走向数学丛书

复数、复函数及其应用

张顺燕　著

湖南教育出版社

"走向数学"丛書

陳省身题

本丛书得到国家自然科学基金委员会
数学天元基金的资助

作 者 简 介

张顺燕，男，1936年生，石家庄市人。1962年毕业于北京大学数学力学系，后留校任教至今。1991年任教授。1990年任北京大学数学系函数论教研室副主任。曾出访过日本、香港。1986年应邀访问美国辛辛那提大学，1987年应邀访问华盛顿大学。1991年曾任南开数学研究所复分析学术活动年组委会秘书长，1992年任天津“国际复分析会议”秘书长兼学术委员会委员。

译著有《整函数》、《连分数》、《代数学引论》等，并主编过《一元微积分》、《多元微积分》等书。

前　言

王　元

从力学、物理学、天文学直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学。一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三、四年有数学课．可见数学之重要与其应用之广泛．

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏．我以为要克服这个鸿沟，还是有可能的．近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握．我想，如果知道讨论的对象的具体背景，则有可能掌握其实质．显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到．若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了解．这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书，其中每本小册子尽量

用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面，使工程技术人员，非数学专业的大学生，甚至具有中学数学水平的人，亦能懂得书中全部或部分含义与内容．这对提高我国人民的数学修养与水平，可能会起些作用．显然，要将一门数学深入浅出地讲出来，决非易事．首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解．从整体上说，我国的数学水平还不高，能否较好地完成这一任务还难说．但我了解很多数学家的积极性很高，他们愿意为“走向数学”撰稿．这很值得高兴与欢迎．

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社支持，得以出版这套“走向数学”丛书，谨致以感谢．

序　言

应“走向数学”丛书编委会及湖南教育出版社之约，作者写了这套丛书中的一本，介绍复数、复函数以及几个有关的重要应用．书的内容读者可从目录中一目了然地看到，无需赘言，这些内容在数学中是十分基本和十分重要的．

作者将本书贡献给具有高中以上水平的广大热爱数学的青年读者，自然地，对于中学教师也是一本值得阅读的补充读物．从过去若干年来的出书情况看，讲实数及其应用的书比较多，而讲复数及其应用的书却比较少，这就使人更加感到出这样一本书的必要．

作者希望本书写得有益、有趣，且通俗易懂，这就涉及到，选材是否得当，行文是否生动活泼且流畅，说理是否透彻和清晰，作者力争做到这三点，至于效果如何就请读者评价了．

在写这本书的过程中，作者始终得到李忠教授的热情鼓励与支持，没有他的这种支持与鼓励，或许这本书也不会出现．作者感谢张顺翼同志的热情帮助，他仔细地阅读了全文，并改正了不少错误．最后，作者也衷心感谢湖南教育出版社，他们的通力合作与支持使本书得以出版．

作者于北京大学燕东园

1990 年 8 月 14 日

目　录

第一章　基本知识

§1　复数的代数运算

1.1　复数

数　　$z=x+iy$

称为复数，其中 x 和 y 是实数，而 i 是虚单位，$i^2=-1$. 实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，并记为：

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

两个复数相等是指它的实部和虚部分别相等，即等式

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2.$$

相当于两个等式：

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2.$$

由于在直角坐标系中，当且仅当两个点具有相等的横坐标和相等的纵坐标时才会重合，所以平面上的全部点可以与所有复数间建立一一对应的关系. 换言之，我们将借助于横坐标为 x，纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+iy$，这样的平面称为复平面 C.

表示数 z 的点通常称为点 Z. 复数可以用向量来表示，使复数的实部与虚部对应于向量的横坐标与纵坐标（图 1. 1).

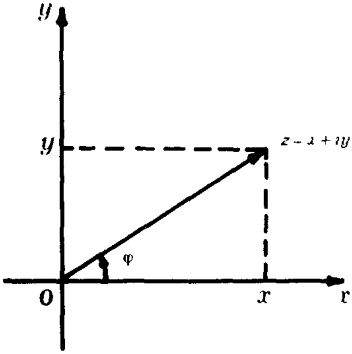

图 1.1

我们将虚部等于零的复数 $x+i0$ 和它的实部看作是一样的：$x+i0=x$，并认为实数是复数的特殊情况. 用 ox 轴上的点表示实数，称此轴为**实轴**. 类似地，实部等于零的复数写为 $0+iy=iy$，称为**纯虚数**，用 oy 轴上的点来表示它们，并称这个轴为**虚轴**.

复数 z 的位置也可用极坐标来确定，也就是借助对应于复数的向量的长度 r，和这个向量与实轴正向的夹角 φ 来确定. 数 r 和 φ 分别称为复数 z 的**模**和**幅角**，记为

$$r=|z|,\quad \varphi=\mathrm{Arg}z.$$

这里引进的模的概念是实数的绝对值的概念的推广. 实数的模就是它的绝对值，纯虚数的模就是它的虚部的绝对值.

