

结构杆件的扭转解析

【日】高岡宣善 著

中 国 铁 道 出 版 社

结构杆件的 扭转解析

〔日〕高岡宣善 著

韩 毅 译

劳 远 昌 校

中 国 铁 道 出 版 社

1978 2 年 · 北 京

内 容 提 要

本书介绍扭转与翘曲的基本理论,包括开口薄壁断面和闭口薄壁断面有关扭转轴、固有扭转中心剪切中心等关系的讨论及计算方法。

读者对象 大学工科学生及一般工程技术人员

構造部材のねじり解析

高岡宣善 著

共立出版株式会社

1975年版

结构杆件的扭转解析

〔日〕高岡宣善 著

韩毅 译 劳远昌 校

中国铁道出版社出版

责任编辑 王能远 封面设计 王毓平

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{2}$ 印张: 5 字数: 114 千

1982年7月 第1版

1982年7月 第1次印刷

印数: 0001—6,000册 定价: 0.55元

序

本书是以大学本科学学生及一般工程技术人员为对象，作为学习结构杆件扭转理论的教科书或参考书而编写的。

本书的原稿是作者于1963~1965年在德意志联邦共和国斯图加特 (Stuttgart) 工科大学留学期间，在作者的导师已故W. Pelikan教授，以及F. W. Born-Scheuer教授的指导下汇编而成的。因为当时没有关于结构杆件扭转的合适学习用书，经向Pelikan教授提出，导师当即指示可以学习 Chwalla 教授的《Einführung in die Baustatik》。恰好，当时又在听Bornscheuer教授关于扭转的讲座，在听课过程中，又根据自己的一些想法，准备了本书的初稿。

本书的内容如下：

第一章回顾了关于扭转理论的发展历史，并且阐述了在扭转理论中起重要作用的所谓“翘曲”的概念。在本章中出现的“平面翘曲型断面”及“曲面翘曲型断面”是著者所起的临时译名，希望将来有更确切的叫法。

第二章叙述了圣维南的扭转理论。第三章阐述了翘曲约束扭转。在此两章中都是先阐述开口断面理论，然后阐述闭口断面理论，并对扭转轴（固有扭转中心、剪切中心）的物理意义作了详细说明。第四章阐述了扭转理论中的固有扭转中心与弯曲理论中的剪切中心之间的关系。

为使读者在理论上和实用上都能充分地理解，本书列有丰富的例题。

出版本书时蒙共立出版株式会社诸位的多方帮助，仅此

志谢，并对给予留学机会的德意志大学交换工作委员会表示衷心的感谢。

高岡宣善

目 录

第 1 章 绪言	1
1.1 历史考察	1
1.2 平面翘曲型断面与曲面翘曲型断面	3
1.3 自由扭转与约束扭转	4
第 2 章 自由扭转 (纯扭转)	6
2.1 圣维南 (St. Venant) 理论	6
2.2 简单例题	19
2.3 相似理论	33
2.3.1 皂膜的相似理论	33
2.3.2 流体力学的相似理论	40
2.4 薄壁开口断面的自由扭转	41
2.4.1 薄壁开口断面的翘曲	42
2.4.2 薄壁开口断面杆的扭转刚度和剪应力	54
2.5 薄壁闭口断面的自由扭转	56
2.6 薄壁闭口断面的翘曲	65
2.7 薄壁多室闭口断面的自由扭转	72
第 3 章 翘曲约束扭转	80
3.1 概说	80
3.2 平面翘曲型断面杆的约束扭转	81
3.3 曲面翘曲型断面杆的翘曲约束扭转	84
3.4 薄壁开口断面的翘曲正应力	87
3.5 固有扭转中心位置的确定	90
3.6 薄壁开口断面的二次剪应力	97
3.7 开口断面悬臂梁的翘曲约束扭转	107

3.8 薄壁闭口断面杆的翘曲约束扭转	115
第4章 根据弯曲理论确定剪切中心	132
4.1 概述	132
4.2 具有薄壁开口断面的等断面梁的剪切中心	136
4.3 薄壁单室闭口断面的剪切中心	145
4.4 剪切中心与固有扭转中心的关系	153
参考书	154

