

245

03-1/12

w61

微流边界层理论及其应用

文书明 著

北 京

冶金工业出版社

2002

内 容 提 要

本书以物质结构理论为基础,建立了固体表面静水边界层结构模型,并根据边界层内水流黏度系数的变化,得出了微流水流边界层的速度分布规律;应用微流边界层理论,解出了微细颗粒在水中的沉降末速度、气泡在水中的最大上升速度、毛细管中的水流阻力系数以及渗流启动阻力等;并利用提出的微流边界层控制方法,系统地解释了微细颗粒矿物加工产品加药剂时的脱水过程等。

本书可供从事水力学和流体力学方面的研究人员以及矿物加工、生产的工程技术人员阅读,也可供大专院校有关专业师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

微流边界层理论及其应用/文书明著. —北京:冶金工业出版社, 2002.8

ISBN 7-5024-3059-8

I. 微... II. 文... III. 微流体动力学—边界层理论 IV. 0351.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 044377 号

出版人 曹胜利(北京沙滩嵩祝院北巷 39 号,邮编 100009)

责任编辑 张登科 美术编辑 王耀忠 责任校对 王贺兰 责任印制 牛晓波

北京百善印刷厂印刷;冶金工业出版社发行;各地新华书店经销

2002 年 8 月第 1 版,2002 年 8 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32;5.875 印张;155 千字;177 页;1-3000 册

16.00 元

冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893

冶金书店 地址:北京东四西大街 46 号(100711) 电话:(010)65289081

(本社图书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

前言

经典的 L. Prandtl 边界层理论很少考虑边壁性质对边界层流动特性的影响,该理论对工程实际中涉及固壁与水流相互作用的流动,特别是微细水流的流动问题,难以进行充分而圆满的解释,有时甚至会出现矛盾和错误的结论,因此, L. Prandtl 边界层理论是不全面的。水与固体表面的作用,在无化学反应和化学吸附的情况下,极性相互作用是主要的,不同性质的固体表面,水分子吸附的形式不同,当水流流动时,边界层的流动特性、分离等存在较大的差异,正是这种差异造成了微细流动过程中不同性质固壁表面上水流阻力、速度分布的不同,对工程实际问题产生了重要的影响。所以,研究固壁性质与边界层流动特性的关系,对深入理解工程实际中的微细流动问题,具有重要的理论价值。

本书以物质结构理论为基础,研究了固体表面分子对水分子的吸附,固壁对水的引力作用,建立了固体表面静水边界层结构模型,得出了边界层内水的黏度系数表达式。根据边界层内水流黏度系数的变化规律,导出了微流边界层水流流动微分方程,通过简化处理,得到了平板、曲面、平行窄缝、毛细管、旋转筒体内壁、旋转圆柱外、斜面微流边界层方程的近似解,从而得出以上微流水流边界层的速度分布规律。应用微流边界层理论,解出了微细颗粒在水中的沉降末速度、气泡在水中的最大上升速度、毛细管中的水流阻力系数

以及渗流启动阻力等。

通过试验研究,测定了不同表面性质微细颗粒在水中的沉降速度及多孔介质中的渗流速度。利用微流边界层理论,提出了微流边界层控制的方法,充分地解释了微细颗粒矿物加工产品加药剂时的脱水过程。

在本书的编写过程中,参考了有关边界层理论方面的书籍及资料,在此对其作者表示感谢。

由于时间紧,加之作者水平所限,书中不妥之处恳请读者批评指正。

作 者

2002 年 4 月

目 录

1	微流边界层内水分子间的相互作用	(1)
1.1	分子间的相互作用	(1)
1.2	水的结构与性质	(15)
1.3	水的内聚功	(18)
2	微流边界层内水与固壁间的相互作用	(20)
2.1	固体表面结构	(20)
2.2	固体表面对水分子的吸附能力	(24)
2.3	固体表面上水的吸附过程	(27)
2.4	固体表面水分子吸附模型	(30)
2.5	固体表面对水分子的吸引势能	(35)
3	L. Prandtl 边界层理论	(37)
3.1	L. Prandtl 边界层概念	(37)
3.2	Pt 边界层厚度的估算	(38)
3.3	Pt 边界层分离及涡的形成	(40)
3.4	管中和边界层中的湍流	(42)
3.5	Pt 边界层分离的防止方法	(44)
4	微流边界层内的黏性系数	(45)
4.1	普通水的黏度	(45)
4.2	微流边界层内水的黏度	(49)

