面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

数学建模方法

刘承平　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

数学建模方法

刘承平　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪教材。本书主要介绍实践中经常用到的数学方法，主要内容有：数学建模概述、数理统计方法、最优化方法、微分方程与差分方程方法、模糊数学方法、图论方法以及其他方法。本书有两大特点，一是内容比较全面，应用书中的方法基本上能够解决实际中常见的数学问题；二是通俗易懂，使学过微积分、线性代数、概率论的读者容易自学，对学过数理统计和线性规划的读者来说，阅读起来更方便。

本书可作为高等农林院校各专业数学建模使用教材，也可供其他院校非数学类专业选用。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模方法/刘承平主编. —北京：高等教育出版社，2002.7 (2003重印)
农林本科教材
ISBN 7-04-011167-5

Ⅰ. 数...　Ⅱ. 刘...　Ⅲ. 数学模型－高等学校－教材　Ⅳ. O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第038075号

数学建模方法
刘承平　主编

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
排　　版	高等教育出版社照排中心
印　　刷	国防工业出版社印刷厂

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2002年7月第1版
印　　张	15.25	印　　次	2003年4月第2次印刷
字　　数	280 000	定　　价	16.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

前　言

我国的大学生数学建模竞赛是从1992年开始的，先由中国工业与应用数学学会举办。这一新生事物从一开始就受到广大师生的欢迎和各级教育部门的关心与重视。从1994年起改由与教育部高教司联合举办，并成立了全国组委会来具体组织竞赛。在教育部的领导下参赛队数每年以约30%的速度递增。大学生数学建模竞赛已经对整个大学的教育改革产生了良好的影响，越来越多的学生要求参赛，越来越多的教师和教育部门领导认识到这是一项培养学生具有高素质和创新能力的课外科技活动，一定要充分发挥其作用。不少院校还对一些未能参加全国竞赛的同学，在相同时间和条件下，采用同样的赛题组织他们在校内参加竞赛，并由学校自己组织评阅。

美国从1938年以来，在大学生中举办了50届普特南(Putnam)数学竞赛，这项竞赛对培养青年数学家有积极作用，但弗萨罗(Fusaro)教授发现这项竞赛有三个问题：一是过于纯粹，而大多数学生将从事各种领域的应用问题；二是不能用计算工具，不能看参考书，与时代的发展，与真正科研的条件不同；三是个人独立做，而现代科学研究往往要一个团队合作进行。于是他和一些看法相同的同行发起，在1985年举办了美国大学生首届数学建模竞赛(Mathematical Competition in Modeling，1988年后改称为Mathematical Contest in Modeling，均缩写为MCM)，以后每年举办一次，它吸引了世界上许多国家和地区的大学生参加。自1989年以来，我国学生还积极参加美国大学生数学建模竞赛，近年来我国参赛队数接近于其总数的三分之一，而且还取得了很好的成绩，充分展示出我国大学生的智慧和创造性。

到目前为止，国内已出版数学建模与数学实验方面的教材，阅读对象都以理工科大学生为主，农林院校学生阅读起来感到很困难，因此在2000年，由华中农业大学发起，并联合河南农业大学、湖南农业大学和湖北农学院共同编写了这本教材。编写的指导思想是使学过微积分、线性代数、概率论的读者容易自学，对学过数理统计和线性规划的读者来说，阅读起来更方便。本书还选录了华中农业大学2000年和2001年在参加全国大学生数学建模竞赛中的获奖论文(编者稍加修改)。本书可作为农林院校本科生数学建模课程使用的教材。

本书由华中农业大学刘承平任主编，河南农业大学梁保松、湖南农业大学周玉元、湖北农学院文凤春任副主编。由华中农业大学刘承平编写第1章、第2章第5～7节、第3章第3～4节、第5章、第6章第5～8节、第7章第6～7节，河

