面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

概率论与数理统计

谢国瑞　主编

谢国瑞　郝志峰　汪国强　等编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

概率论与数理统计

谢国瑞　主编
谢国瑞　郝志峰　汪国强　等编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材．内容包括基本概念、基本定理、离散型随机变量、连续型随机变量、多维随机变量、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验等八章，并附有习题答案．

本书可作为高等工业院校本科学生“概率论与数理统计”课程的教材使用．

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/谢国瑞，郝志峰，汪国强编．
北京:高等教育出版社，2002.8
ISBN 7-04-011236-1

Ⅰ．概… Ⅱ．①谢…②郝…③汪… Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材
Ⅳ．021

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第040374号

概率论与数理统计
谢国瑞　主编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京外文印刷厂		
开　　本	787×960　16	**版　　次**	2002年8月第1版
印　　张	16.75	**印　　次**	2002年8月第1次印刷
字　　数	300 000	**定　　价**	17.90元

前　言

编写本书的目的是为（非数学专业）大学生提供一本“概率论与数理统计”课程的教材，全书由目录所示的8章组成，前五章是概率论部分，后三章是数理统计引论部分．

熟悉内容的读者从目录可以看出本书与许多概率统计教材的一些不同之处，本书的第1章和第2章通常是被作者们处理在同一章内的，而许多教材独立成章的“数学期望”(或数字特征)，“极限定理”则被本书分散到第3章至第5章去了．这里，要对这两点稍作说明，供使用本书的师生们参考，并请多予批评、指正．

本书第1章的中心是阐明概率的意义，在解释频率与概率的区别与联系中，阐发了统计概率的思想，并用古典概率、几何概率等直接计算予以强化．另外，这里也直面主观概率，指出在许多重要应用中（特别涉及经济问题、社会科学等领域）需以主观概率概念来解释，对于非数学专业学生一般不甚关心的公理化概率论，在此让其似影子般地闪现了一下，但还是点明了它的意义所在，这样的处理为教师留出了较大的余地，既可以一闪而过，又可在认为需予介绍时辅以适当的材料而略作展开．第2章的主题是概率计算最重要的法则，是全书有用的概率间接计算法，不论对统计概率、主观概率，抑或在公理化的概率论中，这些法则都是很有用的，这里的全概率公式、贝叶斯公式等不仅是一套公式，也反映了解决问题的正确思路，同时也显现了互斥、独立、条件概率等重要概念的用处．这两个主题构成了演绎全书的基础．从第3章引入随机变量、概率分布的概念之后，对涉及随机的问题就有了更正确的提法，诸如对于像“某射手要对一目标进行3次独立的射击”这样的事，就不会再提出“他将命中几次?”的问题，而将提成“他命中次数的概率分布是什么?”这从一个侧面体现了“随机意识”的增强．但是，在得到了概率分布的信息后，怎样利用？怎样解决相关的问题？处理确定性问题的思想方法是否还有用？这些问题就自然地产生，在此适时地引入“数学期望”的概念能较好地解决这些问题．“随机意识”的提高是个素质问题；提出问题、解决问题的能力既是能力问题，也是素质问题，这些都需要在实践中反复锤炼、提高．在本书中将这些内容分散到几个章节中去处理，不仅因为先对离散随机变量讲这些概念比较地要简易一些，更是希望在本书中就造成多次接触、深化认识的机会．在这些章里，以

例或习题的形式插进了涉及面较宽的许多应用示例．这样做，一是为了提高学习的兴趣，更是试图引发读者的联想，去解释或解决一二个自己曾经碰到过或将要碰到的问题，学以致用．当然，若因学时数所限或特定学习对象等原因，书中的某些应用示例（特别像4.3节这样大段的应用课题），教师是完全可以选讲或不讲或更换成自己更有精深见解的例子来讲，而将材料留给学生自己看(现在看或将来看)，这样做应该是无损于掌握内容的连贯性的．

全书每一章都配了一定数量的习题，对其中一部分（特别是有的应用题），若安排一些时间进行讨论，可能是有益的．

虽说本书主要是为大学本科学生设计、编写的一本“概率论与数理统计”课程的教材，但也完全可以只用前五章作为“概率论”课程的教材，甚至若只用前三章作为教学内容，对于高职、高专的许多学生也应该是合适的．

