

319

013-33

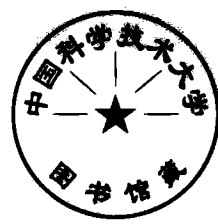
244

高等学校教材

工科数学实验

Engineering Mathematical Experiments

赵静 林琮 但琦 编
严尚安 主审



高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科数学实验/赵静 林琼 但琦编. —北京:高等教育出版社, 2002.6
高等院校工科数学教材
ISBN 7-04-010757-0

I. 工… II. ①赵…②林…③但… III. 高等数学-实验-高等学校-教材 IV. 013-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第007094号

责任编辑	王 强	封面设计	刘晓翔	责任绘图	陈钧元
版式设计	马静如	责任校对	尤 静	责任印制	杨 明

工科数学实验

赵静 林琼 但琦 编

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网 址	http://www.hep.edu.cn
传 真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经 销	新华书店北京发行所	版 次	2002年6月第1版
印 刷	中国农业出版社印刷厂	印 次	2002年6月第1次印刷
开 本	850×1168 1/32	定 价	10.20元
印 张	7.125		
字 数	170 000		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

最近几十年来,由于计算机技术的高速发展,数学的地位发生了巨大的变化。现代科学的一个重要特征就是数学化,高技术从本质上说就是数学技术。现代数学已不再仅仅是其它科学的基础,而是直接发挥着第一生产力的作用。面临数学地位的巨大变化,科学工作者和工程技术人员对数学知识的需求大大增加,这对高等学校数学教育提出了新的更高的要求。

因为数学实验是运用现代计算机技术和软件包来进行数学模型的求解,所以随着高等院校工科数学教学改革的进一步深化,数学实验的重要性也日益显著。由于软件包技术的高速发展,计算机不仅能完成复杂的数值计算,也能进行符号演算、作图等工作。数学实验是计算机技术和数学软件引入教学后出现的新事物。在这门课程中,学生通过亲手“做数学”来“学数学”。学生自己动手,通过计算机和数学软件包计算、尝试、验证、探索、求解。这可以增强学生对数学的认识和兴趣,培养学生用数学知识解决实际问题的能力,激发他们进一步学好数学的愿望,促成数学教学的良性循环。

本教材是为适应国内一般工科院校开设数学实验课的需要而编写的。实验内容与同济大学编写的《高等数学》和《线性代数》教材同步。实验软件采用的是 Mathematica。每个实验分为实验目的、实验内容、实验原理、实验步骤、基础实验作业、综合实验作业几部分。基础知识部分简单介绍本实验所用到的工科数学知识;实验目的部分讲明本实验的目的;实验内容是实验的内容提要;实验步骤是实验课课堂教学内容,既有基础实验,介绍用数学软件包解决相应的数学问题,又有综合实验,介绍对实际问题建立数学模

型,并用数学软件包求解数学模型;实验作业是供学生课后实验的,也分为基础实验和综合实验。通过本教材的学习,使学生深入理解《高等数学》和《线性代数》课程中的基本概念和基本理论,熟练使用 Mathematica 软件,培养学生运用所学知识建立数学模型,使用计算机解决实际问题的能力。

数学实验重在实践。希望同学们多上机、多动手,在实践中学习和进步。

目 录

实 验 一	Mathematica 入门	1
实 验 二	一元函数的图形与极限	18
实 验 三	一元函数微分学	39
实 验 四	一元函数积分学	56
实 验 五	空间曲面及曲线的描绘	71
实 验 六	多元函数微分法及应用	86
实 验 七	重积分	111
实 验 八	曲线积分与曲面积分	126
实 验 九	级数	146
实 验 十	微分方程	164
实验十一	矩阵与线性方程组	178
实验十二	施密特正交化、几何变换、线性变换的特征 向量	197
附 录	Mathematica 常用语句分类	212
参考文献		220

实验一 Mathematica 入门

实 验 目 的

- [1] 掌握 Mathematica 的基本操作.
- [2] 掌握 Mathematica 的基本命令.
- [3] 了解 Mathematica 的基本编程语句.

实 验 内 容

- [1] Mathematica 的基本操作.
- [2] Mathematica 的基本命令.
- [3] Mathematica 编程入门.

实 验 步 骤

一、了解 Mathematica

Mathematica 是集文本编辑、数学计算、逻辑分析、图形、声音、动画于一体的高度优化的专家系统. 它是目前比较流行的符号运算软件之一. Mathematica 的最显著特点是它的符号及高精度的运算功能. 在 Mathematica 中可以进行各种数值和符号运算; 可以完成微积分、线性代数等数学各个分支中公式的推演; 可以利用数值法求解线性方程、优化等问题. 在大学教育和科学研究中, Mathematica 都是不可缺少的工具.