第1章 绪 言

1.1 历史考察

开始详细研究扭转理论的是 C.A.Coulomb (1738—1806)。这位对18世纪的弹性理论及力学的发展作出了重大贡献的学者，从1781年前后就着手研究电与磁。为了测定微量的电力及磁力，他制作了灵敏的扭秤，用以测量电线的扭转阻抗。以此为开端，扭转理论逐渐得到发展。

Navier (1785—1836) 继承了 Coulomb 的理论。Navier 原封不动地采用了 Coulomb 所开展的圆形断面杆的扭转理论，假定横断面为任意形状的杆，在承受扭转时其横断面也仍保持为平面。但由 Jacob Bernoulli (1654—1705) 所提出的关于保持平面的假定，一般并不能适用于圆形以外任意形状的横断面杆件的扭转。下面的理论分析将阐明这个问题，同时 Duleau 在 1820 年前后所进行的实验也证明了这一点。

Duleau 首先进行了圆形断面杆的扭转实验。他在“杆的横断面保持平面，在此横断面内某一个半径，在扭转后仍为原来的直线”的假定前提下，导出了求扭转角的公式，与 Coulomb 的理论一致。Duleau 进一步进行了长方形断面杆的扭转实验，但是这时发现了，关于圆形断面杆所设立的假定已经不能成立。该项理由我们可以参考图 1.1 来分析。

图 1.1(a) 及 (b) 分别为圆形断面及长方形断面杆，承受着由作用于杆的两端的扭矩 M 所产生的扭转。与杆的轴向（长向）平行的纵向纤维，当杆受扭时呈螺旋状变形。现在，在杆的表面上，用 γ 来表示变形后的纵向纤维与杆的轴

向所形成的微小角度。如图1.1(a)所示, 圆形断面杆的微小元素 $dr \cdot r d\theta \cdot dz$ 的各隅角处的夹角, 在变形之前都是 90° 。假设变形前为平面的横断面, 变形后仍保持为平面。变形状态如图(c)所示, 原来为 90° 的隅角处的角度, 变形后成为 $90^\circ - \gamma$ 。与此变形相对应, 在微小元素的四个面上作用着如图所示的剪应力。根据共轭剪应力规律(此规律是Cauchy发现的)*, 有 $\tau_{rz} = \tau_{\theta z}$ 的关系。

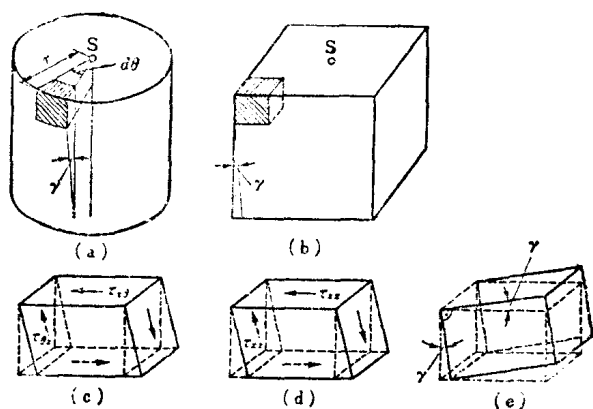


图1.1 横断面的翘曲

其次, 让我们来研究图1.1(b)中的长方形断面杆的隅角处的微小六面体 $dx \cdot dy \cdot dz$ 。当此杆受扭转时, 与圆形断面一样, 产生剪应变 γ 。如果假设在变形之前为平面的横断面, 变形以后仍保持为平面的话, 此时的变形状态及应力状态应如图(d)所示。但是因为作为外力只考虑了作用于杆的两端的扭转力矩 M_t , 所以实际上不可能有如图(d)那样

