JIAOCHENG

微积分教程

主编 谢明文

WEIJIFEN JIAOCHENG
ZHUBIAN XIEMINGWEN

西南财经大学出版社
SOUTHWEST UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

JIAOCHENG

微积分教程

主　编　谢明文
副主编　白淑敏

西南财经大学出版社
SOUTHWEST UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

微积分教程

主编:谢明文　副主编:白淑敏

特约编辑:谢明志
责任编辑:曾召友
封面设计:大涛视觉传播设计事务所

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址:	http://www.xcpress.com/
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-7353785　7352368
印　　刷:	西南财经大学印刷厂
开　　本:	880mm×1230mm1/32
印　　张:	15.875
字　　数:	368千字
版　　次:	2002年7月第1版
印　　次:	2002年7月第1次印刷
书　　号:	ISBN 7-81055-948-6/O·2
定　　价:	25.80元

1. 如有印刷、装订等差错,可向本社发行部调换。

前　言

一提起笔来，就忧心忡忡，不知该说些什么为好．说好吧，怕授以“王婆卖瓜”之柄；说不好吧，又怕招来“无胆推己”之嫌．不得已，只好自取中庸，只讲我们成书的初衷，至于此书是否尚有点新意，还是让读者自己去体味吧．

本书是根据国家教育部颁布的《经济数学基础》教学大纲，参照国家考试中心硕士研究生入学《数学考试大纲》，在西南财经大学教务处和经济数学系的领导和支持下，为财经院校经济类、管理类各专业本科学生编写的一本教科书．我们本着“以本(科)为主，兼顾考研”的精神，对每节的例题与习题进行了认真选择，保留了经典的传统题，增添了基本的新近考研题，由浅入深、层次分明，题量充足、侧重基础；我们本着经济数学教材，应当努力使数学知识与经济理论相结合的愿望，尽力把经济学中的一些最常用、最基本的定量分析数学方法反映在自己的作品之中；我们本着“集他人之长，为我所用”的原则，力图将他人长处与自己经验融为一体，为本书增加一些亮点和新意．为提高本科教学的质量，打好学生的考研基础，本书不仅有一些＊号内容，而且也有一些＊号例题和习题，以供师生选用；倘若学时有限，跳过＊号内容，亦不影响本书的体系．

本书共分十一章．第一、四章由崔红卫执笔，第二、五、十章由涂晓青执笔，第三、十一章由白淑敏执笔，第六、八、九章由谢明文

执笔，第七章由谢建民执笔．

本书正、副主编分别由谢明文、白淑敏担任．主编谢明文同志负责全书的统纂、修改和定稿工作，副主编白淑敏同志负责组织协调工作．

本书定稿以后，电子科技大学应用数学系谢云荪教授审阅了全书并提出了不少宝贵的建议，使编者受益非浅，为本书增辉不少．鉴此，笔者在此深致谢意．

在本书的定稿过程中，西南财经大学经济数学系副主任孙疆明副教授和杜之韩副教授以及陈小平讲师认真地审阅了本书的部分章节，也提出了一些建设性的建议；西南财经大学出版社、教务处和经济数学系的领导，对本书的问世一直十分关注，并给予了有力的支持．在此，也一并表示谢意．

由于作者水平有限，疏漏错误在所难免，恳请读者、同仁批评指正，以慰我等至诚之念．

编者

2002年7月

目 录

第一章　函数

函数是微积分学研究的基本对象，是现实世界中变量之间相互依赖关系的抽象．本章将复习和加深函数的有关概念及性质．

§1.1　函数的概念

为了研究问题方便起见，首先来介绍微积分中经常用到的几个基本概念．

一、邻域

在微积分中，通常用到的集合是实数集 R 的一些子集．我们在初等数学中已学过的区间（或区间的并集），也都是 R 的子集．由于在今后的讨论中，有时需要考虑在某点附近的所有点构成的集合，为此我们引入邻域的概念．

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，则称数集

$$\{x \mid |x - a| < \delta\}$$

为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，点 a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径．

因为 $|x - a| < \delta$ 等价于 $a - \delta < x < a + \delta$，所以

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

由此可见，$U(a, \delta)$ 实质上就是一个开区间 $(a - \delta, a + \delta)$．它是一个以点 a 为中心，以 δ 为半径，长度为 2δ 的开区间，如图 1

-1 所示.

