线性代数学习指导

戴宗儒　李志毅　郑耶文　　主编

科学技术文献出版社

线性代数学习指导

主编　戴宗儒　李志煦　郑郁文

编写　李贵彬　向　阳　王尚文

　　　朱渭川　杨溪兰　姜世民

主审　崔福荫　曹承宾

科学技术文献出版社

1 9 8 9

内 容 简 介

本书内容包括：行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、相似矩阵、投入产出数学模型。各章均有自测练习题和答案。全书配有综合自测试题，并附参考答案。

本书文字叙述简练、通俗易懂，便于自学，可作为财经类大专院校、职业大学、管理干部学院、业大、电大以及函授学员的学习指导书，也可作为教师的教学参考书。

线性代数学习指导

戴宗儒等 主编

科学技术文献出版社出版

北京京辉印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

787×1092毫米 32开本 9.625印张 214千字

1989年4月北京第一版第一次印刷

印数：1—11700册

科技新书目：190—127

ISBN 7-5023-0591-2/O·7

定价：3.25元

前　　言

为了适应财经类大专学生学习和教学的需要，我们编写了这套经济应用数学基础系列学习指导丛书。全套丛书包括《微积分学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》、《线性代数学习指导》、《线性规划学习指导》共四册。

每一册分章编写，每一章都包括如下六个部分：

（一）基本内容部分：用精练的语言分条分款概述本章主要内容，目的使读者对本章的主要内容理出一个系统和层次；

（二）学习要求部分：把本章的学习要求分几点说清，指出读者应掌握什么，了解什么，理解什么，并指出重点和难点；

（三）答疑解惑部分：指出读者学习过程中可能会提出的问题或易混淆的概念，拟出题目并作出回答；

（四）典型题分析部分：每章都有针对性地举出一定数量的例题进行分析详解，以帮助读者正确理解基本概念，提高解题能力；

（五）习题与解答部分：每章配有习题（本习题选自高教出版社出版的大专教材《线性代数》），并给出解答；

（六）自测题部分：各章后面都有反映本章内容的自测练习题，并给出了参考答案。

全书最后均附A、B、C三组综合自测试题，并附有参考答案。

《线性代数学习指导》是根据高等财经院校专科层次，以及函授、职大、业大、电大的经济应用数学基础《线性代数》的教学要求而编写的，是学员的学习指导书，也可作为教师的教学参考书。全书共分六章，内容包括：行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、相似矩阵、投入产出数学模型。

这套学习指导书是由北京经济管理学院（原中国人民大学一分校）、金陵职业大学、江汉大学、西安基础大学、辽宁税务专科学校等院校联合编写的。编者都是在教学岗位有多年教学经验的教师，并由崔福荫、曹承宾、何蕴理、王尚文主审。

对这套学习指导书的结构和编写形式，我们做了新的尝试，由于水平有限，在内容的取舍，结构的安排，以及体例形式等各方面难免存在问题和不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

1988年3月15日

目　录

第一章 行 列 式

一、基 本 内 容

1．二阶、三阶行列式

（1）二阶行列式的定义

记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{11} - a_{22}\ a_{21}$$

（2）二元线性方程组的行列式解法

如果方程组

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 = b_2 \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么这个方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

其中

$$\cancel{D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}},\quad D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

（3）三阶行列式的定义

记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$$
$$- a_{11}\ a_{23}\ a_{32} - a_{12}\ a_{21}\ a_{33} - a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$$

（4）三元线性方程组的行列式解法

如果方程组

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 = b_2 \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 = b_2 \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么这个方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D},\quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

2．n 阶行列式

（1）排列与逆序

1° n 级排列

由1、2、…、n组成的一个有序数组，称为一个 n 级排列。n 级排列的总数为$n!$

2° 逆序

在一个排列中，如果有一个较大的数排在一个较小的数之前，就称这两个数构成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数。并用$N(i_1 i_2 \cdots i_n)$表示排列$i_1 i_2 \cdots i_n$的逆序数。

如果排列$i_1 i_2 \cdots i_n$的逆序数N（$i_1 i_2 \cdots i_n$）是一个偶数，则称$i_1 i_2 \cdots i_n$是一个偶排列；如果$N(i_1 i_2 \cdots i_n)$是一个奇数，则称$i_1 i_2 \cdots i_n$是一个奇排列。

在一个n级排列中，奇偶排列各有$\frac{n!}{2}$个。

3° 对换

在一个排列$i_1 i_2 \cdots i_n$中，如果仅将它的两个数码i_s与i_t对调，会得到另一个排列，这样的变换称为一个对换，记为对换（i_s，i_t）。

