价**	15.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

第二版前言

《高等代数(上册、下册)》自 1996 年出版以来，一直作为北京大学数学科学学院高等代数课程的教材，同时也被不少综合大学数学系作为教材. 作者自 1994 年以来，使用此教材(含它的前身讲义)连续给 1994 级至 2001 级共八届学生讲授高等代数课，深受广大学生的欢迎. 北京大学教学评估室和学生教育评估委员会先后对作者讲授的高等代数课进行了 8 次评估，作为评估内容之一，每次都对此教材作了充分肯定. 现在已经进入 21 世纪，作者根据时代的要求，结合这 8 年使用此教材的教学经验，对教材进行修订，使之更完善.

高等代数课程主要讲授线性代数，多项式理论，以及群、环、域的基本概念. 尤以线性代数占的比重大. 线性代数是研究线性空间和线性映射的理论，它的初等部分是研究线性方程组和矩阵理论. 作者在本书的修订过程中，精选了内容，着重阐述最基本的和应用广泛的内容；对于不那么基本，或者应用不那么广泛的内容则略为提及，不展开讲；有的内容则不讲. 对于每一节配备的习题也作了精心挑选.

随着时代的发展，计算机的普及，线性代数和多项式理论的重要性越来越被人们所认识. 教好、学好高等代数课程，关键之一是编写出科学性强又深入浅出的教材. 本书在如何让学生容易理解和掌握高等代数课程的内容上是下了很大功夫的，总是从学生熟悉的具体例子引出抽象的概念，从全书的内容体系直至每一节的内容如何简明易懂地讲授都作了精心推敲. 全书先讲高等代数的具体对象：线性方程组、矩阵、数域 K 上 n 元有序数组的向量空间 K^n 和欧几里空间 $\mathbf{R}^n$、多项式，然后再讲抽象对象：线性空间和线性映射、欧几里得空间和酉空间、双线性函数和正交空间、辛空间(对于正交空间和辛空间只作简单介绍). 本书强调讲道理，因为只有把道理讲清楚了，学生才能学好高等代数. 同时我们认为讲道理不等于形式的逻辑证明. 我们在为什么要引进每一个重要概念上讲清楚了道理，在为什么要学习这些基本内容上讲清楚了道理，在如何证明定理上也讲了道理. 我们不仅强调要讲道理，而且力求把道理讲得简明易懂.

我们认为高等代数课程的教学目标，既要让学生掌握这门课程的基础知识和基本方法，又要培养他们具有数学的思维方式. 只有按照数学的思维方式去学习数学，才能学好数学. 而且学会数学的思维方式，有助于他们把今后肩负的工作做好，从而使他们终身受益. 什么是数学的思维方式？观察客观世界

的现象，抓住其主要特征，抽象出概念或者建立模型；进行探索，通过直觉判断或者归纳推理、类比推理作出猜测；然后进行深入分析和逻辑推理，揭示事物的内在规律，从而使纷繁复杂的现象变得井然有序．这就是数学的思维方式．本书按照数学的思维方式编写每一节的内容，使学生在学习高等代数知识的同时，受到数学思维方式的熏陶，日积月累地培养学生具有数学的思维方式，提高学生的素质．

为了让学生了解高等代数在数学的其它分支以及实际问题中的应用，增强动手能力，本书在每一章的后面都配备了“应用与实验课题”，供学生自己阅读和动手解决．有的应用课题需要使用计算机的数学软件，否则手算太费时间．

本书的每一节都配备了经过精心挑选的适量习题，在书末附有习题解答与提示．

为了帮助学生学好高等代数课，我们还编写了《高等代数学习指导书（上册、下册）》．其内容包括基本理论的精华，如何在理论的指导下分析问题和解决问题，典型例题的解题思路和详细解答，拓宽知识面的阅读材料，经过挑选的丰富多采的习题以及习题的解答和提示．

本书（上册和下册）可作为综合大学、理工科大学和师范院校的数学系、应用数学系和概率统计系的高等代数课程的教材．上册供第一学期使用，下册供第二学期使用．每学期的周学时可为 4＋2 或 4＋1 或 4（4＋2是指每周讲课 4 学时，习题课 2 学时，4＋1 的含意类似）．本书上册还可以作为综合大学、理工科大学等高等院校的线性代数课程的教材．