* 在相互垂直的两个平面上, 作用于与此二平面的交线(即棱)成垂直方向上的一对剪应力, 其值相等, 而且两者都朝向交线, 或者背离交线。

的应力状态和变形状态，因为在杆的 z 轴方向* 的表面（侧面）上并没有任何应力（即外力）也就是说，在长方形断面的隅角处 $\tau_{xz} = 0$ ，所以根据共轭剪应力规律 τ_{xz} 也等于零。那么隅角处唯一可能的变形状态和应力状态成为图（e）所示的那样。在这种变形状态中的隅角处，横断面垂直于变形后的纵纤维。因为这种变形状态在横断面的四个隅角处都可成立，所以长方形断面杆受扭后，横断面已经不可能再保持为平面。也就是说，杆受扭时，其断面一般地在杆轴方向（ z 方向）发生翘曲。这样便证明了Navier的假定是不正确的。为了解决由横断面保持平面的假定所归结出来的矛盾，如上所述引入了一个新的概念，即横断面的翘曲（Verwölbung; Warping），其后不久，A. Cauchy（1789—1857）把它纳入了理论研究之中。对长方形断面杆的扭转问题具有很大兴趣的 Cauchy，利用弹性理论成功地找出了细长的长方形杆的扭转的解，指出受扭的杆的横断面一般不能保持为平面。其后，Barré de Saint—Venant（1797—1886）利用Cauchy 所获得的结论，又将扭转理论推向了更大的发展。他于1853年向巴黎学士院提出了关于扭转理论的论文，该理论今日已经以他的名字命名。当时的学士院力学部门拥有如 Cauchy, Poncelet（1788—1867），Piobert, Lamé（1795—1870）等杰出的会员。

1.2 平面翘曲型断面与曲面翘曲型断面

如前节所述，当杆件中作用着扭转应力时，杆的各横断面除了转动 θ 角（绕扭转中心）以外，在一般的情况下也沿杆件的轴向移位（即横断面发生翘曲）。现在取通过杆的横断面重心 S 的任意直角坐标轴 x 和 y ，并取与 x 、 y 轴垂直

* 关于坐标轴的取法，参阅后面的图2.1

的 z 轴, 使杆件轴与 z 轴一致 (参阅后面的图2.1), 此时, 如果杆件位移时不受任何约束, 杆的轴向位移, 也就是翘曲 w , 一般地是 x 及 y 的函数, 可用 $w = f(x, y)$ 表示。若 $w = 0$ 则变形前的横断面与变形后的横断面一致。若 w 为 x 与 y 的线性函数, 则杆的各横断面受扭后也保持为平面, 但变形后的横断面与变形前的横断面并不一致。进一步若 w 不能用 x 与 y 的线性函数表示时, 则杆的横断面受扭后也非平面。变形前为平面的横断面, 变形后是否仍为平面, 取决于横断面的形状。 w 能用 x 与 y 的线性函数表示时的横断面形状称为平面翘曲型断面 (Wölbfreier Querschnitt), 除此以外的横断面形状, 称为曲面翘曲型断面 (nichtwölbfreier Querschnitt)。例如圆形断面、圆管形断面、T型断面等为平面翘曲型断面, 而正方形断面、三角形断面、工型断面等则为曲面翘曲型断面。

1.3 自由扭转与约束扭转

杆在受扭时产生的杆件轴向位移 w , 视杆的支承方式及加载方式而定, 受到约束或者不受到约束。在变形时翘曲 w 不受任何约束的扭转称为自由扭转或纯扭转 (reine Torsion, zwangfreie Drillung; pure torsion, uniform torsion), 变形时翘曲 w 受到约束的扭转称为翘曲约束扭转 (Wölbkrafttorsion, Zwängungsdrillung; warping torsion, non-uniform torsion)。自由扭转是由 Saint-Venant 开始进行详细研究的, 所以它也称为 St-Venant 扭转。