南农业大学梁保松编写第6章第1～4节，湖南农业大学周玉元编写第2章第1～4节，湖北农学院文凤春编写第4章，河南农业大学王莲花编写第3章第1～2节，河南农业大学叶耀军编写第7章第1～3节，华中农业大学殷建肃编写第7章第4～5节。全书由华中农业大学刘承平负责统稿。

本书由武汉大学博士生导师费浦生教授审稿。

本书是一本面向21世纪的改革教材，它是教育部04－6高等农林教育本科数学系列课程教学内容和课程体系改革的研究实践的成果。在此感谢教育部高教司、“面向21世纪高等农林教育教学内容和课程体系改革计划”工作协调指导小组、04－6项目组，以及河南农业大学，湖南农业大学，湖北农学院，华中农业大学教务处、理学院、数学教研室等所给予的支持和帮助。

在此还要特别感谢华中农业大学谢季坚教授在领导和组织本书的编写工作中所付出的辛勤劳动以及武汉大学博士生导师、全国大学生数学建模竞赛湖北赛区组委会专家组组长费浦生教授在百忙之中抽出时间为本书审稿所付出的辛勤劳动。费教授在审稿时提出了许多建设性意见，我们都一一采纳，并表示衷心的感谢！

最后，对高等教育出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动和大力支持，我们表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，对书中的不妥之处，恳请读者不吝赐教。

编　者

2001年12月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

责任编辑　王　瑜
封面设计　张　楠
责任绘图　尹文君
版式设计　胡志萍
责任校对　存　怡
责任印制　杨　明

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　数学建模概述

§1.1　什么是数学模型

通常我们把现实问题的一个模拟称为模型，如交通图、地质图、航空模型和建筑模型等．利用数学的语言、公式、图、表或符号等来模拟现实的模型称为数学模型．我们知道，对一个现实问题的研究，一般不需要甚至不可能直接研究现实问题的本身，而是研究模拟该现实问题的模型．举个简单例子：某司机欲把某货物从甲地运往乙地，应如何选择运输路线使总路程最短？该司机不会开着车去试探，而是利用交通图来确定自己的行车路线．从这个简单的例子中我们可以看到数学建模的重要性．

§1.2　数学建模包含哪些步骤

数学建模主要包含模型建立、求解以及对结果的分析与检验等步骤．

模型建立　模拟现实问题建立数学模型，不仅要有一定的数学知识与技巧，还要有敏锐的洞察力与理解力，善于抓住问题的内在联系，作出合理的假设与简化，找出影响问题的各种因素及其相互关系．例如，2000 年全国大学生数学建模竞赛 A 题：DNA 系列分类中，给出的 DNA 系列全是由 4 个字符(碱基)A，T，C，G 组成．虽然 3 个碱基可以构成一种氨基酸(共有 20 多种)，但是 DNA 系列的长度不一，且无法“断句”，这给分类造成困难．然而，每条 DNA 中 A，T，C，G 的百分含量可体现该条 DNA 的特性，且与系列的长度和“断句”无关，并且根据 DNA 中 A，T，C，G 的百分含量对 DNA 序列进行分类的方法比较多(此例详见本书第 5 章 §5.6)．从这例可看出，建立数学模型，不仅要有一定的数学知识与技巧，还要具备其他学科的一些知识．另外还要有一定的编程能力．

一般来说，模型建立的方法不止一种．如最短路线问题，可以用图论方法，也可以用线性规划方法，有时还可以用动态规划的方法．

模型求解　在建立模型之后，就要求解模型，给出有效的计算方法．例如旅

行推销员问题:一个推销员要到 n 个城市去推销,如何安排行程?如果用简单的组合算法,其计算步数是 $n!$ 的倍数,随着 n 的增大,计算量之大以至无法得到结果.如 $n=30$,即使以每秒 10^{24} 步的速度来计算,也需要8年多,况且现在的计算机还没有达到上述速度.顺便说一句,旅行推销员问题的有效算法目前还没有找到,只有一些近似算法.