5	微流边界层的基本方程	(53)
5.1	可压缩黏性流动的基本方程	(53)
5.2	微流边界层方程	(61)
6	微流边界层方程的近似解	(65)
6.1	平板微流边界层方程的近似解	(65)
6.2	曲面微流边界层方程的近似解	(71)
6.3	平行窄缝中的水流流动	(77)
6.4	毛细圆管中的水流流动	(83)
6.5	旋转微流边界层中的水流流动	(88)
6.6	斜面微流边界层中的水流流动	(95)
7	微流边界层水流的 Reynolds 数及阻力	(100)
7.1	微流边界层水流的 Reynolds 数	(100)
7.2	微流水流的阻力	(103)
8	非定常微流边界层	(113)
8.1	非定常微流边界层方程	(113)
8.2	平板突然运动时微流边界层方程 的解	(114)
8.3	一个平板相对于另一个平板运动 时其间水流的流动	(115)
8.4	振动平板附近的微流水流流动	(117)
9	滑移边界层	(119)
9.1	两平板间的滑移边界层	(119)
9.2	毛细圆管内的滑移边界层	(120)
9.3	边壁滑移时两个同轴旋转圆柱面 之间的流动	(121)

9.4	壁面滑移时薄层斜面流的流动	(122)
9.5	气泡在静水中的上升运动	(123)
10	微流边界层的控制与减阻	(129)
10.1	常规边界层的控制方法	(129)
10.2	微流水流边界层的控制	(133)
11	微流边界层理论的应用	(138)
11.1	固壁极性对毛细管水流速度的 影响	(138)
11.2	表面极性对微细固体颗粒沉降 速度的影响	(144)
11.3	固体表面性质对悬浮液黏度的 影响	(148)
11.4	微细粒固体物料的脱水	(157)
11.5	固壁性质对渗流流动的影响	(169)
	参考文献	(177)

1 微流边界层内水分子间的相互作用

1.1 分子间的相互作用

水在固体表面流动形成边界层,一方面是由于水自身的黏性作用,另一方面是由于水分子与固体表面物质分子间的相互作用。无论是水的黏性,还是水分子与固体表面分子的作用,分子间的作用力是决定性的。因此,充分地认识物质分子间的作用力,对微流边界层的理解具有重要的作用。

1.1.1 分子的偶极矩和极化率

为了更好地理解偶极矩的意义,先对分子中的电荷分布做一分析。分子中有正电荷部分(各原子核)和负电荷部分(电子),例如:氢分子的正电荷分布在两个氢原子核上,负电荷则分布于两个电子(共用电子对)上。对于一个分子,可以取一个正电中心和负电中心,氢分子的正电中心和负电中心正好重合,在二核之间,所谓偶极矩就是分子的正电中心(或负电中心)上的电量乘以两个中心之间的距离所得的积。偶极矩是有方向性的,是矢量,其方向由正电中心指向负电中心。对于氢分子,由于正电中心和负电中心之间的距离为零,所以偶极矩等于零。这种偶极矩为零的分子称为非极性分子,它们的正电中心和负电中心重合在一起,两中心的距离为零。

有的分子,正电中心和负电中心不重合,二者间有一距离,此时的偶极矩不等于零,这样的分子称极性分子,水分子 H_2O 就是一个典型的极性分子。一些物质分子的偶极矩列于表 1-1 中。由表可知水分子的偶极矩为 $6.17 \times 10^{-30} \text{C} \cdot \text{m}$,属于极性比较大的分子。