由模和幅角的定义推出，若 $z=x+iy$，则

$$x=r\cos\varphi=|z|\cos(\mathrm{Arg}z),$$
$$y=r\sin\varphi=|z|\sin(\mathrm{Arg}z) \tag{1.1}$$

和

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}z)=\mathrm{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

值得注意的是，幅角 Argz 是多值的，它们之间可以相差 2π 的

的整数倍，通常取由不等式

$$0 \leqslant \mathrm{Arg}z < 2\pi$$

所确定的值作为幅角的**主值**，z 的幅角的主值记为 $\arg z$. 于是我们有

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi. \qquad (k：整数) \tag{1.2}$$

例如，当 z 是正实数时，$\arg z = 0$；当 z 是负实数时，$\arg z = \pi$；当 z 是具有正虚部的纯虚数时，$\arg z = \frac{\pi}{2}$. 但是注意，0 的幅角是没有意义的.

利用公式(1.1)，可以把任何异于零的复数表达为复数 z 的三角形式：

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.3}$$

例如，

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0),$$

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi).$$

借助于欧拉公式 $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$（见本书第六章 § 1），可以把复数 z 的三角形式 (1.3) 化为**指数形式**：

$$z = re^{i\varphi}. \tag{1.4}$$

复数 $z = x + iy$ 的**共轭复数**定义为 $\bar{z} = x - iy$. 彼此共轭的复数关于实轴是对称的.

彼此共轭的复数的模是相同的，而幅角相差一个符号：

$$|\bar{z}| = |z| \qquad \arg\bar{z} = -\arg z.$$

任何实数与它自己共轭.

1.2 复数的四则运算

将算术的普通规则运用于复数，我们有

$$
\begin{aligned}
&(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),\\
&(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2).
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

第二个恒等式中，我们使用了关系式 $i^2=-1$.

复数的减法定义为加法的逆运算，由此得到

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

特别地，由(1.5)推出，两个彼此共轭的复数的乘积是实数，等于该复数的模的平方：

$$(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$$

或

$$z\bar{z}=|z|^2.$$

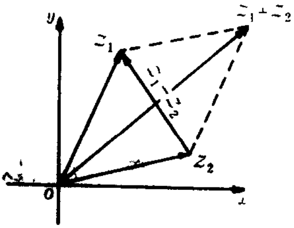

图 1.2

若用向量表示复数，则复数的实部和虚部就是向量的坐标. 因为向量的相加或相减就是它们的坐标对应地相加或相减，于是复数的相加或相减归结为相应向量的相加或相减(图 1.2).

由于复数的模等于对应向量的长度，所以两个复数的和的模不大于两个复数的模的和：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

接连使用几次这个不等式，便得到

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

当且仅当表示数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的向量在一条直线上，且指向同一方向，即当

$$\arg z_1=\arg z_2=\cdots=\arg z_n$$

时．等式成立．

由复数减法的几何意义，若 z_0 是给定的复数，ρ 是给定的实数，则满足方程

$$|z-z_0|=\rho$$

的点的全体形成以 z_0 为中心以 ρ 为半径的圆周，不等式 $|z-z_0|<\rho$ 确定这圆周内的点集，而不等式 $|z-z_0|>\rho$ 确定圆周外的点集．

复数的除法定义为乘法的逆运算．利用共轭数的性质，按下述方法进行复数的除法是方便的：首先把分子和分母乘以分母的共轭数，于是分母变为正实数，然后分别用分母除所得分子的实部和虚部：

$$\begin{aligned}\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}&=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}\\&=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}\\&=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.\end{aligned}$$

若利用复数的三角形式：

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$

$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

则得到，

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\&\quad+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\end{aligned}\tag{1.6}$$

因而复数相乘就是它们的模相乘，而幅角相加：

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2.$$

注意，后一等式的两端是多值的，所以应理解为等式左端的值的集合和它的右端的值的集合完全一样.

表示乘积 z_1z_2 的向量可以这样得到：把表示数 z_1 的向量绕正向旋转角度 φ_2，再把它的长度乘以 $|z_2|$.

用三角式表示除法的公式为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

即

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};\qquad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2.$$

1.3 乘方与开方

设 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. 由乘法规则，

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

即 (1.7)

$$|z^n|=|z|^n,\quad \operatorname{Arg}(z^n)=n\operatorname{Arg}z.$$

利用除法规则，不难验证这公式对于负整数 n 也成立.

在 $r=1$ 的特殊情况下，我们有

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \tag{1.8}$$

利用二项式定理，

$$\begin{aligned}&(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n\\&=\cos^n\varphi+ni\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi+\cdots\\&\quad+n(i)^{n-1}\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi+i^n\sin^n\varphi.\end{aligned} \tag{1.9}$$

将(1.8)和(1.9)结合起来，我们就可以得到通过 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 表达 $\cos n\varphi$ 或 $\sin n\varphi$ 的表达公式.

例如，当 $n=3$ 时，

$$\begin{aligned}\cos3\varphi+i\sin3\varphi&=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3\\&=\cos^3\varphi+3i\cos^2\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi-i\sin^3\varphi.\end{aligned}$$