结果的分析与检验　有些问题需要对解的现实意义作出解释,检验模型的正确性,并对模型的稳定性进行分析.如种群的相互竞争问题(参考第4章)需要对解的现实意义作出解释,并对模型的稳定性进行分析.又如2001年全国大学生数学建模竞赛B题——公交车的调度,需要对模型结果进行检验.

具体来说,在建立数学模型,撰写论文时,建议包含以下内容:

(1) 问题的提出与分析.按你的理解对所给的问题用数学语言作更清晰的表述,根据问题的性质你打算建立什么样的模型.

(2) 必要而合理的假设.现实问题远不像纯粹数学问题那样理想化,因此有必要作一些合理的假设,有条件时对实际问题作一些调查.

(3) 模型设计.对出现的数学符号必须有明确的定义,模型的具体表现形式必须写清楚.

(4) 模型求解与结果.将具体的求解过程和结果写清楚.

(5) 模型结果的检验与分析.对模型的结果进行检验与分析,可以通过实际问题来检验,也可以用计算机模拟检验,并指出模型的优缺点及改进方向.

(6) 必要的计算机程序.

§1.3　建模实例

1.3.1　报童订报模型

(1) 问题

报童每天清晨从报社购进报纸零售,晚上将没有卖掉的报纸退回.每份报纸订购价格为 a,零售价格为 b,退回价格为 $c(b>a>c)$.请你为报童制定一个最佳订购方案.

(2) 问题的分析

报童每天卖出报纸的数量 ξ 是一个随机变量,因此报童每天的收入也是一个随机变量,所以作为优化模型的目标函数,不能是报童每天的收入,而应该是他长期卖报的日平均收入.从概率论中大数定律的观点来看,这相当于报童每天收入的期望值.另一方面,如果报纸订得太少,供不应求,报童就会失去一些挣钱

的机会,将会减少收入;但如果订多了,当天卖不完,退回的多余报纸得赔钱,报童也会减少收入.

(3) 问题的假设

设报社有足够的报纸可供定购;当天卖不出去的报纸只能退回;报童除了订购报纸费用外,其他费用(如交通费、摊位费等)一概不计;报童每天订购 n 份报纸,实际能卖出 r 份报纸,且 $P\{\xi=r\}=p(r)$

(4) 模型建立

如果 $0\leqslant r\leqslant n$,则售出 r 份报纸增加收入 $(b-a)r$,退回 $n-r$ 份减少收入 $(a-c)(n-r)$;如果 $r>n$,则售出 n 份报纸增加收入 $(b-a)n$.因此报童每天收入的期望值:

$$f(n)=\sum_{r=0}^{n}[(b-a)r-(a-c)(n-r)]p(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(b-a)np(r). \tag{1-1}$$

问题归结为在 $a,b,c,p(r)$ 为已知时,求 n 使 $f(n)$ 最大.

(5) 模型求解与结果

方法 1 用差分法求解.令

$$\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)=0, \tag{1-2}$$

上式表示多订一份报纸与少订一份报纸的收入期望值相等.由(1-1)式得

$$\begin{aligned}
f(n+1)=&\sum_{r=0}^{n+1}[(b-a)r-(a-c)(n+1-r)]p(r)+\sum_{r=n+2}^{\infty}(b-a)(n+1)p(r)\\
=&\sum_{r=0}^{n}[(b-a)r-(a-c)(n+1-r)]p(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(b-a)(n+1)p(r)\\
=&\sum_{r=0}^{n}[(b-a)r-(a-c)(n-r)]p(r)-\sum_{r=0}^{n}(a-c)p(r)+\\
&\sum_{r=n+1}^{\infty}(b-a)np(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(b-a)p(r)\\
=&f(n)-\sum_{r=0}^{n}(a-c)p(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(b-a)p(r)\\
=&f(n)-\sum_{r=0}^{n}(b-c)p(r)+\sum_{r=0}^{n}(b-a)p(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(b-a)p(r)\\
=&f(n)-(b-c)\sum_{r=0}^{n}p(r)+(b-a)\sum_{r=0}^{\infty}p(r).
\end{aligned}$$

注意到 $\sum\limits_{r=0}^{\infty}p(r)=1$,得

$$f(n+1)-f(n)=b-a-(b-c)\sum_{r=0}^{n}p(r). \tag{1-3}$$

由(1-2)式和(1-3)式得

$$\sum_{r=0}^{n} p(r)=\frac{b-a}{b-c}, \tag{1-4}$$

从(1-4)式中解出 n,可使报童每天收入的期望值 $f(n)$最大.