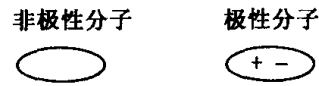
以上物质分子的偶极矩是利用电学或光学等物理实验方法测

得的,是衡量物质分子极性的重要根据。

表 1-1 一些物质的偶极矩

分 子 式	偶极矩 /C·m	分 子 式	偶极矩 /C·m
H ₂	0	SO ₂	5.33×10^{-30}
N ₂	0	H ₂ O	6.17×10^{-30}
CO ₂	0	NH ₃	4.90×10^{-30}
CS ₂	0	HCN	9.37×10^{-30}
CH ₄	0	HF	6.37×10^{-30}
CO	0.40×10^{-30}	HCl	3.57×10^{-30}
CHCl ₃	3.50×10^{-30}	HBr	2.67×10^{-30}
H ₂ S	3.67×10^{-30}	HI	1.40×10^{-30}

一些情况下,用下面的示意图分别表示极性分子和非极性分子:



对于水分子,也可表示成下图的形式,即:



水分子带正电荷的一端要比带负电荷的一端大一些,这主要是由键角引起的。

我们通常所说的分子为直线型、非直线型等,实际上大多数是通过偶极矩的实测值来推断的。如 CO₂ 的偶极矩实测值为 0,为非极性分子,故可以断言其正负电荷中心是重合的,由此推测 CO₂ 分子应是直线型的。又如 NH₃ 的偶极矩实测值不为零,是极性分子,由此可断言氮原子和三个氢原子不全在同一平面内,否则,其

正、负电荷中心将重合于氮原子上, NH_3 分子为三角锥, 底上是三个氢原子, 顶上是氮原子, 这样的构型也是部分依据偶极矩推测的。

物质分子处于不停的运动之中, 其中原子与原子间的距离, 电子的分布随时间发生不停的变化, 当然这种变化是有规律的, 正是这种规律, 才出现了某一瞬间的分子构型。我们常说的分子构型是指经常出现的分子型态, 或者说这种型态比起其他型态来出现的概率大得多。分子以原子核为骨架, 电子受着核骨架的吸引而发生运动, 这种运动又反过来影响核骨架的构型。当一个分子受另一个分子的电子或原子核的作用时, 其电子运动状态和核骨架会发生变化, 这种变化导致分子的正负电荷中心也发生变化, 从而引起极性的变化。分子的正、负电“极”(即电中心)分化的过程叫极化, 如图 1-1 所示。极化率由实验测出, 它反映物质在外电场(包括其他分子)作用下分子变形的性能。

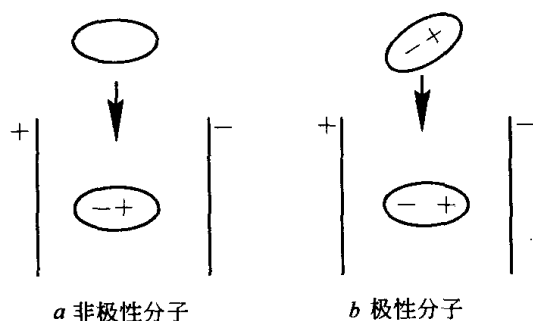


图 1-1 分子在电场中的极化

分子的变形与分子的大小有关, 一般情况下, 分子愈大, 包含的电子愈多, 有一些电子受核吸引力小, 外电场对这些电子的影响较大, 分子变形也较大。由于极化作用, 非极性分子也可显示出极性, 在极化状态下, 由非极性分子变为极性分子。极性分子被极化, 极性会进一步增加。一些物质分子的极化率如表 1-2 所示。

