复变函数与积分变换

董祖引　王海鹰　周继东　编著

河海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/董祖引,周继东,王海鹰编著.
南京:河海大学出版社,2001.3
ISBN 7-5630-1582-5

Ⅰ.复… Ⅱ.①董…②周…③王… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 09363 号

书　　名/复变函数与积分变换
书　　号/ISBN 7-5630-1582-5/O·94
责任编辑/卢黎明
责任校对/孙　禹
封面设计/张世立
出　　版/河海大学出版社
地　　址/南京市西康路 1 号(邮编:210098)
电　　话/(025)3737852(总编室)　(025)3722833(发行部)
经　　销/江苏省新华书店
印　　刷/南京京新印刷厂
开　　本/850 毫米×1168 毫米　1/32　13.5 印张　349 千字
版　　次/2001 年 3 月第 1 版　2001 年 3 月第 1 次印刷
印　　数/1～3100 册
定　　价/19.8 元(册)

内 容 简 介

本书由两部分内容组成,复变函数与积分变换.复变函数部分包括了复数、解析函数、柯西积分、级数理论、留数定理、保形映照等基本内容.积分变换部分主要介绍了傅立叶变换和拉普拉斯变换及其应用.全书每章节都配有较多的例题和习题,由浅入深,循序渐进.书末附有大部分习题的答案或提示.另还附有区域变换表、傅立叶变换表和拉普拉斯变换表,以便查用.

阅读本书只需具备初等微积分的知识基础.本书可供高等工业院校有关专业选作教材,也可供有关工程技术人员参考.

前　言

(一)

自人类发明数(自然数)以来,对数的认识,一直伴随着整个数学的发展史,从简单的自然数到有理数,再引入实数、复数经历了漫长的历史.关于复数的认识可以追溯到16世纪中叶,一位名叫卡当(Cardano)的意大利学者在解三次方程时产生了负数开平方的思想,他将40视作$5+\sqrt{-15}$与$5-\sqrt{-15}$的乘积.然而,当时及以后的很长一段时间里并没有引起人们的足够重视,谁也没有想到这个"虚设的"数日后(19世纪中叶以后)会发展成为一门庞大的数学分支,并且具有广泛的实用价值.事实上,复数直到它有了几何解释前(19世纪初),并不被人们所愿意接受,因为它总给人以虚无漂渺的感觉.就连微积分的创立者莱布尼兹(Leibniz)也把它看作是"理想世界的奇异创造,几乎是介于存在与不存在的两栖动物."

引进复数后,代数方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ $(a_0\neq 0)$在复数范围内恒有解,不管其系数$a_k(k=0,1,2,\cdots,n)$是实数还是复数,这就是著名的代数基本定理.换句话说,在复数域内代数方程根的存在性得到了完美的解决,而无需将数系扩大了.从这个意义上说,复数域是"尽善尽美"的.

历史上,首先对复数进行系统研究的是瑞士数学家欧拉(Euler),他在1777年系统地建立了复数理论,发现了著名的欧拉公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,并开始把复数用到水力学和地图制图学上,虚数单位"i"这个符号也是由他在那时首创的(后经高斯(Gauss)倡导并通行于世界).事实上,复变函数的研究也是从18世纪开始的,除欧拉外还有达朗贝尔(D'Alembert)、拉普拉斯(Laplace)等人都作

出过很大贡献.但复变函数论的全面发展是在19世纪,其中柯西(Cauchy)、黎曼(Riemann)、魏尔斯特拉斯(Weierstrass)三人的工作奠定了复变函数的基础理论,尤为重要的要数柯西—黎曼方程①,柯西积分公式,黎曼曲面和魏尔斯特拉斯级数理论.从此,复变函数论成了一个相对独立的数学分支,具有独特的理论体系,并且深刻地渗入到代数学、解析数论、微分方程、概率统计等许多数学分支,同时在热力学、流体力学、电学、理论物理、线性系统等方面也取得了广泛的应用,比如流体或电场的复势,数学物理方程的边界问题,飞机机翼的结构问题等等.