方法2　当 r 和 n 都相当大时,可将 r 视为连续变量更便于分析和计算,这时概率 $p(r)$转化为概率密度函数 $\varphi(r)$,由(1-1)式得

$$\begin{aligned} f(n) &= \int_0^n [(b-a)r-(a-c)(n-r)]\varphi(r)\mathrm{d}r+\int_n^{\infty}(b-a)n\varphi(r)\mathrm{d}r \\ &= \int_0^n (b-c)r\varphi(r)\mathrm{d}r-(a-c)n\int_0^n \varphi(r)\mathrm{d}r+(b-a)n\int_n^{\infty}\varphi(r)\mathrm{d}r \\ &= (b-c)\int_0^n r\varphi(r)\mathrm{d}r-(b-c)n\int_0^n \varphi(r)\mathrm{d}r+(b-a)n\int_0^{\infty}\varphi(r)\mathrm{d}r \\ &= (b-c)\int_0^n r\varphi(r)\mathrm{d}r-(b-c)n\int_0^n \varphi(r)\mathrm{d}r+(b-a)n. \end{aligned}$$

计算

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n} &= (b-c)n\varphi(n)-(b-c)n\varphi(n)-(b-c)\int_0^n \varphi(r)\mathrm{d}r+(b-a) \\ &= b-a-(b-c)\int_0^n \varphi(r)\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

令$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n}=0$ 得,

$$\int_0^n \varphi(r)\mathrm{d}r=\frac{b-a}{b-c}. \tag{1-5}$$

从(1-5)式中解出 n,可使报童每天收入的期望值 $f(n)$最大.

(6) 模型结果的模拟检验

报童每天卖出报纸的数量 ξ 是一个随机变量,它一般服从泊松(Poisson)分布

$$P\{\xi=r\}=\frac{\lambda^r}{r!}\mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{1-6}$$

或服从正态分布

$$\xi\sim N(\mu,\sigma^2). \tag{1-7}$$

(1-6)式或(1-7)式中的参数可根据统计报童以前卖出报纸的数量得到.

当 $a=35, b=50, c=12, \xi\sim N(80,20^2)$时,从(1-5)式中可解出 $n=75$.用计算机模拟产生服从正态分布 $N(80,20^2)$的随机数20个如下:

93	85	103	73	70	53	80	93	90	59
81	97	38	64	86	79	69	87	53	88

假设上述数据为报童20天中每天实际卖出报纸的份数,则当报童每天订购73份报纸时,20天的总收入17910达到最大,这一结果与本模型中制定报童每天订购75份报纸(20天的总收入17902)的方案基本相同.

(7) 模型的推广

报童订报模型适用于一些季节性强、更新快、不易保存等特点的货物订货模型.但是模型中有一个严格的限制条件:两次订货之间没有联系,这种策略是决策论中的一种定期定量订货策略.

1.3.2 空洞探测模型

本题为2000年全国大学生数学建模竞赛D题.