本书的第一版和这次修订先后获得 1996 年度和 2001 年度北京大学主干基础课高等代数课程建设项目的资助，特此向北京大学教务部（教务处）表示衷心感谢．在这次修订过程中，得到北京大学数学科学学院院长张继平教授的关心和支持，特此向他表示衷心感谢．作者还要向这几年来使用本教材的所有教师表示感谢．

作者衷心感谢本书的责任编辑胡乃冏编审，他为本书的编辑出版付出了辛勤劳动．

作者热诚欢迎广大读者对本教材提出宝贵意见．

丘维声

于北京大学数学科学学院

2001 年 12 月

目　录

第 1 章　线性方程组

在实际问题或数学问题中，常常需要求一些未知的量，用字母 $x_1, x_2, \cdots$ 表示它们，根据问题中的等量关系，列出方程组. 最基本、最常见的一类方程组是未知量 $x_1, x_2 \cdots$ 的一次方程组，我们称它们是**线性方程组**. 为了统一地研究它们，我们建立线性方程组的模型，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

其中每个方程的左端是未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**一次齐次式**，右端是常数（称为**常数项**）. 与未知量相乘的数称为**系数**，a_{ij} 是第 i 个方程中 x_j 的系数，$i = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, n$. 方程组(1)中，方程的数目 s 与未知量的数目 n 可以相等，也可以不相等（$s < n$ 或 $s > n$ 都可能）.

对于 n 元线性方程组(1)，如果未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 代入后，每个方程都变成恒等式，那么我们称 n 元有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是线性方程组(1)的**一个解**. 方程组(1)的所有解组成的集合称为这个方程组的**解集**.

根据实际问题和数学问题的需要，我们要研究线性方程组的下列几个问题：

1. 线性方程组是否一定有解？有解时，有多少个解？
2. 如何求线性方程组的解？
3. 线性方程组的解不止一个时，解集的结构如何？
4. 线性方程组有解时，它的每一个解是否都符合实际问题的需要？（我们把符合实际问题的解称为**可行解**.）

这一章和第二、三章都将围绕这些问题展开讨论.

§1　高斯(Gauss)—约当(Jordan)算法

如何求线性方程组的解？我们来看一个具体例子.

例 1　求下述线性方程组的解：

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ 3x_1+4x_2+2x_3-3x_4=6, \\ -x_1-5x_2+4x_3+x_4=11, \\ 2x_1+7x_2+x_3-6x_4=-5. \end{cases} \tag{1}$$

分析　如果我们能设法消去未知量 x_1,x_2,x_3，最后剩下一个含 x_4 的一次方程，那么就能求出 x_4 的值. 从而得到只含 x_1,x_2,x_3 的线性方程组. 类似地，可以相继求出未知量 x_3,x_2,x_1 所取的值. 所谓消去未知量 x_1，就是使 x_1 的系数变成 0. 为了使线性方程组的求解方法能适用于含成百上千个未知量的方程组，便于用计算机编程序去计算，我们应当使解法有规律可循. 今后我们用记号"② + ① · (− 3)"表示把方程组的第1个方程的(− 3)倍加到第2个方程上；用记号"(②,④)"表示把方程组的第2、4个方程互换位置；用记号④ · c 表示用非零数 c 乘第4个方程.

解

$$\begin{array}{r} \\ ②+①\cdot(-3) \\ ③+①\cdot 1 \\ ④+①\cdot(-2) \end{array}\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ -5x_2-x_3-9x_4=-6, \\ -2x_2+5x_3+3x_4=15, \\ x_2-x_3-10x_4=-13. \end{cases}$$

把第2,4个方程互换位置(目的是在下一步避免分数运算)：

$$(②,④)\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ x_2-x_3-10x_4=-13, \\ -2x_2+5x_3+3x_4=15, \\ -5x_2-x_3-9x_4=-6. \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ ③+②\cdot 2 \\ ④+②\cdot 5 \end{array}\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ x_2-x_3-10x_4=-13, \\ 3x_3-17x_4=-11, \\ -6x_3-59x_4=-71. \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ ④+③\cdot 2 \end{array}\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ x_2-x_3-10x_4=-13, \\ 3x_3-17x_4=-11, \\ -93x_4=-93. \end{cases} \tag{2}$$

方程组(2)的最后一个方程是 x_4 的一次方程，用 $-\frac{1}{93}$ 乘这个方程得，x_4

$=1$. 然后往回代入(2)的第 3,2,1 个方程，相继求得，$x_3=2$，$x_2=-1$，$x_1=3$. 于是$(3,-1,2,1)$是原方程组(1)的唯一的一个解.

像(2)这样形状的方程组称为**阶梯形方程组**.