Mathematica 的原始系统是由美国物理学家 Stephen Wolfram 领导的一个小组开发用来进行量子力学研究的。软件开发的成功促使 Stephen Wolfram 于 1987 年组建 Wolfram 研究公司,并推出该公司的商品软件 Mathematica 1.0 版。此后,Wolfram 公司通过对 Mathematica 的不断改进和扩充,陆续推出 1.2 版、2.0 版和 1996 年的 3.0 版等。

Mathematica 的基本系统是使用 C 语言编写的,因此能方便地移植到各种计算机系统上。尽管 Mathematica 有各种各样的版本,但它们有一个共同的内核,Mathematica 的各种运算都是由内核来完成的。给内核配置不同的前端处理器,就成为适用于各种环境的版本。它的 DOS 版本的特点是运算速度快、对系统的配置要求较低;它的 MS - Windows 版本利用 Windows 环境,使用方式和用户界面都有了重大改进,特点是图文并茂,操作方便。这里所介绍的就是 Windows 环境下的 Mathematica 4.0 版本。

二、Mathematica 的基本操作

现在让我们来看一下如何利用 Mathematica 进行工作。

(一) 进入 Mathematica

在 Windows 环境下安装好 Mathematica,用鼠标双击 Mathematica 图标即可进入 Mathematica。它首先显示版本信息,如果你是新用户,它将要求你登记账号和输入密码,过一会就会出现一个空白的工作窗口,称为工作区,Mathematica 将第一个工作区称为 Newnb - 1。你可以同时打开多个工作区,Mathematica 将它们分别命名为 Newnb - 2, Newnb - 3, ..., 你可以对每一个工作区使用不同的名字保存。今后我们的工作都是在工作区中进行的。

(二) 在 Mathematica 中运算

1. 逐条运算

在工作区中输入你想要运算的表达式和指令,按 Shift + Enter 组合键,命令 Mathematica 进行计算,如输入

$$2 + 2$$

然后按 Shift + Enter 组合键,几秒钟后会出现

$$\text{In}[1]: = 2 + 2$$

$$\text{Out}[1] = 4$$

Mathematica 将输入的指令用标题“ $\text{In}[n]: =$ ”标识,输出结果用“ $\text{Out}[n] =$ ”标识,其中数字“ n ”表示已经输入的指令数。

2. 运算整个工作区

为了方便用户,Mathematica 建立了文件管理系统。你可以将你需要的所有运算或程序写入一个工作区,然后在 Mathematica 的主菜单中点“Kernel”,再选“Evaluation - Evaluate Notebook”一栏,则整个工作区中的命令就全部依次运算出来。

当你完成一些计算后不得不中断,但你又希望再次开始工作时继续以前的计算时可以按如下步骤进行:

(1) 在 Windows 版本下退出 Mathematica 时系统会问你是否保存计算结果,回答“是”。然后系统要求你指定文件名,你可任意给定一个文件名,比如“abc.nb”。用鼠标确认“Ok”后系统就将该文件存在 Mathematica 的子目录下。

(2) 再次进入 Mathematica 的 Windows 版本后,先打开该文件。再选“Kernel - Evaluation - Evaluate Notebook”一栏。按动鼠标后就可以继续上次的计算。

(三) 退出 Mathematica

当你结束 Mathematica 的工作时,可以选择“File”菜单中的“Exit”选项或单击关闭按钮。Mathematica 会询问你是否保存对打开工作区内容的修改,选择“Yes”保存文件;选择“No”放弃保存;选择“Cancel”取消这次退出操作并返回 Mathematica。

三、Mathematica 语言入门

(一) 算术运算

Mathematica 是多功能的计算工具。它的最基本的功能是进行

算术四则运算.

1. 基本运算符号

加号: + 减号: - 乘号: * 除号: / 指数: ^

2. 算术运算的输入方式

expr: 直接输入表达式. 当输入的式子中的所有数字都不含小数点时, 输出结果是完全精确的(不管含有多少位, 也可能是不可约分式).

N[expr]: 要求计算表达式的近似数值结果.

N[expr, n]: 要求计算表达式的数值, 并给出 n 位十进制.

注意: 表达式里的括号只允许是圆括号(无论有多少层).