伴随着复变函数论的建立和发展,与它密切相关的积分变换理论也日趋成熟.傅立叶(Fourier)变换可以看成是傅立叶级数的一个延伸,而拉普拉斯变换又可看成是傅立叶变换的一种变形.它们不仅在数学处理上提供了一个有效而便捷的运算工具,并且又具良好的物理意义,傅立叶变换将时域的问题转化为频域的问题,拉普拉斯变换可以简单地描述线性系统的特征,即所谓传递函数.在偏微分方程的求解中,积分变换也是一个独特的方法.

(二)

由于复变函数和积分变换的广泛应用,它已成为许多科学技术人员从事科学研究和工程实践所必备的数学基础,也是许多理工科专业学生的一门必修的基础理论课.复变函数和积分变换作为一门学科的两个方面是不可分割的,鉴于此,我们有意识地把这两者放到一起,旨在读者更方便、更有效、更系统地来了解这一学科,掌握它们的思想、理论及其应用.

本书在叙述上力求通俗易懂,由浅入深,循序渐进,并且尽可能地在保证理论严谨的前提下把数学写得直观形象,读起来更"平易近人"一点.我们相信这对数学教学也是有益的.其实数学本身

① 柯西—黎曼方程又称达朗贝尔—欧拉方程,只是后者研究得更早,但前者研究得更详细.

也是挺有意思,颇具魅力的,就看你如何对待它.比如毕达哥拉斯(Pythagoras)曾用数(有理数)来解释音乐,当按住弦的$\frac{1}{2}$处时,它会发出最和谐的音,高八度.恩格斯将傅立叶级数比作是"一首数学诗".克莱茵(F. Klein)更是将复变函数中公式 $e^{i\pi}+1=0$ 认为是"整个数学中最卓越的公式之一",它联系了数学中五个最重要的常数.倘若读者在阅读本书时,在汲取你所需的知识的同时也能从中悟出哪怕是一点点的数学之美那便是我们的奢望.

(三)

本书第一、二、四章由董祖引执笔,第三、五章由王海鹰执笔,第六、七章由周继东执笔,全书由董祖引统稿,张乃良主审.

张乃良教授非常关心本书的编写与出版,是本书的组织者之一,并亲任本书的主审工作,仔细审阅了全部原稿并提出许多指导性意见.在编写过程中还得到了河海大学数理系、河海大学教务处等有关部门的大力支持.本书的顺利出版还得力于河海大学出版社的鼎力相助,特别是卢黎明先生为本书的出版付出了辛勤的工作,在此一并致谢.

限于作者的水平,书中难免谬误之处,恳请读者不吝指教.

董祖引　王海鹰　周继东

2000 年 9 月于河海大学

目　　录

第 1 章　解析函数

在高等数学中，我们已经系统地学习了以实数为自变量的函数理论——微积分学，现在，我们将自变量的取值范围推广到复数域上去，即所谓复变函数．在复变函数理论中最中心的问题是解析函数——某种意义下的可微函数．本章将引入解析函数的概念．先让我们来回顾一下复数的概念．

§1　复　　数

1.1　**复数的概念**　我们知道代数方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解，为使方程 $x^2+1=0$ 有解，我们可以虚设一个数，记 i，使 $i^2=-1$，并称 i 是**虚数单位**．这样 $x=i$ 便是方程 $x^2+1=0$ 的一个根了．有时候，我们也将 i 形式地记为 $i=\sqrt{-1}$．

有了虚数单位 i 可以定义所谓的**纯虚数**

$$iy \text{ 或 } yi,$$

其中 $y(y\neq 0)$ 是实数．进一步，将实数 x 和纯虚数 iy 形式地作加法运算定义**复数**

$$x+iy,$$

其中 x,y 是实数，并记 $z=x+iy$．可以把复数 $z=x+iy$ 理解成由一个实数 x 和纯虚数 iy 复合而成的复合数，所以复数 $z=x+iy$ 也可以用一对有序数组来记它，即 $z=(x,y)$．

称 x,y 分别是复数 $z=x+iy$ 的**实部**和**虚部**，记

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z).$$

显然，当 $y=0$ 时，$z=x+i0$ 可以看作是实数 x；当 $x=0,y\neq 0$ 时，$z=0+iy$ 可以看作是纯虚数 iy．

下面我们来定义复数的运算．

设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$,称 z_1 与 z_2 **相等**,记 $z_1 = z_2$,当且仅当 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.特别地,一个复数 $z = 0$ 当且仅当其实部、虚部都为 0.