本书是在编者们根据各自长期执教该课程的实践经验分工写出初稿的基础上，由我统稿完成的，参加本书编写工作的还有陈洁蓓、刘丽萍同志．在此，要感谢教育部有关领导和专家们给我们编写这本“九五”国家教委重点教材的荣誉和信任，我们还要特别感谢前国家教委工科数学课程教学指导委员会的马知恩主任，华东理工大学的焦家俊院长，上海新世纪教育集团的周小弟、邹荣祥先生，感谢他们对编写、出版本书给予的无私支持，也要感谢华南理工大学国家工科数学教学基地的诸多专家、教授以及广东工业大学郝同壬教授等所给予的关心和帮助．由于成书时间仓促，书中难免留有不妥之处，敬祈专家、读者们不吝指正．

谢国瑞
2002年春节
于南汇科教园区

面向21世纪课程教材

普通高等教育“九五”
国家教委重点教材

目　录

第 1 章 基本概念

1.1 随机试验

考虑如下的试验（这里“试验”一词也包括通常所谓的观察在内）：

E_1'：在标准大气压（约 101 千帕）下，将水加热到 100°C；

E_2'：在静电场中，观察同性电荷的行为；

E_3'：在地面上信手垂直上抛一石块．

当分别重复进行上述各种试验时，其呈现出的不变性质分别是，对 E_1' 是水必沸腾；对 E_2' 是电荷必相斥；对 E_3' 是石块必回落到地面．在这些试验中看到的现象通常称为**确定性现象**，这是些在实施这些试验之前就知道，只要试验的条件一实现（不论重复多少次），就会出现相应的惟一确定的结果．但是，有一类试验，在重复实施时，每一次的结局却并不是惟一确定的．例如考虑下面的一些试验：

E_1：某足球队在主场进行一场足球比赛；

E_2：某出租车公司电话订车中心，记录一天内接到订车电话的次数；

E_3：某射手对一活动靶进行射击，记录在一轮射击中，到击中为止，所进行的射击次数；

E_4：从一批灯泡中，任取一只，测定灯泡的使用寿命．

当重复进行这些试验时，其出现的结果并非是确定不变的．对 E_1 的结局，可能是主队胜，也可能是主队败，或者是主、客队成平局．对 E_2 的结果，有可能一天之内根本未曾接到过任何客户要车的电话，当然，至少从理论上来说，也有可能一天内的订车电话数超过一千或一万等，因此，可合理地认为一天内接到的订车电话数总是自然数集的某个元素．对 E_3，当射手在一轮轮重复进行这样的射击时，有时可以一次射击结束本轮的射击，而有时可能会无休止地持续下去（至少在理论上是可能的）．这样，实施 E_3，得到的结果会是某个正整数．对于 E_4，每个灯泡燃点时数（从开始使用起，直到损坏为止的小时数）当然是个非负正数．

以上这几个试验，都可以看作是随机试验．一般地，我们将具有如下的基

本特点的试验称为**随机试验**：

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 试验的可能结果不止一个，但明确知道其所有可能会出现的结果；

(3) 在每次试验前，不能确知这次试验的结果，但可以肯定，试验的结果必是所有可能结果中的某一个．

从随机试验观察到的现象称为**随机现象**，当观察随机现象时，在具体实现试验条件之前，不能确知会出现怎样的结果，而只能预言一旦实现试验条件，试验所有可能结果之一将会发生的事实．

今后，常将随机试验简称为试验．可以看出，前面列举的 E_1—E_4 都满足条件 (1) — (3)，故确实都可称为试验（即随机试验）．对于随机试验，其在重复实施中呈现的不变性质（即规律性）是**概率规律性**，在以后的讨论中，我们会逐步明白这种规律性的正确含义．

1.2 随 机 事 件

1.2.1 样本空间

在讨论一个随机试验时，试验的所有可能结果的集合是明确知道的，称这个集合为该试验的**样本空间**，常用 Ω（或 S）表示，其**元素**称为**样本点**，常用 ω 记之，是试验的一个可能结果．

对于上节提到的四个试验，它们的样本空间分别可看作是：

$\Omega_1=\{$胜，负，平$\}$；

$\Omega_2=\mathbf{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$；

$\Omega_3=\mathbf{N}^*=\{1, 2, 3, \cdots\}$；

$\Omega_4=[0, \infty)=\{x\in\mathbf{R} \mid 0\leqslant x<+\infty\}$.