表 1-2 一些物质分子的极化率

分 子 式	极化率/ m^3	分 子 式	极化率/ m^3
He	0.203×10^{-30}	HCl	2.56×10^{-30}
Ne	0.392×10^{-30}	HBr	3.40×10^{-30}
Ar	1.63×10^{-30}	HI	5.20×10^{-30}
Kr	2.46×10^{-30}	H ₂ O	1.59×10^{-30}
Xe	4.01×10^{-30}	H ₂ S	3.64×10^{-30}
H ₂	0.81×10^{-30}	CO	1.93×10^{-30}
O ₂	1.55×10^{-30}	CO ₂	2.59×10^{-30}
N ₂	1.72×10^{-30}	NH ₃	2.34×10^{-30}
Cl ₂	4.50×10^{-30}	CH ₄	2.60×10^{-30}
Br	6.43×10^{-30}	C ₂ H ₆	4.50×10^{-30}

1.1.2 分子间的吸引力

分子中原子间强烈的相互作用,称为化学键,但化学键没有表述一切可能的相互作用力,如惰性气体的原子间并不生成化学键,却存在相互作用力。当原子相互接近时,这种气体可以液化,放出能量。这说明原子或分子间存在相互作用和吸引力。电中性的原子或分子间这种非化学键的相互作用力称为分子间力。焦耳-汤姆逊效应、气体的液化、分子晶体的稳定性和固体表面对气体、液体的吸附等现象,都与分子间力有关。分子间力是决定物质的沸点、熔点、汽化热、溶化热、溶解度和表面张力等物理化学性质的重要因素,也是影响微流边界层结构及流动特性的重要因素。

早在 1873 年,范德华(Van der Waals)就假定所有原子和分子间存在吸引力,并在范德华方程中用 a/V^2 表示,故分子间力又称范德华力。

分子间的相互作用包括三个部分,即取向作用、诱导作用和色散作用。取向作用表示分子永久偶极矩间的相互作用;诱导作用是指分子被外电场作用产生极化而形成的偶极矩与永久偶极矩间

的相互作用。对于两个非极性对称性分子及单原子分子,用以上两种作用还不能解释其间的相互作用。伦敦(F.London)于1930年指出了分子间的第三种相互作用,即色散作用,用它可以说明非极性对称分子或单原子分子间的相互作用。

1.1.2.1 取向作用

两个极性分子(如 H_2O 分子)靠近时,发生同极相斥,异极相吸的现象,这导致两分子的方向发生变化,形成如图 1-2b 所示的结果,这种极性分子因取向而产生的分子间的吸引作用叫取向作用。

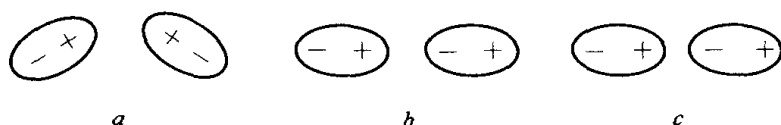


图 1-2 极性分子间的相互作用

a—分子距离较远;b—取向;c—诱导

取向作用的强弱除了与分子间距离有关外,还决定于极性分子的偶极矩,偶极矩愈大,取向作用愈强。水分子(H_2O)的极性是很强的,其间的取向作用具有决定性的地位。

考虑一对永久偶极矩,其正负电量、正负电荷中心间的距离分别为 $-e_1$ 、 $+e_1$ 、 l_1 和 $-e_2$ 、 $+e_2$ 、 l_2 。设两个偶极矩的负端在坐标原点,方向角分别为 θ_1 、 ϕ_1 和 θ_2 、 ϕ_2 ,如图 1-3 所示,四个电荷的坐标为: $-e_1(0,0,0)$ 、 $+e_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $-e_2(0,0,0)$ 、 $+e_2(x_2, y_2, z_2)$;四个电荷之间的距离分别为 $L_{-e_1-e_2} = R$, $L_{+e_1+e_2} = r_1$, $L_{-e_1+e_2} = r_2$, $L_{+e_1-e_2} = r_3$ 。

由库仑定律,一对偶极矩间的相互作用势能为:

$$V_k = e_1 e_2 \left\{ \frac{1}{R} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right\} \quad (1-1)$$