定理 任意一个排列经过一个对换后，奇偶性一定改变；任何一个排列都可以经过一些对换变成自然顺序，并且所作对换个数与这个排列有相同的奇偶性。

（2）n 阶行列式的定义

用n^2个元素$a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，其中 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是1，2，…，n 的一个排列。每个项前面有正负号：当 $j_1 j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前面带正号；当 $j_1 j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前面带负号。因此，n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为：

$$(-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1 j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列，当 $j_1 j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时，则得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项，共 $n!$ 项。行列式简记为 $|a_{ij}|$。

3．行列式的性质

性质1 行列互换、行列式不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意：上面性质表明了行列式中行，列地位的对称性，也就是说行列式中有关行的性质对列也同样成立。为此下面仅叙述有关行的性质。

性质2 对换行列式的两行，行列式变号。即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ (\text{第}p\text{行}) \\ \\ (\text{第}q\text{行}) \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
= -\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ (\text{第}q\text{行}) \\ \\ (\text{第}p\text{行}) \\ \\ \\
\end{array}
$$

推论 如果行列式有两行的对应位置元素相同，则此行列式为零。

性质 3 用数 k 乘行列式的一行，等于以数 k 乘此行列式。即，如果设 $D=|a_{ij}|$，则

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= k
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= kD
$$

推论1 如果行列式某行的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式外面。

推论2 如果行列式有两行的对应元素成比例，则行列式等于零。

性质 4 如果行列式的某行元素可以看作是两组数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和，这两个行列式分别以这两组数为这一行的元素，而除去这一行以外，这两个行列式的其它各行都与原来行列式的对应相同。
即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

推论 如果行列式某一行的元素可以写成m个数($m>2$)的和，则此行列式可以写成m个行列式的和。

性质 5 把行列式某行的若干倍加到另一行，行列式不变。即

$$
\begin{array}{l}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ (\text{第}p\text{行}) \\ \\ (\text{第}q\text{行}) \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{q1}+ka_{p1} & a_{q2}+ka_{p2} & \cdots & a_{qn}+ka_{pn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ (\text{第}p\text{行}) \\ \\ (\text{第}q\text{行}) \\ \\ \\ \end{array}
$$

4．**行列式按行（列）展开**

（1）余子式与代数余子式

定义 在n阶行列式$D=|a_{ij}|$中去掉元素a_{ij}所在的第i行和第j列后得到的$n-1$阶行列式，称为D中元素a_{ij}的余子式。记为M_{ij}。并称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为a_{ij}的代数余子式。记为A_{ij}。即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

D中每个元素相应的余子式应取的符号可以简记为

$$
\begin{vmatrix}
+ & - & + & \cdots & & \\
- & + & - & \cdots & & \\
+ & - & + & \cdots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & + & - \\
 & & & \cdots & - & +
\end{vmatrix}
$$

（2）行列式按行（列）的展开计算

定理 n级行列式等于它任一行（列）的所有元素与它们的对应代数余子式的乘积之和。

定理 n级行列式中某一行（列）的每个元素与另一行（列）相应元素的代数余子式的乘积之和等于零。

行列式按一行（列）展开的公式：

设$D=|a_{ij}|$，则有

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is}=\begin{cases}D & 当k=i\\ 0 & 当k\neq i\end{cases}$$

或

$$\sum_{s=1}^{n} a_{si}A_{sj}=\begin{cases}D & 当l=j\\ 0 & 当l\neq j\end{cases}$$

5．几种特殊行列式的计算

（1）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\ a_{22}\ \cdots\ a_{nn}$$

（2）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n}\\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n}\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\ n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n}\\ 0 & 0 & \cdots & a_{2\ n-1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}a_{1n}\ a_{2\ n-1}\ \cdots\ a_{n1}$$

6．基本记算方法

（1）运用行列式的性质，将行列式化为三角形，其主对角线上元素的乘积即为所求。

例

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \times(-1) \\ \leftarrow \\ \times(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$= ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$= ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-1) \\ \leftarrow \end{matrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2$$

（2）运用行列式的性质，使行列式的某行（列）出现尽可能多的零，再用公式

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}$$

按该行（列）展开（降价），循环往复，直至使计算得到充分简化。

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-2) \\ \leftarrow \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第三列展开}} a_{23}\times(-1)^{2+3}M_{23}$$

$$=1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -3 & -6 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}\times 3,\times(-3)\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & -7 & -2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}} -6\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -7\end{vmatrix}$$

$$=6\times(-7)=-42$$

二、学 习 要 求

1．理解并掌握 n 阶行列式的定义。

2．熟记行列式的性质，能灵活熟练地运用行列式性质化简、计算较低阶（如四、五阶）的行列式。

3．熟练掌握将数字行列式化简为三角形行列式的一般方法。

4．会求 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij}。熟练掌握行列式按某行（列）展开的方法。

三、答 疑 解 惑

1． $\begin{vmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{vmatrix}=0$

是如何用行列式性质证明的，是否主对角线为零的行列式一定等于零？