在不少情况下，无法确切定出一试验的全部可能结果，但可以知道它不超出某个（尽可能小的）范围，这时，就用这个范围作为该试验的样本空间，只要每次试验的结果必是一个样本点即可．其实，上述的 Ω_2，Ω_3，Ω_4 就正是这样处理后写出的．

例 1 抛一枚硬币．观察哪一面向上．约定带有国徽图案的是正面，另一面是反面，并假定抛落的硬币不可能直立．这样，就可写出

$$\Omega=\{\text{正面，反面}\}$$

若规定用 ω_1 表示正面，ω_2 表示反面，则有 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$.

例 2 一个袋中装有大小相同的3个白球和2个黑球，现从中任取出一球．

为描述此试验的可能结果，一种办法是先对球予以编号，1、2、3 号球是白球，而 4、5 号球是黑球，约定用 ω_i 表示取得 i 号球，即有

$$\omega_i=\{取得第\ i\ 号球\}$$

则 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$.

这两个示例中的样本空间以及前面的 Ω_1，都只含有限个元素，称为**有限样本空间**；而前面的 Ω_2，Ω_3 以及 Ω_4 则都是**无限样本空间**.

1.2.2 随机事件

在实际问题中，面对一个随机试验，我们可能会更关心某些特定的事情在重复试验下是否会发生．如在出租车公司的示例中，公司方面可能关心的是“电话订车中心一天中接到订车电话数不超过 100”这件事是否经常发生．如果是，那就要考虑采取扩大广告宣传或紧缩编制等措施以提高经济效益．

“电话订车中心一天中接到订车电话数不超过 100”可表示为样本空间 Ω_2 的一个子集 $\{0,1,\cdots,99,100\}$．这件事在重复进行试验时是有时发生，有时不发生的，我们称具有这样特征的事为**随机事件**．用集合论的语言称**样本空间的子集**为**随机事件**，简称**事件**，通常用大写拉丁字母 A、B、C 等记之．当一次试验结果出现在这个集合时，即当一次试验结果 $\omega\in A$ 时，就称这次试验中事件 A 发生，否则，当结果 $\omega\notin A$ 时就称 A 不发生．在出租车公司的示例中，若用 A 表示“电话订车中心一天中接到订车电话数不超过 100”这一件事，那么，当一天结束时统计下来的订车电话为 105 次时，就说在这一天事件 A 没有发生．

为讨论方便，我们把一个试验的样本空间 Ω 也作为事件，由于每次试验的结果必是某个样本点，这就是说，作为事件，Ω 是特别地在每次试验中都必然要发生的，故称之为**必然事件**．另外，也把不含任一样本点的空集 $\varnothing$ 看作是一事件，由于在每次试验中这个事件都不会发生，故为**不可能事件**．有时，也把单个样本点 ω 称作是试验的**基本事件**（更正确地说，只含单个样本点的集合为基本事件）．

例 3 对例2中讨论的摸球试验，试用样本空间子集表示下列事件：

“摸出的是白球”；

“摸出的是白球或黑球”；

“摸出的是红球”；

“摸出的是黑球”；

“摸出的是 3 号球”．

解 “摸出的是白球” $=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}=A$

“摸出的是白球或黑球” $=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}=\Omega$

"摸出的是红球" $=\varnothing$

"摸出的是黑球" $=\{\omega_4, \omega_5\}=B$

"摸出的是 3 号球" $=\{\omega_3\}=C$

1.2.3　事件的关系和运算

经常会遇到这样的情况，我们感兴趣的是一个较为复杂的事件，但通过种种关系，可使之与一些较为简单的事件联系起来，这时，我们就可设法利用这种联系通过简单事件去研究这些较为复杂的事件．

1.2.3.1　事件的关系

事件的蕴含与包含

若当事件 A 发生时 B 必发生，则称 A 蕴含 B 或者说成 B 包含 A，记作 $A\subset B$.

作为样本空间的子集，事件 A 蕴含事件 B 也即集合 A 是 B 的一个子集．

显然，任一事件 A 都蕴含必然事件 Ω；而对例 3 的摸球试验来说，明显地有 C 蕴含 A，亦即摸到的球若是 3 号球（C 发生），则必摸到的是个白球（A 发生）．

常用文氏图（Venn diagram）方法帮助说明事件的关系和运算．这时，总将试验设想成是向一方框内投点（而方形图就表示必然事件 Ω），而事件，A，B 等分别表示"所投的点落在图中所标示闭曲线内部"的事件．于是，从图 1－1 可以看出，如果点落在 A 内，当然也是落在 B 内的，这就是 A 蕴含 B. 从图可明白，A 蕴含 B 当然也就是 B 包含 A.