式中

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{[(R + z_2 - z_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{[(R + z_2)^2 + x_2^2 + y_2^2]^{1/2}} \quad (1-2)$$

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{[(R - z_1)^2 + x_1^2 + y_1^2]^{1/2}}$$

一般情况下, R 远大于任何坐标值 $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$, 即 $R \gg l_1$ 和 l_2 , 则可用二项式定理:

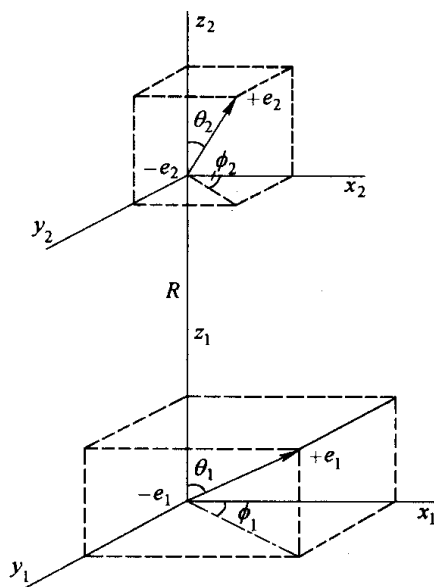


图 1-3 两个偶极矩间的取向作用

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \dots$$

将式 1-2 展开成级数形式, 即:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{R} \left[1 - \frac{z_2 - z_1}{R} - \frac{1}{2} \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{R^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{(z_1 - z_2)^2}{R^2} + \dots \right] \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{1}{R} \left[1 - \frac{z_2}{R} - \frac{1}{2} \frac{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}{R^2} + \frac{3}{2} \frac{z_2^2}{R^2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (1-3)$$

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{R} \left[1 + \frac{z_1}{R} - \frac{1}{2} \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{R^2} + \frac{3}{2} \frac{z_1^2}{R^2} + \dots \right]$$

将式 1-3 代入式 1-1 并略去 R^{-4} 以后的各项,得:

$$V_k = -\frac{e_1 e_2}{R^3} [2z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2] \quad (1-4)$$

将式 1-4 右边分子分母同乘以 $l_1 \times l_2$, 并再与 $x_1 x_2$ 和 $y_1 y_2$ 两项同除以 $(x_1^2 + y_1^2)^{1/2} (x_2^2 + y_2^2)^{1/2}$, 得:

$$V_k = -\frac{e_1 l_1 e_2 l_2}{R^3} \left\{ 2 \frac{z_1 z_2}{l_1 l_2} - \frac{(x_1^2 + y_1^2)^{1/2} (x_2^2 + y_2^2)^{1/2}}{l_1 l_2} \right. \\ \left. \times \left[\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{(x_1^2 + y_1^2)^{1/2} (x_2^2 + y_2^2)^{1/2}} \right] \right\}$$

显然上式可变为:

$$V_k = -\frac{\mu_1 \mu_2}{R^3} \{ 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \} \quad (1-5)$$

式中, $\mu_1 = e_1 l_1$, $\mu_2 = e_2 l_2$, 表示分子的偶极矩。

由式 1-5 可知, 极性分子间的作用势能与偶极矩的大小、偶极矩间的距离及两个偶极矩的取向有关。当两个偶极矩“头对尾”时, 势能达到最小值, 为 $-\frac{2\mu_1 \mu_2}{R^3}$; 当两个偶极矩“头对头”时, 势能达到最大值, 为 $+\frac{2\mu_1 \mu_2}{R^3}$ 。分子处于运动状态, 两个偶极矩的取向也是随时变化的, 如果按取向概率相同考虑, 则平均势能为零, 即 $\bar{V} = 0$ 。但按照玻耳兹曼分布定律, 势能低的取向概率大, 而分子的热运动又会影晌这种取向, 当达到平衡时, 势能有一定的平均值, 即:

$$\bar{V}_k = \frac{\int \dots \int V A e^{-\frac{V}{kT}} \sin \theta_1 d\theta_1 \sin \theta_2 d\theta_2 d\phi_1 d\phi_2}{\int \dots \int A e^{-\frac{V}{kT}} \sin \theta_1 d\theta_1 \sin \theta_2 d\theta_2 d\phi_1 d\phi_2}$$

