

674876

5(3)3

7223

T. 2

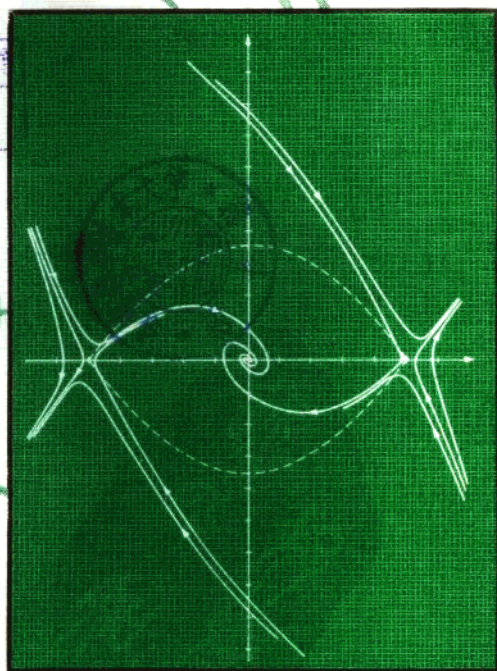
高等工程数学

纲要及题解

第二册

編著者

劉偉源 傅光華



東華書局印行

高等工程數學

綱要及題解

(題解部份完全照 1979

Erwin Kreyszig 第四版)

第 二 冊

編 著 者

劉 偉 源 傅 光 華

私立大同工學院教授

東華書局印行



版權所有・翻印必究

中華民國七十年十月初版

大專
用書 **高等工程數學綱要及題解**

(全四冊)

第二冊 定價 新臺幣壹百元整

(外埠酌加運費匯費)

編著者 劉偉源 傅光華

發行人 卓 鑫 森

出版者 臺灣東華書局股份有限公司

臺北市博愛路一〇五號

電話：3819470 郵政：6481

印刷者 合興印刷廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

(70035)

前言

國內大學工程學系的工程數學教本，一向超越大二學生的程度。以各工程學系作為教本最多的二種高等工程數學（Advanced Engineering Mathematics—由 Kreyszig 或由 Wiley 所著）來說，在美國都是用來作大四或研究所一年級的教本。因此，對剛接觸工程學系必修學科的一般二年級學生而言，頗不易接受，即使接受了也不知有何應用之感。

編者有鑑於此，乃決定將高等工程數學分為四個部分，依專業學科之由淺入深，予以適當配合。由於電算科技之日新月異，故在適當處配合電算分析，使內容不限於傳統上的範圍。

本書在基本架構上，第一部分為常微分方程式及其相關問題；包括了基本常微分方程式、聯立常微分方程式、冪級數法、拉普拉斯轉變式、電算分析法、變分法簡介、以及非線性常微分方程式之介紹。第二部分有向量分析、線性代數、張量分析、及微分幾何等之簡介。第三部分為偏微分方程式。除了基本型態之偏微分方程式外，還包括了各種積分式之轉變式方法；如拉普拉斯轉變式、傅利葉轉變式等應用於偏微分方程中。此外，尚含有圖形轉變、及電算分析各一章。第四部分是複變函數及其相關課題；含複變數基本性質、複變函數之各種性質、基本與特殊型態之圖形轉變方法及應用等。

本書採用出版書局之意見，將 Erwin Kreyszig 所著高等工程數學第四版之全部習題及詳解按原書之順序列於書後，便於讀者研究複習。

本書內容雖力求直接明白之表示方式，唯編者才疏學淺，疏漏之處在所難免，尚祈學界先進及讀者諸君不吝指正。

本書得以順利編定承系內王明庸老師的幫忙，並承東華書局之全力支持，特此誌謝。

編者謹識

民國七十年五月

目 次

綱 要

第六章 向量及其基本運算規則..... 3 ~ 38

- 6-1 向 量 6-2 數量乘積 6-3 向量乘積 6-4 向量的
三乘積 6-5 ∇ 之定義 6-6 $\nabla \cdot A$ 6-7 $\nabla \times A$
6-8 與 ∇ 有關之其他公式 6-9 指標符號簡介

第七章 矩 陣..... 39 ~ 82

- 7-1 基本性質 7-2 矩陣的倒轉(反矩陣) 7-3 線性代數聯
立方程式 7-4 克雷姆法則 7-5 矩陣的多根問題基本型
7-6 矩陣的二次型是 n 個變數的平方項和 7-7 電算方法