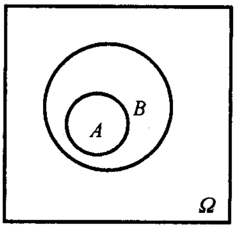


图 1－1　$A\subset B$

事件的相等

若 A 与 B 互相蕴含，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称两事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

两事件 A，B 相等，意即它们应是样本空间的同一个子集，充其量不过是代表着同一事件的不同说法而已．如对例 3 的摸球试验，若以 D 记"摸出球的号码不超过 3"，则显然有 $D=A$.

事件的互斥（或称互不相容）

若事件 A，B 不能在同一次试验中都发生（但可以都不发生），则称它们是**互不相容或互斥**的．

若一些事件中任意两个都互不相容，则称这些事件是**两两互不相容**的，或简称互不相容的．

互不相容事件作为样本空间的子集看，其交集是空集，也可参看图 1－2（a）．

对例 3 的摸球试验，事件 B，C 显然是互不相容事件．

事件的对立（或称逆）

互不相容的一个重要特例是“对立”．称事件

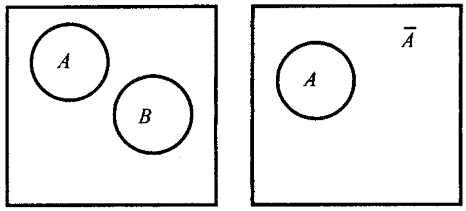
$$B=\{A\ 不发生\}$$

为 A 的**对立事件**或**逆事件**，常记作 $\overline{A}$．换言之，A 不发生就是 $\overline{A}$ 发生．

作为样本空间的子集，逆事件 $\overline{A}$ 是 A［相对于全集 Ω］的**余集**（或**补集**），也可参看图 1－2（b）．

对于例 3 的摸球试验，所示的事件 B 不仅与 A 是互不相容的，而且还是 A 的对立事件，因而也可将 B 记作 $\overline{A}$．当然地，也可将 A 看作是 B 的逆事件而记作 $\overline{B}$，即有

$$A=\overline{B}=\overline{\overline{A}}$$



(a) 互斥　　(b) 对立

图 1－2

在这里，虽然 C 也与 B 互不相容，但 C 不是 B 的逆事件．

从图 1－2 可直接看出，若 A 与 B 互不相容，则必

$$B\subset\overline{A}\ 及\ A\subset\overline{B} \tag{1-1}$$

1.2.3.2 事件的运算

事件的并（或称和）

对给定的事件 A，B，定义一个称为并或和的事件，以 $A\cup B$ 记之：

$$\begin{aligned}A\cup B&=\{A\ 发生或\ B\ 发生\}\\&=\{A,\ B\ 至少有一个发生\}\end{aligned} \tag{1-2}$$

作为样本空间的子集，集合 $A\cup B$ 正是集合 A，B 之并．当已知 A，B 互不相容时，常将 $A\cup B$ 记成 $A+B$．

如图 1－3（a）所示，$A\cup B$ 表示“投点落入由 A，B 外缘所围成区域”的事件，这个区域比 A，B 都大（至少不会小），由 A，B 两部分合并而成．当然，作为集合，重复部分只计入一次．对例 3 的摸球试验，事件“摸出球的号码大于 2”就是 $B+C$；而 $A\cup C$ 就是 A．

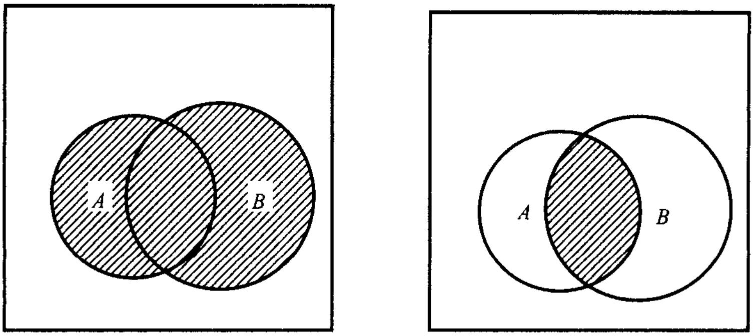
一般地，若 $A\subset B$，则必 $A\cup B=B$，称之为并的“吸收律”．