例 1 $\text{In}[1]:=2*(3+4)-2^{\wedge}(2+1)$

$\text{Out}[1]=6$

这里 $\text{In}[1]:=$ 后面输入的是一个算术表达式. $\text{Out}[1]$ 后面是计算结果.

3. 简单的调用方式

有时在后面的计算中可能要用到前面已经计算过的结果. 这时 Mathematica 提供一种简单的调用方式:

Mathematica 命令	含 义
%	代表上一个输出结果
%%	代表上面倒数第二个输出结果
% n	代表上面第 n 个行的输出语句的结果

例 2 $\text{In}[1]:=2^{\wedge}2$

$\text{Out}[1]=4$

$\text{In}[2]:= \% + 5$

$\text{Out}[2]=9$

$\text{In}[3]:= \% 1 - \% 2$

$\text{Out}[3]=-5$

4. 长表达式的输入

Mathematica 是允许一个表达式占用多个输入行的.

例 3 (3

+ 5
)

注意: 必须在指令或语法告一阶段而又不完整的地方按 ENTER 键换行.

(二) 常数与内部函数

Mathematica 中具有几百个常用的数学函数, 包括基本初等函数和一些特殊函数. 下面给出一些常用的常数和内部函数.

1. 重要常数

Mathematica 符号	含 义
E	$e \approx 2.71828$
Pi	$\pi \approx 3.14159$
I	$\sqrt{-1}$
Degree	$\frac{\pi}{180}$
Infinity	$+\infty$
- Infinity	$-\infty$

注意: 重要常数第一字母都以大写字母表示

2. 常用内部函数

Mathematica 符号	含 义
x^a	幂函数 x^a
Abs[x]	x 的绝对值 $ x $
Sqrt[x]	x 的平方根 $\sqrt{x}$
Exp[x], a^x	指数函数 e^x, a^x
Log[x]	自然对数 $\ln x$
Log[b, x]	以 b 为底的对数 $\log_b x$
Sin[x], Cos[x], Tan[x], Cot[x]	三角函数 (以弧度为单位)
ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x], ArcCot[x]	反三角函数

续表

Mathematica 符号	含 义
$\text{Sinh}[x]$, $\text{Cosh}[x]$, $\text{Tanh}[x]$, $\text{Coth}[x]$	双曲函数 $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$
$\text{ArcSinh}[x]$, $\text{ArcCosh}[x]$ $\text{ArcTanh}[x]$, $\text{ArcCosh}[x]$	反双曲函数 $\text{arcsinh } x$, $\text{arccosh } x$, $\text{arctanh } x$, $\text{arccot } x$
$\text{Round}[x]$	x 的整数值
$\text{Random}[]$	在 0 和 1 之间的随机数

注意:

- ① Mathematica 内部函数的第一字母都必须以大写开头,不能用小写开头.
- ② 函数需用 $[]$ 括号括自变量,不用 $()$ 括自变量,以便让计算机区分相乘和函数关系的两种不同情况.

(三) 定义变量和函数

1. 定义变量

在 Mathematica 中,变量是以字母开头的字符串,后接字母、数字或下划线,在它们中间不能有空格. 变量名的长度没有限制. 为了与内部函数加以区分,建议尽量用小写字母来定义自己的变量;当你必须使用大写字母开头的变量时,注意不能与 Mathematica 的内部函数名称相同.

2. 变量赋值

对于变量,你可以对其赋值,格式见下表.

假如你已经将变量 x 赋了一个值,那么系统在以后运算中遇到变量 x ,它会自动将值代入进行计算. 因此,当你完成计算以后,应及时清除不必要的变量值,以免对今后的计算有影响. 方法见下表.

Mathematica 命令	含 义
$x = \text{value}$	给 x 定义一个永远使用的值
$x = y = \text{value}$	同时给 x, y 定义一个永远使用的值
$x = y$	把 y 的值赋给 x
$\text{expr}/. \{x \rightarrow xval, y \rightarrow yval\}$	在表达式 expr 中进行几个代换(赋值)
$x = .$ 或 $\text{Clear}[x]$	清掉给 x 定义的任何值

3. 自定义函数

Mathematica 可以使我们方便地定义自己需要的函数. 它的一般格式如下.

Mathematica 命令	含 义
$f[x_]:=expr$	定义以 x 为自变量的函数
$f[x_ , y_ , \dots] := expr$	定义以 $x, y, \dots$ 为自变量的函数
$? f$	显示 f 的定义
$Clear[f]$	清除对 f 的所有定义

注意:① 下划线“_”是必不可少的,它代表 $x, y, \dots$ 是函数 f 的变量.