式中, A 为常数。即使在常温下, $V \ll kT$, 所以可将 $e^{-\frac{V}{kT}}$ 展开, 只取前两项, 即 $e^{-\frac{V}{kT}} \approx 1 - \frac{V}{kT}$, 代入上式积分后得:

$$\overline{V}_k = -\frac{2}{3} \frac{\mu_1^2 \mu_2^2}{R^6 kT} \quad (1-6)$$

对于同类分子, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, 所以

$$\overline{V}_k = -\frac{2\mu^4}{3R^6 kT} \quad (1-7)$$

1.1.2.2 诱导作用

非极性分子在极性分子永久偶极矩的电场作用下, 因变形会使其正、负电荷不重合, 从而产生偶极矩, 这种偶极矩称为诱导偶极矩。永久偶极矩与它所诱导的偶极矩之间发生相互作用, 称为诱导作用。诱导作用将分子看成是刚性的, 不变形的。实际上, 极性分子因其变形性彼此之间同样存在诱导作用。诱导作用是在极性分子永久偶极矩的电场作用下产生的, 那么永久偶极矩的电场强度显然是诱导作用的重要影响因素。总的诱导作用相互作用能包括两个部分, 一是在永久偶极矩的电场作用下诱导产生偶极矩所需的功。二是诱导偶极矩与永久偶极矩的电场间的相互作用能。永久偶极矩在其周围形成电场, 处于其中的

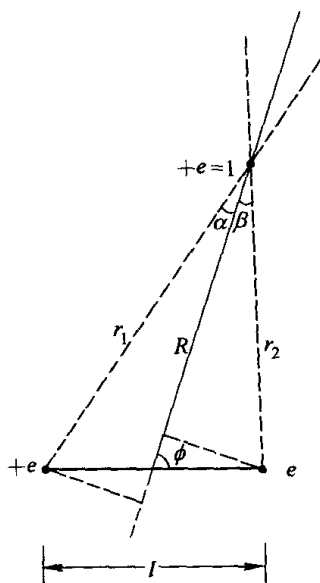


图 1-4 永久偶极矩的电场强度

电荷将受到电力的作用。为了确定处于永久偶极矩电场中某点的单位电荷上的力, 设这一点与偶极矩中心的距离为 R , R 与偶极轴的夹角为 ϕ , 如图 1-4 所示。根据库仑定律, 偶极矩的正、负电荷作用于单位电荷上的力在 R 方向上的分力为:

$$E_R = \frac{e}{r_1^2} \cos \alpha - \frac{e}{r_2^2} \cos \beta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e}{r_1^2} \times \frac{\left(R + \frac{l}{2} \cos \phi\right)}{r_1} - \frac{e}{r_2^2} \times \frac{\left(R - \frac{l}{2} \cos \phi\right)}{r_2} \\
&= \frac{eR}{r_1^3} \left(1 + \frac{l}{2R} \cos \phi\right) - \frac{eR}{r_2^3} \left(1 - \frac{l}{2R} \cos \phi\right) \\
&= \frac{e}{R^2} \times \frac{\left(1 + \frac{l}{2R} \cos \phi\right)}{\left[1 + \left(\frac{l}{R} \cos \phi + \frac{l^2}{4R^2}\right)\right]^{3/2}} - \frac{e}{R^2} \\
&\quad \times \frac{\left(1 - \frac{l}{2R} \cos \phi\right)}{\left[1 - \left(\frac{l}{R} \cos \phi - \frac{l^2}{4R^2}\right)\right]^{3/2}} \tag{1-8}
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
r_1 &= \left[\left(R + \frac{1}{2} l \cos \phi\right)^2 + \left(\frac{1}{2} l \sin \phi\right)^2 \right]^{1/2} \\
&= R \left[1 + \left(\frac{l}{R} \cos \phi + \frac{l^2}{4R^2}\right) \right]^{1/2} \\
r_2 &= \left[\left(R - \frac{1}{2} l \cos \phi\right)^2 + \left(\frac{1}{2} l \sin \phi\right)^2 \right]^{1/2} \\
&= R \left[1 - \left(\frac{l}{R} \cos \phi - \frac{l^2}{4R^2}\right) \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