事件的并，可自然地推广到多个事件的情形，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 是

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n}A_i&=\{A_1\ 发生或\ A_2\ 发生\ \cdots\ 或\ A_n\ 发生\}\\&=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\ 中至少有一发生\}\end{aligned}$$

类似地，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 则为一列事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一发生的事件．

事件的交（或称积）



(a) $A\cup B$　　(b) AB

图1-3　事件运算

对给定事件 A，B，定义一个交或积的事件，以 AB 记之：

$$\begin{aligned} AB &= \{A\text{ 发生且 }B\text{ 发生}\} \\ &= \{A\text{、}B\text{ 同时发生}\} \end{aligned} \tag{1-3}$$

作为样本空间的子集，集合 AB 正是A，B 之交，故也常将交事件 AB 记成$A\cap B$.

如图1-3所示，AB 表示"投点落入 A，B 交叠部分区域（图中划斜线部分）"的事件．显然，AB 既蕴含A 也蕴含B，

$$AB\subset A，AB\subset B$$

事件 A_1，A_2，…，A_n 互不相容，即为

$$A_iA_j=\varnothing，1\leqslant i<j\leqslant n$$

而 A、B 互为对立事件，就是同时成立

$$A\cup B=\Omega，A\cap B=\varnothing$$

对例3的摸球试验，有 $AC=C$．一般地，对同一试验下的事件 A，B，若有 A 蕴含B，即 $A\subset B$，则必 $AB=A$.

事件的交也可自然地推广到多个事件的情形，$A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\prod_{i=1}^{n}A_i$ 是

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\text{ 同时发生}\}$$

类似地，$\prod_{i=1}^{\infty}A_i$ 则是一系列事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 全都发生的事件．

例4　设 A，B，C 是事件，则

(1) 事件"A，B 都发生，但 C 不发生"可表示 $AB\overline{C}$；

(2) 事件"A，B，C 都发生"可表示成 ABC；

(3) 事件"A，B，C 中恰有两个发生"可表示成 $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；

(4) 事件"A，B，C 中至少有两个发生"可表示成 $AB\cup BC\cup AC$；

(5) 事件“A，B，C 中有不多于一个事件发生”可表示成

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$$

(6) 事件“C”发生但 A，B 均不发生”可表示成 $C\overline{A}\,\overline{B}$.

若将 (4) 的事件“A，B，C 中至少有两个发生”表成

$$ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$$

应该也是可以的 .

例 5 在射击比赛时，一选手连续向目标射击三次，若令

$$A_i=\text{“第 } i \text{ 次射击命中目标”},\qquad i=1,\ 2,\ 3$$

试用这三个事件 A_1、A_2、A_3 表示出下面的事件:

(1) $B=$ “三次射击都命中目标”;

(2) $C=$ “三次射击至少有二次命中目标”;

(3) $D=$ “至少有一次未曾命中目标” .

解

(1) 因为事件 B 发生，当且仅当 A_1、A_2、A_3 都发生，故有

$$B=A_1A_2A_3$$

(2) 事件 C 发生，当且仅当“三次射击中恰有二次命中目标” (E) 或“三次射击皆命中目标” (B)，即有 $C=B+E$.

其中:

E_1 是第 2、第 3 次射击命中目标，而第 1 次未曾击中，即 $E_1=\overline{A}_1A_2A_3$;

E_2 是第 1、第 3 次射击命中目标，而第 2 次未曾击中，即 $E_2=A_1\overline{A}_2A_3$;

E_3 是第 1、第 2 次射击命中目标，而第 3 次未曾击中，即 $E_3=A_1A_2\overline{A}_3$.

于是，就有

$$\begin{aligned}C&=B\cup E_1\cup E_2\cup E_3\\&=A_1A_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3\end{aligned}$$

容易看出，B，E_1，E_2，E_3 是互不相容事件 .

另外，将 C 表成

$$C=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$$

也是正确的，而且不难利用事件相等的规定证明这两个表达式是相等的 . 但这里各“加项”并不互不相容 .

这就看到，将一个“复杂事件”表示成若干简单事件的运算结果，其途径并不是惟一确定的，在讨论问题时就要选择有利于解决具体问题的途径去处理 .

(3) 利用文字表述的分析:

“至少有一次未曾击中目标” =“恰有一次击中” + “恰有两次击中” + “三次皆不中”