② 在定义函数时,使用的符号是延迟赋值符号“:=”.

例 4 定义 $y = f(x) = 1 + x^2$, 并求出 $f(2)$.

解 输入: $f[x_]:=1+x^2$

$f[2]$ 或 $f[x]/. \{x \rightarrow 2\}$

结果: 5

例 5 定义 $f(x, y) = x^2 + y^2$, 并求出 $f(a, b)$.

解 输入: $f[x_ , y_]:=x^2+y^2$

$f[a, b]$ 或 $f[x, y]/. \{x \rightarrow a, y \rightarrow b\}$

结果: $a^2 + b^2$

例 6 设 $f(x, y) = 5 + 6x^2 + x^3 + x^4 y$.

(1) 用 $z+1$ 代换 x ;

(2) 赋值 $x=1, y=2$, 求 f 的值.

解 输入: $f[x_ , y_]:=5+6*x^2+x^3+x^4*y$

(1) 输入: $f[x, y]/. \{x \rightarrow z+1\}$ 或 $f[z+1, y]$

结果: $5+6(z+1)^2+(z+1)^3+(z+1)^4 y$

(2) 输入: $f[x, y]/. \{x \rightarrow 1, y \rightarrow 2\}$ 或 $f[1, 2]$

结果: 14

(四) 表的生成

表是 Mathematica 系统中的一种表示结构, 用于把一些表达式

聚集起来成为一个整体。表的本身并无特定的意义,它用于表示一些需要由多个表达式来表示的对象。

Mathematica 的表达式为: $\{a, b, c, d, \dots\}$, 其元素也可以为表, 甚至其他任何形式的元素。用表也可表示集合, 形式上无区别。表可以为一层或更多层, 如 $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{6, 7\}\}$ 等。常见的有单层、二层、三层表。

表的生成有很多种方法, 如直接键入语句 $gg = \{\{1, 2\}, \{6, 7\}\}$, 表示将该表赋给 gg 变量。下面介绍另外两种方法。

Mathematica 命令	含 义
<code>Range[nmin, nmax, dn]</code>	以 dn 为步长, 从 $nmin$ 到 $nmax$ 生成数值表。
<code>Table[expr, {n, nmin, nmax, dn}]</code>	以 dn 为步长, 从 $nmin$ 到 $nmax$ 按表达式 $expr$ 生成表。

当 $dn = 1$ 时, 可以省去不写; $dn = 1$ 且 $nmin = 1$ 时, 两者皆可省去。当 $nmax < nmin$ 时, dn 也可以取负值。

例 7 输入: `Range[2, 8, 0.5]`

结果: $\{2, 2.5, 3., 3.5, 4., 4.5, 5., 5.5, 6., 6.5, 7., 7.5, 8.\}$

输入: `Range[2, 12]`

结果: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

输入: `Range[10]`

结果: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

例 8 输入: `Table[n^2, {n, 2, 6}]`

结果: $\{4, 9, 16, 25, 36\}$

输入: `Table[n^2, {n, 6}]`

结果: $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

(五) 解方程

Mathematica 不但能解代数方程, 同时也能解超越方程。当然有时它不能求出方程的精确解, 但通常都可以求得方程的近似数

值解。这对一般工程中的计算要求已经是足够了。

1. 求一元(多项式)方程的精确解

Mathematica 命令	含 义
Solve[lhs == rhs, x]	给出一个代数方程的一般解, 不考虑其中参数的特殊取值.
Roots [lhs == rhs, x]	给出一个代数方程的一般解, 不考虑其中参数的特殊取值.
Reduce [lhs == rhs, x]	给出方程全部可能的解.

注意: 输入方程时, 必须用“==”代替“=”。

例 9 求下列方程的解:

- (1) $x^3 + 3x + 1 = 0$;
- (2) $x^6 - 12x^4 + 44x^2 - 48 = 0$;
- (3) $ax^2 + bx + c = 0$;
- (4) $x^5 + 5x + 1 = 0$.