由于 $R \gg l$, 应用二项式定理得:

$$(1 \pm x)^{-3/2} = 1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 \mp \dots$$

略去 l^3/R^3 项后得:

$$E_R = -\frac{2\mu \cos \phi}{R^3} \left[1 - \frac{3}{4} \times \frac{l^2}{R^2} \left(1 + \frac{5}{4} \cos^2 \phi \right) \right]$$

经进一步简化得:

$$E_R = -\frac{2\mu \cos \phi}{R^3} \tag{1-9}$$

当确定以增加 ϕ 的方向为正时, 偶极矩的正、负两极电荷作用在单位正电荷上的力在与 R 垂直的方向上的分力为:

$$E_\phi = - \left[\frac{e}{r_1^2} \sin \alpha + \frac{e}{r_2^2} \sin \beta \right]$$

经简化后得：

$$E_{\phi} = -\frac{\mu \sin \phi}{R^3} \quad (1-10)$$

作用在单位正电荷上的总力为该点的场强 E ，由于

$$E^2 = E_R^2 + E_{\phi}^2 = \frac{\mu^2}{R^6}(1 + 3\cos^2 \phi)$$

所以

$$E = \frac{\mu}{R^3}(1 + 3\cos^2 \phi)^{1/2} \quad (1-11)$$

由式 1-11 可知，当 $\phi = 0$ 时， $E = \frac{2\mu}{R^3}$ ，而当 $\phi = 90^\circ$ 时， $E = \frac{\mu}{R^3}$ 。因为 $\cos^2 \phi$ 的平均值为 $1/3$ ，所以，偶极矩场强平方的平均值为：

$$\overline{E^2} = \frac{2\mu^2}{R^6} \quad (1-12)$$

上面讨论了一个单位点电荷在永久偶极矩的电场中的力。对于非极性分子，极性分子的永久偶极矩的电场 E_2 使其产生诱导作用，获得诱导偶极矩 μ_1 所需的功为：

$$\mu_1 = \alpha_1 E_2 \quad (1-13)$$

式中， α_1 是非极性分子的变形极化率。

电场 E_2 作用于电荷 e_1 上的力为 $E_2 e_1$ ，非极性分子在此电场的作用下，正负电荷中心间的距离由零变为 l_1 所需的功为：

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{l_1} E_2 e_1 dl = \int_0^{l_1} \frac{\mu_1}{\alpha_1} e_1 dl = \frac{e_1^2}{\alpha_1} \int_0^{l_1} l dl = \frac{1}{2} \frac{e_1^2 l_1^2}{\alpha_1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu_1^2}{\alpha_1} = \frac{1}{2} \alpha_1 E_2^2 \end{aligned} \quad (1-14)$$

在电场作用下，非极性分子的诱导偶极矩一旦生成，就会与该电场发生相互作用，其相互作用势能为：

$$V' = -(\mu_1 E_2) = -\mu_1 E_2 \cos \theta$$

由于诱导偶极矩与电场的方向是一致的，即 $\theta = 0$ ，所以有：

$$V' = -\mu_1 E_2 = -\alpha_1 E_2^2 \quad (1-15)$$

将 V' 和 W 相加，并用 $\overline{E_2^2}$ 代替 E_2^2 ，得总的诱导相互作用能为：