从例 1 的求解过程看出，我们对线性方程组作了以下三种变换：

1° 把一个方程的倍数加到另一个方程上；

2° 互换两个方程的位置；

3° 用一个非零数乘某一个方程.

这三种变换称为**线性方程组的初等变换**. 经过初等变换，把原方程组变成阶梯形方程组，然后去解阶梯形方程组(从最后一个方程开始，逐次往上解)，求得的解就是原方程组的解.

不难看出，线性方程组经过 1° 型初等变换，得到的方程组的解集与原方程组的解集相等，此时称这两个方程组**同解**. 同样容易看出，经过 2° 型(或 3° 型)初等变换得到方程组与原方程组同解. 因此，经过一系列初等变换化成的阶梯形方程组与原线性方程组同解. 这说明了例 1 中原线性方程组有唯一的一个解：$(3,-1,2,1)$.

例 1 的求解过程中，只是对线性方程组的系数和常数项进行了运算. 因此，为了书写简便，对于一个线性方程组可以只写出它的系数和常数项，并且把它们按照原来的次序排成一张表，这张表称为线性方程组的**增广矩阵**. 而只列出系数的表称为方程组的**系数矩阵**. 例 1 中线性方程组(1)的增广矩阵和系数矩阵依次是：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & -5 & 4 & 1 & 11 \\ 2 & 7 & 1 & -6 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \\ -1 & -5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

线性方程组可以用由它的系数和常数项排成的一张表来表示. 许多实际问题和数学研究对象都可以用一张表来表示. 因此我们建立一个数学模型来统一地深入地研究这种表.

定义 1 由 $s\cdot m$ 个数排成 s 行、m 列的一张表称为一个 $s\times m$ **矩阵**，其中的每一个数称为这个矩阵的一个元素，第 i 行与第 j 列交叉位置的元素称为 (i,j) 元.

例如，线性方程组(1)的增广矩阵的(2,4)元是 -3.

矩阵通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 简单地表示. 一个 $s\times m$ 矩阵可以简单地记作 $A_{s\times m}$，它的(i,j)元记作 $A(i;j)$. 如果矩阵 A 的(i,j)元是 a_{ij}，则可以把矩阵 A 记作(a_{ij}).

元素全为0的矩阵称为**零矩阵**，简记作0. s 行 m 列的零矩阵可以记成 $0_{s\times m}$.

如果一个矩阵 A 的行数与列数相等，则称它为**方阵**，m 行 m 列的方阵也称为 **m 级矩阵**.

本章和第二、三章围绕线性方程组来研究矩阵. 第四、五、六章将深入地研究矩阵的运算和其他性质.

利用线性方程组的增广矩阵，我们可以把例1的求解过程按照下述格式来写.

例1 求线性方程组(1)的解.

解

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & -5 & 4 & 1 & 11 \\ 2 & 7 & 1 & -6 & -5 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\text{④}+\text{①}\cdot(-2)]{\substack{\text{②}+\text{①}\cdot(-3) \\ \text{③}+\text{①}\cdot 1}}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -9 & -6 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{(\text{②},\text{④})}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & -5 & -1 & -9 & -6 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\text{④}+\text{②}\cdot 5]{\text{③}+\text{②}\cdot 2}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -17 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -59 & -71 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{④}+\text{③}\cdot 2}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -17 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -93 & -93 \end{bmatrix} \tag{3}
$$

$$
\xrightarrow{\text{④}\cdot\left(-\frac{1}{93}\right)}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -17 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$\xrightarrow[\substack{③+④\cdot 17\\ ②+④\cdot 10\\ ①+④\cdot(-2)}]{}\begin{pmatrix}1&3&1&0&2\\0&1&-1&0&-3\\0&0&3&0&6\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③\cdot\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&3&1&0&2\\0&1&-1&0&-3\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{②+③\cdot 1\\ ①+③\cdot(-1)}}\begin{pmatrix}1&3&0&0&0\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+②\cdot(-3)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\tag{4}$$

最后这个矩阵表示的线性方程组是:

$$\begin{cases}x_1=3,\\x_2=-1,\\x_3=2,\\x_4=1.\end{cases}\tag{5}$$

从而得到原线性方程组(1)的解是(3,-1,2,1).

从上述求解过程看出,我们对线性方程组的增广矩阵作了以下三种变换:

1°　把一行的倍数加到另一行上;

2°　互换两行的位置;

3°　用一个非零数乘某一行.