作者:黄祥富　吴成　郑玉学　指导老师:谢冰锋

(1) 问题

山体、隧洞、坝体等的某些内部结构可用弹性波测量来确定.一个简化问题可描述为,一块均匀介质构成的矩形平板内有一些充满空气的空洞,在平板的两个邻边分别等距地设置若干波源,在它们的对边对等地安放同样多的接收器,记录弹性波由每个波源到达对边上每个接收器的时间,根据弹性波在介质中和在空气中不同的传播速度,来确定板内空洞的位置.现考察如下的具体问题:

一块240(m)×240(m)的平板(如图1-1),在AB边等距地设置7个波源$P_i(i=1,\cdots,7)$,CD边对等地安放7个接收器$Q_j(j=1,\cdots,7)$,记录由P_i发出的弹性波到达Q_j的时间t_{ij}(t);在AD边等距地设置7个波源$R_i(i=1,\cdots,7)$,BC边对等地安放7个接收器$S_j(j=1,\cdots,7)$,记录由R_i发出的弹性波到达S_j的时间τ_{ij}(t).已知弹性波在介质和空气中的传播速度分别为2 880(m/s)和320(m/s),且弹性波沿板边缘的传播速度与在介质中的传播速度相同.表1-1,表

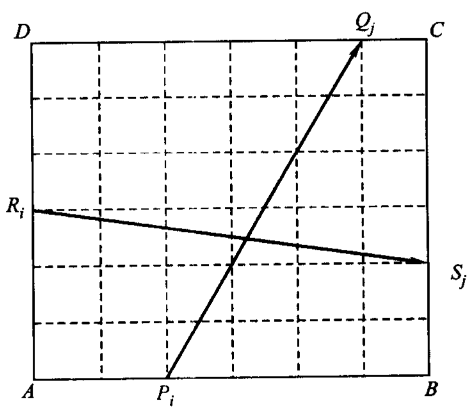

图1-1

1－2 为观测到的数据.

① 确定该平板内空洞的位置.

② 只根据由 P_i 发出的弹性波到达 Q_j 的时间 $t_{ij}(i,j=1,\cdots,7)$，能确定空洞的位置吗？讨论在同样能够确定空洞位置的前提下，减少波源和接受器的方法.

表 1－1

t_{ij}	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
P_1	0.061 1	0.089 5	0.199 6	0.203 2	0.418 1	0.492 3	0.564 6
P_2	0.098 9	0.059 2	0.441 3	0.431 8	0.477 0	0.524 2	0.380 5
P_3	0.305 2	0.413 1	0.059 8	0.415 3	0.415 6	0.356 3	0.191 9
P_4	0.322 1	0.445 3	0.404 0	0.073 8	0.178 9	0.074 0	0.212 2
P_5	0.349 0	0.452 9	0.226 3	0.191 7	0.083 9	0.176 8	0.181 0
P_6	0.380 7	0.317 7	0.236 4	0.306 4	0.221 7	0.093 9	0.103 1
P_7	0.431 1	0.339 7	0.356 6	0.195 4	0.076 0	0.068 8	0.104 2

表 1－2

τ_{ij}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
R_1	0.064 5	0.060 2	0.081 3	0.351 6	0.386 7	0.431 4	0.572 1
R_2	0.075 3	0.070 0	0.285 2	0.434 1	0.349 1	0.480 0	0.498 0
R_3	0.345 6	0.320 5	0.097 4	0.409 3	0.424 0	0.454 0	0.311 2
R_4	0.365 5	0.328 9	0.424 7	0.100 7	0.324 9	0.213 4	0.101 7
R_5	0.316 5	0.240 9	0.321 4	0.325 6	0.090 4	0.187 4	0.213 0
R_6	0.274 9	0.389 1	0.589 5	0.301 6	0.205 8	0.084 1	0.070 6
R_7	0.443 4	0.491 9	0.390 4	0.078 6	0.070 9	0.091 4	0.058 3

(2) 问题的分析

用弹性波测量山体、隧洞、坝体等的某些内部空洞的位置，应该说只能测出空洞的大致位置，这是由于安放在矩形每一对边的探测器的数量是有限的. 因此我们将一块矩形平板划分为若干个小矩形块，判断每个小矩形块内是否有空洞. 测量的精度与安放在矩形每一对边的探测器的数量是有关的.

(3) 问题的假设

①[注]假设所有的探测均在同一平面上进行，且所有的测量数据是按弹性波走直线得到的.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com