解 (1) 输入: Solve[$x^3 + 3x + 1 == 0, x$]

或: Roots[$x^3 + 3x + 1 == 0, x$]

或: Reduce[$x^3 + 3x + 1 == 0, x$]

结果:

$$x == - \left(\frac{2}{-1 + \sqrt{5}} \right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \right)^{1/3} \parallel x ==$$

$$- \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \left(\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \right)^{1/3} + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2^{2/3}(-1 + \sqrt{5})^{1/3}} \parallel$$

$$x == - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \left(\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \right)^{1/3} + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2^{2/3}(-1 + \sqrt{5})^{1/3}} \parallel$$

(2) 输入: Solve[$x^6 - 12x^4 + 44x^2 - 48 == 0, x$]

或: Roots[$x^6 - 12x^4 + 44x^2 - 48 == 0, x$]

或: Reduce[$x^6 - 12x^4 + 44x^2 - 48 == 0, x$]

结果: $x == -2 \parallel x == 2 \parallel x == -\sqrt{2} \parallel x == \sqrt{2} \parallel$

$$x == -\sqrt{6} \parallel x == \sqrt{6}$$

(3) 输入: $\text{Solve}[a * x^2 + b * x + c == 0, x]$

或: $\text{Roots}[a * x^2 + b * x + c == 0, x]$

$$\text{结果: } x == \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \parallel x == \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

若输入: $\text{Reduce}[a * x^2 + b * x + c == 0, x]$

结果:

$$a \neq 0 \& x == \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \parallel$$

$$a \neq 0 \& x == \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \parallel c$$

$$== 0 \& b == 0 \& a == 0 \parallel$$

$$b \neq 0 \& x == -\frac{c}{b} \& a == 0$$

由此例可看出 Reduce 函数与另外两个函数的区别.

(4) 输入: $\text{Solve}[x^5 + 5x + 1 == 0, x]$

或: $\text{Roots}[x^5 + 5x + 1 == 0, x]$

或: $\text{Reduce}[x^5 + 5x + 1 == 0, x]$

$$\text{结果: } x == \text{Root}[1 + 5 \# 1 + \# 1^5 \&, 1] \parallel$$

$$x == \text{Root}[1 + 5 \# 1 + \# 1^5 \&, 2] \parallel$$

$$x == \text{Root}[1 + 5 \# 1 + \# 1^5 \&, 3] \parallel$$

$$x == \text{Root}[1 + 5 \# 1 + \# 1^5 \&, 4] \parallel$$

$$x == \text{Root}[1 + 5 \# 1 + \# 1^5 \&, 5]$$

由于 Mathematica 不能对此方程给出显式的公式解, 故只给出上面的隐式符号解.

方程的隐式符号解虽然是以符号形式给出的, 而且是隐式的, 但是可以对其象对其它表达式一样处理.

输入: $N[\%]$

得方程的数值解:

$$x == -0.199936102171220007 \parallel$$

$x == -1.00449745579683558 \cdot -1.0609465064060406 \cdot I$
 $x == -1.00449745579683558 \cdot +1.0609465064060406 \cdot I$
 $x == 1.1044655068824456 \cdot -1.05982966915252019 \cdot I$
 $x == 1.1044655068824456 \cdot +1.05982966915252019 \cdot I$

2. 求一元方程的数值近似解

Mathematica 命令	含 义
<code>NSolve[lhs == rhs, x]</code>	给出一个代数方程的数值解.
<code>NRroots [lhs == rhs, x]</code>	给出一个代数方程的数值解.
<code>FindRoot[lhs == rhs, { x, x0 }]</code>	求方程的数值解, 初值为 x_0

例 10 求下列方程的数值近似解:

- (1) $x^3 + 3x + 1 = 0$;
 (2) $x^5 + 5x + 1 = 0$;
 (3) $\ln x + x \sin x = 3$.

解 (1) 输入: `NSolve[  $x^3 + 3x + 1 == 0$ , x ]`

结果:

$x == -0.322185354626085596 \cdot$
 $x == 0.161092677313042802 \cdot -1.75438095978372166 \cdot I$
 $x == 0.161092677313042802 \cdot +1.75438095978372166 \cdot I$

(2) 输入: `NSolve[  $x^5 + 5x + 1 == 0$ , x ]`

或: `NRroots[  $x^5 + 5x + 1 == 0$ , x ]`

结果:

$x == -1.00449745579683558 \cdot -1.0609465064060406 \cdot I$
 $x == -1.00449745579683558 \cdot +1.0609465064060406 \cdot I$
 $x == -0.199936102171220007 \cdot$
 $x == 1.1044655068824456 \cdot -1.05982966915252019 \cdot I$
 $x == 1.1044655068824456 \cdot +1.05982966915252019 \cdot I$

(3) 输入: `NSolve[  $\text{Log}[x] + x * \text{Sin}[x] == 3$ , x ]`