可以认为杆是由无数的平行于杆轴方向的 (纵向) 纤维组成。当这样的杆受扭时, 这些无数根纵向纤维中的某一根, 将不产生变形而保持原来的形状和位置, 其它的纵向纤

维则形成螺旋状。在 St-Venant 理论中，因为按微小变形处理，所以可以认为这些纵纤维在受扭后仍然是直线（但这些纵纤维在变形后已非相互平行）。上面所说的不产生变形的纵纤维称为扭转轴（Drehachse, Drillachse），扭转轴与杆的横断面的交点称为扭转中心（Drillruhepunkt, Center of torsion）。正如后面将说到的，在自由扭转的情况，无论将扭转中心取在横断面上的任何地方，对翘曲均无本质的影响，所以可以从无数根纵纤维中选取任何一根作为扭转轴。

第2章 自由扭转

2.1 圣维南 (St-Venant) 理论

如前所述, 所谓自由扭转, 即杆的横断面的翘曲不受约束时的扭转, 也称为 St-Venant 扭转。下面分析的杆件为具有等断面的直杆, 假定其断面为由任意的单室闭合曲线所形成的实心断面。在自由扭转中, 因为不论扭转轴通过横断面内的任何地方, 对翘曲均无本质的影响, 所以现在假设扭转轴与杆件轴一致。因此, 在图 2.1(a) 所示的直角坐标轴 x 、 y 、 z 中, 使设置在杆的左端的横断面内的任意正交轴 x 与 y 的原点与横断面的重心 S 一致, 而 z 轴与杆轴一致, 并假设绕 z 轴作用有扭转力矩, 且杆的长度为 l 。

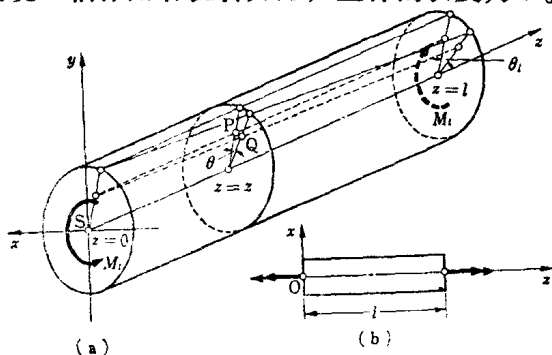


图 2.1 坐标轴与符号

作为外力, 在杆的两端沿图示的方向作用着一对扭转力矩 M_t 。此时在任意横断面 ($z = z$) 上出现的断面力只有扭转力矩 M_d ($= M_t = \text{常数}$)。扭转力矩也可以用图 2.1(b) 中的双箭头表示。当箭头如图所示朝向杆件的外侧时, M_t

取正号。

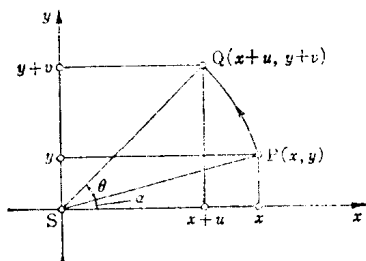


图2.2 横断面的转动

现在以杆的左端横断面为基础，将右端面 ($z = l$) 及任意横断面 ($z = z$) 的转角分别以 θ_1 及 θ 表示，则

$$\theta = \theta(z) = \frac{z}{l} \theta_1 \quad (2.1)$$

从而，设在 $z = z$ 横断面上的一个点 $P(x, y)$ ，当于横断面重心 S 处作用有扭转力矩 M_d 时，移动至点 $Q(x+u, y+v)$ ，由图2.2得出，

$$\left. \begin{aligned} x+u &= r \cos(\theta + \alpha) \\ y+v &= r \sin(\theta + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

但是由于根据假定变形量 θ 很小，所以可以近似地认为 $\cos \theta = 1$ ， $\sin \theta = \theta$ ，于是 (2.2) 变为

$$x+u = r(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) = x - y\theta$$

$$y+v = r(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) = x\theta + y$$

从而点 P 的 x 轴方向及 y 轴方向的位移 u 及 v 分别为

$$\left. \begin{aligned} u &= -y\theta = -\frac{\theta_1}{l}zy \\ v &= +x\theta = \frac{\theta_1}{l}zx \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