这三种变换称为**矩阵的初等行变换**.

在例1的求解过程中,先把增广矩阵经过初等行变换化成了(3)式所示的矩阵,像这样的矩阵称为**阶梯形矩阵**.它的特点是:

(1) 元素全为0的行(称为**零行**)在下方(如果有零行的话);

(2) 元素不全为0的行(称为**非零行**),从左边数起第一个不为0的元素称为**主元**.各个非零行的主元的列指标随着行指标的递增而严格增大.

在例1的求解过程中,我们对阶梯形矩阵(3)继续作初等行变换,直至化

成(4)式所示的矩阵,像这样的矩阵称为**简化行阶梯形矩阵**.它的特点是:

(1) 它是阶梯形矩阵;

(2) 每个非零行的主元都是1;

(3) 每个主元所在列的其余元素都是0.

在解线性方程组时,把它的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵,写出相应的阶梯形方程组,进行求解;或者一直化成简化行阶梯形矩阵,写出它表示的线性方程组,从而可以立即得出解.

可以证明,任何一个矩阵都能经过一系列初等行变换化成阶梯形矩阵,并且能进一步用初等行变换化成简化行阶梯形矩阵.证明的思路从例1的增广矩阵化成简化行阶梯形矩阵的过程可以看出,然后用数学归纳法写出证明.

例2 解下述线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}+\text{①}\cdot(-2)]{\text{②}+\text{①}\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{②}\cdot(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{③}+\text{②}\cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

写出最后这个阶梯形矩阵表示的线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_3 = -1, \\ 0 = -2. \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 无论取什么值都不能满足第3个方程:$0 = -2$ 因此,原线性方程组无解.

例3 解下述线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+①\cdot(-2)]{②+①\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②\cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+②\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

最后这个简化行阶梯形矩阵表示的线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_3 = -1, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

从第1个方程看出,对于 x_2 每取一个值 c_2,可以求得 $x_1 = c_2 + 2$,从而得到原方程组的一个解:$(c_2 + 2, c_2, -1)$.由于 c_2 可以取任意一个数,因此原方程组有无穷多个解.我们可以用下述表达式来表示这无穷多个解:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

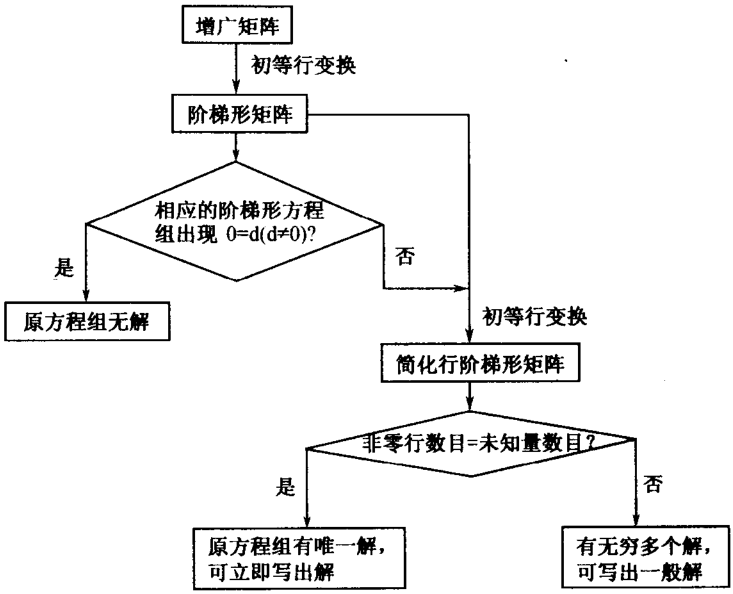
这个表达式称为原线性方程组的**一般解**,其中以主元为系数的未知量 x_1, x_3 称为**主变量**,而其余未知量 x_2 称为**自由未知量**.一般解就是用含自由未知量的式子来表示主变量.

从例2看到,把线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵,如果相应的阶梯形方程组出现“$0 = d$(其中 d 是非零数)”这样的方程,则原方程组无解.从例1和例3,我们猜想:如果相应的阶梯形方程组不出现“$0 = d$(其中 $d \neq 0$)”这种方程,则原方程组有解.下一节将证明这个猜想是正确的.

例1的阶梯形矩阵的非零行数目为4,与未知量数目4相等.例3的阶梯形矩阵的非零行数目为2,小于未知量的数目3.由此猜想:在线性方程组有解的情况下,它的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵中,如果非零行的数目等于方程组的未知量数目,则原方程组有唯一解;如果非零行的数目小于未知量的数目,则原方程组有无穷多个解.