两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ 的**加法**、**减法**和**乘法**定义如下:

$$(1)z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \tag{1.1}$$

$$(2)z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2) \tag{1.2}$$

显然,当 z_1, z_2 都是实数,即 $y_1 = y_2 = 0$ 时,式(1.1)与(1.2)所定义的复数运算与实数对应的运算是相容的.

利用乘法的逆运算可以定义**除法**,即若

$$z_2 z = z_1 \qquad (z_2 \neq 0),$$

称 z 是 z_1 除以 z_2 的**商**,记 $z = \frac{z_1}{z_2}$,容易导得

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1.3}$$

上述定义的复数的四则运算(加、减、乘、除)其结果仍是复数,或者说,复数对于四则运算是封闭的,因此它构成了一个数域,称之为**复数域**,记 $\boldsymbol{C}$.值得注意的是两个复数不能比大小,或者说复数域不是有序的.

不难验证,复数的加法与乘法满足:

(i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$; (交换律)

(ii) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;

$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$; (结合律)

(iii) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$. (分配律)

设复数 $z = x + iy, x, y \in \boldsymbol{R}$,称 $x - iy$ 为复数 z 的**共轭复数**,记 $\bar{z}$,即 $\bar{z} = x - iy$.共轭复数满足下列性质:

(i) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(ii) $\bar{\bar{z}} = z$;

(iii) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, $\quad z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$;

(iv) $z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$.

证明是简单的,略.

例 1.1 设 $z_1 = 1 - i, z_2 = 3 + 4i$,求 $z_1 z_2, \dfrac{z_1}{z_2}$.

解 乘法的定义(1.2)式与除法的定义(1.3)式都不易记忆,对于乘法可利用分配律,遇到 $i^2 = -1$.对于除法可利用分子、分母同乘以分母的共轭,从而分母实化.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (1 - i)(3 + 4i) = (3 + 4i) - i(3 + 4i) \\ &= (3 + 4i) - (3i + 4i^2) = (3 + 4i) - (3i - 4) \\ &= 7 + i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(1 - i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} \\ &= \frac{(3 - 4) - (3 + 4)i}{25} \\ &= -\frac{1}{25} - \frac{7}{25}i. \end{aligned}$$

例 1.2 设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ 为两个任意复数,试证明 $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

证 利用共轭复数的性质

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

1.2 **复数的表示** 取平面直角坐标系 Oxy,我们用坐标为 (x, y) 的点来表示复数 $z = x + iy$,这是一一对应的,此时,x 轴称为**实轴**,y 轴称为**虚轴**.显然,实数 x 与 x 轴上的点一一对应;虚数 iy 与 y 轴上的点一一对应.与复数建立了这种对应法则的平面 Oxy 称为**复平面**或**z 平面**,也记为 $\boldsymbol{C}$.对于复数 z 与复平面上点 z 也就不需再区分了.

如图 1.1 所示,在复平面上,我们还可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复

数$z=x+iy$，则x就是$\overrightarrow{OP}$在实轴上的投影，y就是$\overrightarrow{OP}$在虚轴上的投影，并定义向量$\overrightarrow{OP}$的长度r为复数z的**模**或**绝对值**，记$|z|$，即

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \quad (1.4)$$

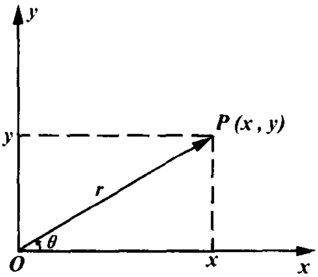

图1.1

关于复数的模，有下列性质：

(i)$z\bar{z}=|z|^2$；

(ii)$|z|=0$，当且仅当$z=0$；

(iii)$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq 0)$；

(iv)$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$　(三角不等式).

证　(i)、(ii)是显然的，略.

(iii)由(i)　$|z_1z_2|^2=(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})$

$$=(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)=|z_1|^2|z_2|^2,$$

两边开根号即得.

$$\begin{aligned}(\text{iv})\ |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})\\ &= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\ &= z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\\ &\leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\bar{z}_2|\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\\ &= (|z_1|+|z_2|)^2,\end{aligned}$$

两边开根号即证.

性质(iv)的几何意义是显然的，见图1.2，因为复数z_1和z_2的加法运算和相应向量的加法运算一致.

在图1.1中，如果令