第八章 向量的微分與積分..... 83 ~ 118

- 8-1 微 分 8-2 立體空間之曲線 8-3 旋轉坐標系統
8-4 線積分 8-5 表 面 8-6 表面積分 8-7 三重積分

第九章 向量之積分定理、曲線坐標系統、張量分析· 119 ~ 178

- 9-1 平面上線積分與面積積分之互換 9-2 體積積分定理
9-3 指標符號表示式 9-4 線性曲線坐標 9-5 張量分析之基
本定義 9-6 張量之微分性質 9-7 張量之物理分量
9-8 張量之 Covariant 微分

附錄 A 常微分方程式的電算方法..... 179 ~ 223

- A-1 基本方法 A-2 隆基庫達方法 A-3 $R-K$ 法用於兩階及
兩階以上之常微分方程式 A-4 SHOOTING 法簡介 A-5 線
性常微分方程式細論 A-6 非線性常微分方程式細論 A-7 逐次
預測修正法

附錄 B 非線性常微分方程式	224 ~ 256
----------------------	-----------

B-1 首階非線性常微分方程式	B-2 二階及二階以上之非線性常微分方程式	B-3 擾動分析法	B-4 復歸法	B-5 KB 法
-----------------	-----------------------	-----------	---------	------------

附錄 C 變分法簡介	257 ~ 268
------------------	-----------

C-1 積分式之極值條件	C-2 含 y'' 項之情形	C-3 附加條件
--------------	------------------	----------

習題及解答

第六章 線性代數第 I 部分：向量	271 ~ 308
-------------------------	-----------

6.2 向量之分量	271
6.3 向量加法，向量乘以純量	274
6.4 向量空間，線性相關和獨立	280
6.5 內積（點積）	285
6.8 以分量表示向量積	292
6.9 純量三乘積，其他三乘積	300

第七章 線性代數第 II 部分：矩陣及行列式	309 ~ 421
------------------------------	-----------

7.1 基本觀念	309 ~ 319
7.2 矩陣加法，矩陣乘以數字	309 ~ 319
7.3 矩陣之換位，特殊矩陣	309 ~ 319
7.4 矩陣乘法	319
7.5 線性方程式系統，高斯消去法	326
7.6 矩陣之秩數	342
7.8 矩陣之反式	346
7.9 二階及三階行列式	356
7.10 任意階之行列式	358
7.11 依據行列式之秩數，克蘭默規則	365
7.12 雙線性式，二次式，赫米特式，及反赫米特式	379
7.13 特值，特性向量	386

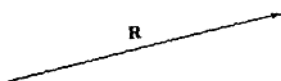
7.14 赫米特式，反赫米特式，及單元矩陣之特值	394
7.15 線性微分方程式系統	403
第八章 向量微分・向量場	422 ~ 477
8.1 純量場及向量場	422
8.2 向量微積分	429
8.3 曲 線	433
8.4 弧 長	437
8.5 切線、曲率和撓率	441
8.6 速度及加速度	445
8.7 多變數函數之鏈鎖規則及均值定理	448
8.8 方向導數，純量場之梯度	453
8.9 座標系統及向量分量的變換	462
8.10 向量場的散度	465
8.11 向量場的旋度	470
第九章 線積分和面積分・積分定理	474 ~ 537
9.2 線積分的求值	478
9.3 雙重積分	483
9.4 雙重積分改為線積分之變換	491
9.5 曲 面	501
9.6 切平面；第一基本形式；面積	504
9.7 面積分	510
9.9 散度定理的結果及應用	517
9.11 司托克定理的結果及應用	526
9.12 與路徑無關的線積分	532

網 要 部 份

第六章 向量及其基本運算規則

6-1 向 量 (vector)

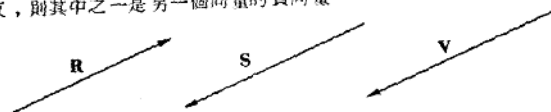
自空間上一點 A 到另一點 B 具有方向性及量的大小，在物理學及工程學上稱為向量，如力，速度，加速度等都具有方向性及大小量，屬於向量。另一種量，如質量，體積等，只有大小之分而無方向性，稱為數量 (scalar)，因此一條帶有箭頭的直線 (表示方向) 用來表示向量，而直線的長短則代表大小。