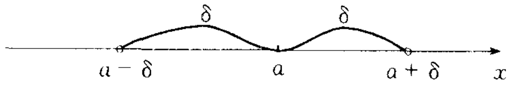

图 1-1

点 a 的δ邻域去掉中心点a后的集合,称为点 a 的δ去心邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\begin{aligned}\mathring{U}(a,\delta) &= \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} \\ &= (a-\delta,a) \cup (a,a+\delta).\end{aligned}$$

例如,点 $x=1$ 的$\dfrac{1}{3}$邻域为$(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3})$;点 $x=10$ 的$\dfrac{1}{2}$去心邻域为$(9.5,10)\cup(10,10.5)$.

二、常量与变量

在研究自然现象、社会经济或技术过程时,往往会涉及到各种不同的量.在这些量中,有的在研究过程中始终保持不变,即只取一个固定的数值,这样的量称为常量;有的在研究过程中是变化着的,即可取不同的数值,这样的量称为变量.

例如,做匀速直线运动的物体,它在运动的过程中,距离 s 和时间 t 是变量,而速度 v 就是一个常量.

值得注意的是,常量与变量是相对的,一个量是常量还是变量,完全依赖于研究问题的场合.例如,就小范围地区来说,重力加速度 g 可以视为常量;但就大范围地区来说,重力加速度 g 则是变量.在实际中,如果某个量在所讨论的问题中只有极其微小的变化,而这种变化所产生的影响又是微不足道的,那么为使问题简化,通常就可将它当成常量来处理.

常量,在数轴上表示一个定点,常用字母 a,b,c 等表示;变量,在数轴上表示一个动点.常用字母 x,y,z 等表示.

三、函数的概念

在研究实际问题的过程中，通常都要涉及几个变量．这些变量，不仅是相互联系的、而且还是遵循一定变化规律的．现在，我们仅就两个变量的情形加以讨论（更多个变量的情况，我们将在第八章讨论）．

例1 设商店某商品的销售单价为5(元)，则销售数量 x 与销售收入 R(元) 的关系为

$$R = 5x \qquad x \in \{1,2,3,\cdots\}$$

显然，当销售数量 x 在自然数集 $\{1,2,3,\cdots\}$ 中任意取一个数值时，均可按上式所示的规则确定销售收入 R 的一个值与之对应．

例2 某洗衣机厂记录了某种型号洗衣机的销售情况，并将销售量(单位:台) 与销售价格(单位:元／台) 列表如下

表 1－1

价格 x(元／台)	500	800	1000	1500
销售 y(台)	125000	105000	85000	65000

显然，对于任何价格 $x \in \{500,600,800,1000,1500\}$，均可按此表所示的对应规则惟一地确定一个销售量 y 的值与之相对应．

例3 图1－2是某地气象站的自动记录仪记录的该地某日气温变化的一条曲线．显然，对于任意一个 $t_0 \in [0,24]$，按照图1－2中箭头所示的规则，就可以有一个惟一

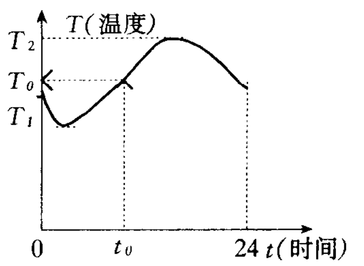

图 1－2

确定的 T 的值 T_0 与之对应．

以上三个例子的一个共同的特点就是：在某一过程中有两个变量，而这两个变量不仅都有自己的取值范围，而且对于一个变量在其取值范围内的任意一个值都可找到一个确定的对应规则（如公式、表、图等）得到另一个变量的一个对应值．

摈弃以上各变量的具体意义，我们就可抽象出如下的

定义 1.1 设 D 是一个非空数集，若按照某一确定的对应规则 f，使得对于每一个 $x \in D$，都能由 f 惟一地确定一个实数 y 与之对应，则称对应规则 f 为定义在数集 D 上的函数．