线性方程组有解时,把阶梯形矩阵经过初等行变换进一步化成简化行阶梯形矩阵,则可以立即写出原方程组的唯一解或者无穷多个解.

现在我们把解线性方程组的方法总结如下：



上述解线性方程组的方法称为**高斯(Gauss)—约当(Jordan)算法**.

习　题　1.1

1. 解下列线性方程组：

$$(1)\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3=3, \\ -2x_1+x_2-4x_3=-9, \\ -x_1+4x_2-x_3=-7; \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+5x_2+5x_3=7, \\ 3x_1+7x_2+x_3=-8, \\ -x_1-4x_2+x_3=10; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3-x_4=6, \\ 3x_1-8x_2+x_3+5x_4=0, \\ -2x_1+x_2-4x_3+x_4=-12, \\ -x_1+4x_2-x_3-3x_4=2; \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x_1+3x_2-7x_3=-8, \\ 2x_1+5x_2+4x_3=4, \\ -3x_1-7x_2-2x_3=-3, \\ x_1+4x_2-12x_3=-15; \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_1+x_2-x_3+x_4=-11, \\ x_1+3x_2+x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$$

2. 一个投资者想把 1 万元投入给 3 个企业 A_1,A_2,A_3,所得的利润率分别是 12%,15%,22%.他想得到 2000 元的利润.

(1) 如果投入给 A_2 的钱是投给 A_1 的 2 倍,那么应当分别给 A_1,A_2,A_3 投资多少?

(2) 可不可以投给 A_3 的钱等于投给 A_1 与 A_2 的钱的和?

3. 解线性方程组:

$$(1)\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=6, \\ -3x_1+x_2+2x_3-4x_4=5, \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4=-2; \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=6, \\ -3x_1+x_2+2x_3-4x_4=5, \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4=11; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x_1-5x_2-2x_3=4, \\ 2x_1-3x_2+x_3=7, \\ -x_1+12x_2+7x_3=-5, \\ x_1+16x_2+13x_3=-1; \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x_1-5x_2-2x_3=4, \\ 2x_1-3x_2+x_3=7, \\ -x_1+12x_2+7x_3=-5, \\ x_1+16x_2+13x_3=1. \end{cases}$$

§2 线性方程组的解的情况及其判别准则

上一节的例 1、例 2、例 3 的线性方程组分别有唯一解、无解、有无穷多个解.例 2 的阶梯形方程组出现 $0=-2$ 这个方程,从而无解.例 1 和例 3 的阶梯形方程组没有出现"$0=d$(其中 d 是非零数)"这种方程,它们分别有唯一解和无穷多个解.这启发我们猜想线性方程组的解只有三种可能:无解,有唯一解,有无穷多个解,而且猜想阶梯形方程组是否出现"$0=d$(其中 $d\neq 0$)"这

种方程,是线性方程组无解还是有解的判别准则.

上一节的例1和例3的线性方程组都有解,但前者有唯一解,后者有无穷多个解.从它们的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵的不同之处,我们猜想:在有解的情况下,当阶梯形矩阵的非零行数目等于未知量数目时,有唯一解;非零行数目小于未知量数目时,有无穷多个解.

下面我们来证明上述猜想是正确的.

由于线性方程组与对它进行初等变换得到的阶梯形方程组同解,因此我们只要讨论阶梯形方程组的解有几种可能及其判别准则.设阶梯形方程组有 n 个未知量.

情形1 阶梯形方程组中出现"$0 = d$(其中 $d \neq 0$)"这种方程.由于这种方程无解,从而阶梯形方程组无解.

情形2 阶梯形方程组中不出现"$0 = d$(其中 $d \neq 0$)"这种方程,我们设阶梯形方程组的增广矩阵中,非零行的数目为 r,则主元数目为 r.

情形2.1 $r = n$.此时 n 个未知量都是主变量.由于 n 个主元应分布在不同的列,因此阶梯形方程组一定是下述形式:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad c_{nn}x_n = d_n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $c_{11}, c_{22}, \cdots, c_{nn}$ 都不为零.对于(1)的增广矩阵施行初等行变换化成的简化行阶梯形矩阵一定形如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_1' \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_2' \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d_n' \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

从而阶梯形方程组有唯一解:$(d_1', d_2', \cdots, d_n')$.

情形2.2 $r < n$.此时阶梯形方程组形如