以符號表示向量 R 之大小為其絕對值

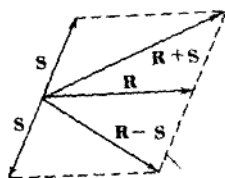
$$R = |R|$$

若兩個向量相等，即表示此兩向量之方向及大小都相同，如果大小相同而方向剛好相反，則其中之一是另一個向量的負向量



如 R 與 S 兩向量相等，而 $R = -V$ 。

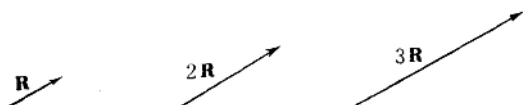
兩個向量的相加，由於其方向性之故，要用平行四邊形相加法則



$$R + S = S + R$$

$$R - S = R + (-S)$$

一數量 a 與向量 R 之乘積為 aR ， aR 之方向與 R 相同，其大小為 R 之 a 倍。

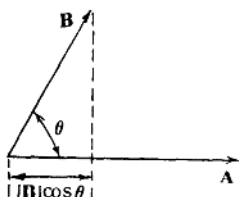


向量與向量的乘積有兩種定義；一為向量與向量的數量乘積 (dot 或 inner product) 以 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 表示之，其結果為數量 (scalar)。另一為向量與向量的向量乘積 (cross 或 vector product) 以 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 表示之，其結果仍為向量。

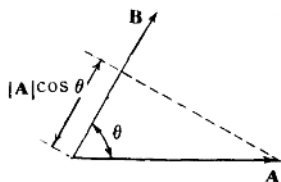
6-2 數量乘積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

根據定義 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 等於 $|\mathbf{A}|$ ， $|\mathbf{B}|$ ，與 $\mathbf{A}$ ， $\mathbf{B}$ 之間夾角之餘弦之乘積

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (1)$$



因此



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{cases} |\mathbf{A}| \text{ 與 } (\mathbf{B} \text{ 在 } \mathbf{A} \text{ 上之投影之大小) \text{ 之乘積} \\ |\mathbf{B}| \text{ 與 } (\mathbf{A} \text{ 在 } \mathbf{B} \text{ 上之投影之大小) \text{ 之乘積} \end{cases}$$

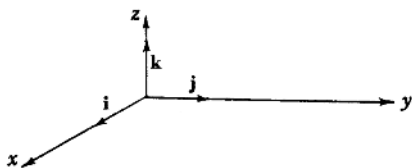
如 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ，方向相同故 $\cos \theta = \cos 0^\circ = 1$ ，大小相同 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$ ，

$$\therefore \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{B}|^2$$

如果 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ ，則可能是 $|\mathbf{A}| = 0$ ， $|\mathbf{B}| = 0$ ，或 $\cos \theta = 0$ ，即 $\mathbf{A}$ ， $\mathbf{B}$ 二者之一或二者皆為零，或 $\mathbf{A}$ ， $\mathbf{B}$ 之夾角 θ 為 $\pi/2$ ($\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 互相垂直)，三度空間之直角坐標 (x ， y ， z) 是以三個互相垂直之基本單位向量 (base unit vector) 表示方向，單位向量即其長度為 1，

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$$

$$\text{而 } \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$



$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

向量 $\mathbf{A}$ 在直角坐標 (x, y, z) 上為

$$\mathbf{A} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \quad (2)$$

a_1, a_2, a_3 是 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 方向之投影長度，亦即 $\mathbf{A}$ 在 x, y, z 三個坐標方向的分量。

若 $\mathbf{B} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$ ，則

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (a_1 \pm b_1) \mathbf{i} + (a_2 \pm b_2) \mathbf{j} + (a_3 \pm b_3) \mathbf{k},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\ &= a_1 b_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_1 b_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_1 b_3 \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + a_2 b_1 \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} \\ &\quad + a_2 b_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_2 b_3 \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + a_3 b_1 \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_3 b_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} \\ &\quad + a_3 b_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (3)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{A}|^2$$

$$\therefore |\mathbf{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (4)$$

$$\text{同理 } \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{B}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \quad |\mathbf{B}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