在定义 1.1 中，数集 D 称为函数 f 的定义域，通常记为 $D(f)$．x 称为自变量，y 称为因变量．

当 $x_0 \in D(f)$ 时，根据法则 f，因变量 y 的相应取值 y_0，称为函数 f 在点 x_0 处的函数值，记作 $y_0 = f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0} = y_0$．当 x 为 $D(f)$ 的任意一点时，其相应的函数值为 y，记为 $y = f(x)$．

函数 f 的全体函数值组成的集合 $Z = \{y \mid y = f(x), x \in D(f)\}$，称为函数 f 的值域，通常记为 $Z(f)$

例如，例 1 中函数的定义域 $D(f) = \{1,2,3,\cdots\cdots\}$，值域 $Z(f) = \{5,10,15,\cdots\cdots\}$；例 2 中，$D(f) = \{500,800,1000,1500\}$，$Z(f) = \{125000,105000,85000,65000\}$；例 3 中，$D(f) = [0,24]$，$Z(f) = [T_1, T_2]$．而公式 $R = 5x$、表 1 - 1 和气温曲线（图 1 - 2），则分别表示三个函数的对应规则 f．

由定义 1.1 可以看出，函数是指定义域 $D(f)$ 上的对应规则 f，而 $f(x)$ 为函数值，二者的含义是不同的．但在微积分中，由于通常都是通过函数 f 在任一点 x 的值 $f(x)$ 的变化来研究函数 f 的性质，因此，在习惯上，人们也可直接称 $f(x)$ 是 x 的函数，或 y 是 x 的函数，并记作 $y = f(x)$ 或 $y = y(x)$，$x \in D(f)$．

由于函数的定义域 $D(f)$ 和对应规则 f 被确定以后,其值域必然随之确定.因此,定义域和对应规则构成了函数的两个要素.

如果两个函数的定义域和对应规则都相同,则称这两个函数相同.例如,函数 $y=\pi x^2$ 与 $y=\pi r^2$,它们的定义域都是 $D=(-\infty,+\infty)$,且其对应规则都是"自变量的平方"乘 π.因此,尽管表示变量的字母不同,但它们仍是两个相同的函数.可是,对于函数 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 与 $y=\dfrac{x}{x(x+1)}$,由于它们的定义域不同,所以它们是两个不同的函数.

例 4 下列函数与函数 $y=x$ 是否相同?为什么?

(1) $y=\sqrt{x^2}$; (2) $y=\sqrt[3]{x^3}$

解 (1) $y=\sqrt{x^2}=|x|$ 和 $y=x$ 有相同的定义域 R,但当 $x<0$ 时,两个函数的对应规则不同,所以 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是不同的函数.

(2) 因为函数 $y=x$ 和函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 的定义域都是 R,且 $\forall x\in R$①都有 $y=\sqrt[3]{x^3}=x$,即两个函数具有相同的对应关系,所以函数 $y=x$ 和函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 是相同的函数.

四、函数的表示法

由定义 1.1 知,两个变量之间的对应规则是确定函数关系的因素之一,至于对应规则以什么方式给出,在函数定义中并未加以限制.在通常情况下,有以下三种方式:

1. 用数学式子表示函数的对应规则,称为公式法(或解析法).

---

① 符号 $\forall$"表示"对于一切",下同.

如本节例 1 中的 $R = 5x$ 就是数学式子表示的一种对应规则，而这个式子 $R = 5x$ 称为函数的解析表达式．

2．用图形表示函数的对应规则，称为图示法，如本节例 3 的图 1－2．

3．用表格表示函数的对应规则，称为表格法，如例 2 中的表 1－1．

我们必须指出：用解析法表示函数时，并不局限于只能用一个表达式．在必要的时候，也可用两个或两个以上的表达式来表示一个函数，对于这种函数我们称之为分段函数．例如函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & 当\ x \geqslant 0 \\ -x & 当\ x < 0 \end{cases}$$

就是一个定义域 $D(f) = (-\infty, +\infty)$ 上的分段函数，这个函数的定义域分为两个子区间．在区间 $(-\infty, 0)$ 上与 x 对应的函数关系为 $f(x) = -x$；在 $[0, +\infty)$ 上与 x 对应的函数关系为 $f(x) = x$；$x = 0$ 是这两个子区间的分界点，亦称分段点，其函数图形如图 1－3 所示．