在这里引入用

$$\omega = \frac{\theta_l}{l} = \frac{d\theta(z)}{dz} \quad (2.4)$$

定义的扭转率,

$$u = -\omega y z, \quad v = \omega x z \quad (2.5)$$

由式 (2.4) 可知, ω 为在杆件轴向的单位长度上的扭转角, 其单位为 cm^{-1} 。

其次分析一下横断面在 z 轴方向的位移, 即翘曲。如第一章所述具有与圆形断面那种特殊断面不同的任意断面形状的杆件, 当承受扭转时, 在横断面上产生翘曲。St.-Venant 假定该项翘曲在所有的横断面上是相同的, 并设

$$w(x, y) = \omega \cdot \phi_s(x, y) \quad (2.6)$$

这里 $\phi_s(x, y)$ 是与 x 和 y 以及扭转中心的位置 (现在是取横断面的重心 S 为扭转中心) 有关的函数, 此函数的性质, 将在后面分析。因为若 $\omega = 1$, 则 $\phi_s(x, y)$ 与 z 轴方向的位移 $w(x, y)$ 相等, 所以 $\phi_s(x, y)$ 称为关于点 S 的单位翘曲函数 (Einheitsverwölbungsfunktion, unit warping function)。

式 (2.5) 及式 (2.6) 表达由扭转所引起的变形是按 St.-Venant 假定得来的。其次关于外力 St.-Venant 作了如下三个假定:

- i) 没有体积力。
- ii) 没有沿杆的轴向的侧面 (表面) 外力。
- iii) 作用于杆的两端断面上的外力, 可用静力等效的扭转力矩 (扭矩) 置换。

在上述假定的基础上, 将式 (2.5) 及式 (2.6) 代入关于弹性体的应变的基本方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

中便得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} &= \omega \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x} - y \right) \\ \gamma_{yz} &= \omega \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

从而与式 (2.8) 对应的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} &= G\omega \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} &= G\omega \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

式中 G 为杆材料的剪切弹性模量。

将式 (2.9) 的应力分量代入弹性体的平衡基本方程*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

中 (注意体积力 $X=Y=Z=0$)，便得

* 式 (2.10) 中 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ (共轭剪应力规律)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

上式的前二式成为恒等式，又由式 (2.9) 及式 (2.11) 的第三式可得拉普拉斯 (Laplace) 微分方程如下

$$\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial y^2} \equiv \Delta \varphi_s = 0 \quad (2.12)$$

但是在横断面的周边上 (该项周边曲线称为 Γ)，剪应力 τ 必须沿着曲线 Γ 的切线方向，因为如图 2.3 所示如果 Γ 上任意一点 P 的剪应力 τ 不沿着 Γ 的切线方向，则可将此 τ 分解为切线方向的分量 τ_t 和法线方向分量 τ_n ，但是根据共轭剪力规律，伴随着作用于横断面上的法线方向剪应力 τ_n ，必定有作用于侧面上的剪应力 τ_n ，然而实际上并没有后者，从而得知 $\tau_n = 0$ ，故 $\tau = \tau_t$ ，所以在周边 Γ 上 τ 切于 Γ 。

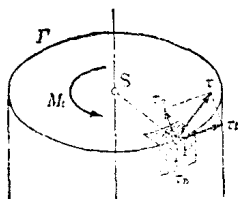


图2.3 横断面周边上的剪应力

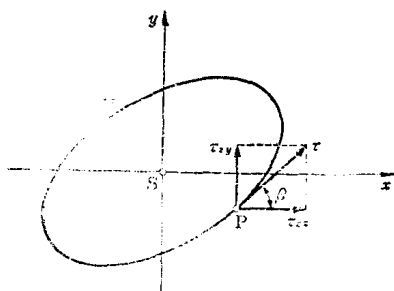


图2.4 周边 Γ 上剪应力的分解

又如图 2.4 所示，将 Γ 上的剪应力 τ 分解为 x 轴方向分量及 y 轴方向分量，则得如下的关系：

$$\tan \beta = \frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xz}}$$

$$\therefore \tau_{xy} dx - \tau_{xz} dy = 0$$

将式 (2.9) 代入上式，得