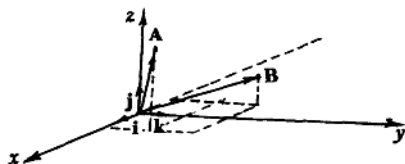
$$\therefore \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (5)$$

【例題 1】求 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 之間夾角 θ ， $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ， $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -1 + 2 + 3 = 4$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{11}, \quad |\mathbf{B}| = \sqrt{6}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{11} \sqrt{6}} \quad \theta = 60.50^\circ$$



數量乘積之基本法則如下：

- (1) 線性，設 α, β 為常數， A, B, C 為向量

$$(\alpha A + \beta B) \cdot C = \alpha A \cdot C + \beta B \cdot C$$

- (2) $A \cdot B = B \cdot A$

- (3) 如果 $|A| = 0$ ，則 $A \cdot A = 0$ ，若 $|A| \neq 0$ ，則 $A \cdot A > 0$ ，

$$\therefore A \cdot A \geq 0$$

- (4) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

- (5) $A \cdot B = |A| |B| \cos \theta$ ，而 $|\cos \theta| \leq 1$

$$\therefore |A \cdot B| \leq |A| |B|$$

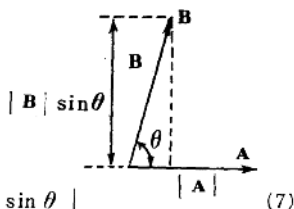
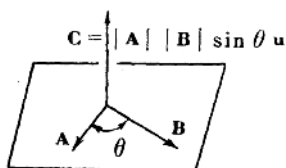
- (6) $|A + B| = \sqrt{(A + B) \cdot (A + B)}$
 $= \sqrt{A \cdot A + B \cdot B + 2 A \cdot B}$
 $= \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2 |A| |B| \cos \theta}$
 $\leq \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2 |A| |B|} = |A| + |B|$
 $\therefore |A + B| \leq |A| + |B|$

- (7) $|A + B|^2 + |A - B|^2 = 2(|A|^2 + |B|^2)$

6-3 向量乘積 $A \times B$

$$A \times B = |A| |B| \sin \theta u = C \quad (6)$$

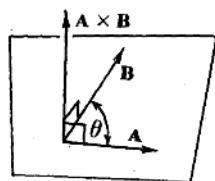
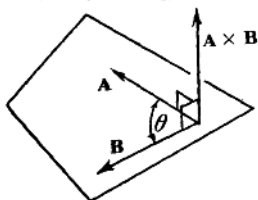
u 是表示 $A \times B$ 方向的單位向量， $|A| |B| \sin \theta$ 等於 $|A|$ 與 $|B| \sin \theta$ 或 $|B|$ 與 $|A| \sin \theta$ 之乘積，表示一個面積的量，由於有方向及數量，因此 $A \times B$ 形成一個新的向量 C



$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (7)$$

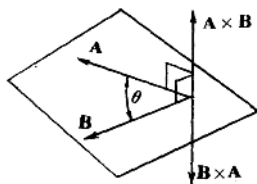
如果 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ ，可能 $|\mathbf{A}| = 0$ ， $|\mathbf{B}| = 0$ ，或 $\theta = 0$ ，即 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 方向相同。

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 之方向，亦即 $\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{u}$ 之方向，依右手法則而定，以食指表示 $\mathbf{A}$ ，中指表示 $\mathbf{B}$ ，則姆指方向即 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 方向，



若以姆指表示 $\mathbf{A}$ ，食指表示 $\mathbf{B}$ ，則中指方向即為 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 方向。考慮 $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ ，以姆指表示 $\mathbf{B}$ ，食指表示 $\mathbf{A}$ ，則 $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ 之方向恰好與 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 方向相反。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (8)$$



$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\ &= a_1 b_1 (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_1 b_2 (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_1 b_3 (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + a_2 b_1 (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_2 b_2 (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_2 b_3 (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + a_3 b_1 (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_3 b_2 (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_3 b_3 (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \end{aligned}$$

但 $\mathbf{i}$ ， $\mathbf{j}$ ， $\mathbf{k}$ 互相垂直，交角為 $\pi/2$ 。

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = & (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} \\ & + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{或 } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (10)$$

向量乘積運算法則

(1) α 為常數，則

$$(\alpha \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \alpha (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\alpha \mathbf{B})$$

$$(2) \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

$$(3) |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| |\sin \theta|$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 &= |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \sin^2 \theta = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \cos^2 \theta \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \end{aligned}$$