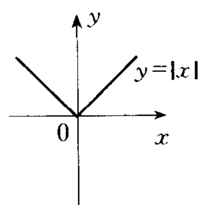

图 1－3

分段函数是用几个解析式合起来表示的一个函数，其定义域则是几个不相交的子区间的并集．

五、 函数定义域的求法

根据函数的定义，若自变量 x 取某一数值 x_0 时，因变量 y 有确定的值 y_0 与之对应，则称函数 f 在 x_0 处有定义．当函数 $y = f(x)$ 是用公式法（或解析法）给出，但又没有给出自变量 x 的取值范围时，其定义域是指使函数表达式有意义的自变量的取值范围．例如，$y = \dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $x \neq 0$ 的全体实数；当函数赋以实际

意义时，函数的定义域就要根据问题的实际意义来确定，如例 2 中的定义域 $D(f)$ 为自然数；例 3 中的定义域 $D(f)=[0,24]$ 等．

如果一个函数是由有限个常用函数经四则运算而得到的，那么，其定义域就是这有限个函数定义域的交集．

例 5 求 $y=\sqrt{x^2-3x+2}+lg(9-3x)$ 函数的定义域：

解 $\because$ y 的表达式由两部分组成，所以其定义域应是各项定义域的交集．为此，x 必须满足

$$\begin{cases} x^2-3x+2\geqslant 0 \\ 9-3x>0 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant 1 \\ x<3 \end{cases}$$

故所给函数的定义域 $D(f)=(-\infty,1]\cup[2,3)$

例 6 已知 $f(3x)=\dfrac{5}{\sqrt{x^2-1}}$，求函数 $f(x)$ 及其定义域

解 $\because$ $f(3x)=\dfrac{5}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{15}{\sqrt{(3x)^2-9}}$

$\therefore$ $f(x)=\dfrac{15}{\sqrt{x^2-9}}$

$\because$ 要使 $f(x)$ 有意义，x 必须满足 $x^2-9>0$，即

$$x>3 \text{ 或 } x<-3,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域 $D=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$．

例 7 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{当 } x\leqslant 1 \\ x^2 & \text{当 } x>1 \end{cases}$

(1) 求其定义域并作函数图形．

(2) 求函数值 $f(-\dfrac{1}{2}),f(2),f(1),f(1-a)$．

解 (1) $\because f(x)$ 为分段函数

$\therefore$ $D(f)=(-\infty,1]\cup(1,+\infty)=(-\infty,+\infty)$

按函数在定义域各子区间上的相应表达式分段作图，则得该函数的图形（见图 1－4）．

(2) $\because \quad -\frac{1}{2} \in (-\infty, 1), 2 \in (1, +\infty)$,

$1 \in (-\infty, 1]$,

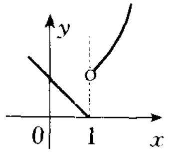

图 1－4

$\therefore \quad f(-\frac{1}{2}) = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$,

$f(2) = 2^2 = 4, f(1) = 1 - 1 = 0$

又 $\because$ 当 $1 - a \leqslant 1$ 即 $a \geqslant 0$ 时, $1 - a \in (-\infty, 1]$,

$\therefore \quad f(1 - a) = 1 - (1 - a) = a$;

而当 $1 - a > 1$ 即 $a < 0$ 时, $1 - a \in (1, +\infty)$,

$\therefore \quad f(1 - a) = (1 - a)^2$.

于是, $\quad f(1 - a) = \begin{cases} a & a \geqslant 0 \\ (1 - a)^2 & a < 0. \end{cases}$

从此例看出:在求分段函数的函数值时,首先应该考虑自变量所在的区间.

习题 1－1

1. 下列各组函数是否相同?为什么?

(1) $f(x) = x$ 与 $f(x) = \tan(\arctan x)$;

(2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ x^3 & x < 0 \end{cases}$ 与 $g(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leqslant 0 \end{cases}$;

(3) $f(x) = \frac{x}{x}$ 与 $g(x) = 1$; (4) $y = f(x)$ 与 $x = f(y)$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; (2) $y = \frac{lg(3 - x)}{\sqrt{x - 1}}$;

(3) $y = \frac{1}{1 - x^2} + \sqrt{1 + x}$; (4) $y = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \sqrt{x - 2} & 2 < x. \end{cases}$