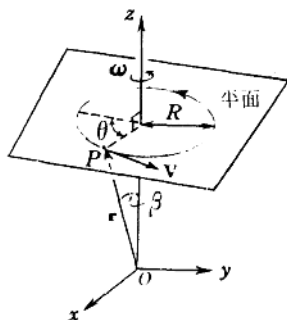
一質點在空間中做平面圓周運動，
選擇通過圓心並垂直此平面之軸方
向為 z 方向，則該質點之位置向量
為 $\mathbf{r}$ ，圓周運動軌跡之半徑 R

$$R = |\mathbf{r}| \sin \beta$$

角速度量

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = |\boldsymbol{\omega}|$$

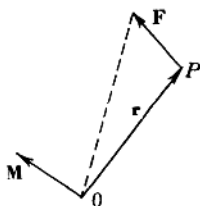
速度 $v = R\omega$



$$\therefore \mathbf{v} = (|\mathbf{r}| \sin \theta)(|\boldsymbol{\omega}|) \\ = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

【例題 2】空間上 P 點受力 $\mathbf{F}$ ，在 O 點所得之力距 (moment of $\mathbf{F}$ about the point O) $\mathbf{M}$ 為

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



6-4 向量的三乘積

考慮 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 之情形，由於 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 是一個向量， $\mathbf{A}$ 與這個新向量之數量乘積之結果形成一個數量。令

$$\mathbf{A} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{C} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}$$

$$\therefore \mathbf{B} \times \mathbf{C} = (b_2 c_3 - b_3 c_2) \mathbf{i} + (b_3 c_1 - b_1 c_3) \mathbf{j} \\ + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (11)$$

其物理意義為 $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = |\mathbf{B}| |\mathbf{C}| \sin \theta \mathbf{u}$ 帶方向性之面積量。

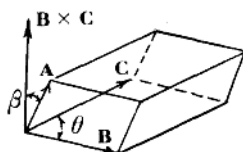
設 $\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{v}$ ， $\mathbf{v}$ 表示 $\mathbf{A}$ 方向之單位向量，則

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| |\mathbf{C}| \sin \theta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| |\mathbf{C}| \sin \theta \cdot \cos \beta \quad (12)$$

β 為 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 之夾角，則

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (|\mathbf{A}| \cos \beta) (|\mathbf{B}|) (|\mathbf{C}| \sin \theta)$$

等於長乘寬乘高，表一體積量。



定運算規則先“ $\times$ ”後“ $\cdot$ ”，則 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 可去掉括弧直接為 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 。

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$$

而 $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{A}$

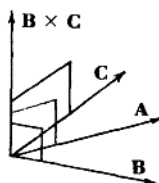
$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{B} \\ &= -\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{A} = [\mathbf{ABC}] \end{aligned}$$

以上六種情形均表同一結果，以 $[\mathbf{ABC}]$ 表示之。如 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 中之 $\mathbf{A} = \mathbf{C}$

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{C}) = 0$$

如果 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0$ ，而 $|\mathbf{A}|$ ， $|\mathbf{B}|$ ， $|\mathbf{C}|$ 均不為零，則 $\sin \theta = 0$ 或 $\cos \beta = 0$ 。若 $\mathbf{B}$ 與 $\mathbf{C}$ 之夾角 θ 不為零，則 $\sin \theta \neq 0$ ， $0 < \theta < \pi$ ，即 $\cos \beta = 0$ ， $\beta = \pi/2$ 而 β 是 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 之夾角，因此 $\mathbf{A}$ ， $\mathbf{B}$ ， $\mathbf{C}$ 在同一平面上，所形成之體積量為零。

設在空間上有三點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ， $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ， $P_3(x_3, y_3, z_3)$ ，令自 P_1 至 P_2 之向量為 $\mathbf{B}$ ， $\mathbf{B} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ ，自 P_1 至 P_3 之向量為 $\mathbf{C}$ ，



$$\mathbf{C} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = (x_3 - x_1)\mathbf{i} + (y_3 - y_1)\mathbf{j} + (z_3 - z_1)\mathbf{k},$$

再令自 P_1 至任意一點 $P(x, y, z)$ 之向量為 $\mathbf{A}$ ，