中级自学科学技术丛书

同解方程与同解不等式

沈超 馬明編著

江苏人民出版社

·内容提要·

本书从理論上闡述方程和不等式的某些常用解法的同解性，以帮助自学者理解方程和不等式的增根的产生与解的遺失的原因，可供高中文化程度的干部、工人、农民閱讀。

中學科学技术丛书

同解方程与同解不等式

沈超　馬明編著

※

江苏省书刊出版营业許可証出〇〇一号

江苏人民出版社出版

南京湖南路十一号

新华书店江苏分店发行　江苏新华印刷厂印

※

开本 787×1092 耗1/32　印張 6 1/4　字数 69,000

一九五八年八月第一版

一九五八年八月南京第一次印刷

印数 1—14,000

統一书号：13100·54

定价：(8)三角二分

前　　言

在解方程或不等式的过程中，常須将方程或不等式变换，在进行变换时，往往破坏了方程或不等式的同解性——产生增根或遺失应有的根。虽然，我們沒有預測增根和失根的一般法則，但是对于某些常用的变换，还是可以个别地建立其同解法則。

这本书从理論上闡明方程和不等式的某些常用解法的同解性，目的在于帮助自学者理解和进一步研究方程和不等式的增根的产生和解的遺失的原因。

与同解方程和同解不等式有关的“含絕对值的方程和不等式”的解法，在本书后面也作了扼要的叙述，这是为了加深讀者对同解方程和同解不等式的理解。

沈　超　　馬　明

1958年5月

目　　录

第一章　变数的允許値的集合

§1．变数的意义。

如果一个房間能够住下 x 个人，問 3 个同样的房間能够住下多少人？在这个問題里，含有这样的三个量：

（Ⅰ）每一个房間可以住下的人数；

（Ⅱ）房間的个数；

（Ⅲ）三个房間可以住下的人数。

但是，在这三个量中，只有房間的个数“3”是固定不变的，而其余的两个則都是沒有固定的。在一种情形下，每一个房間能够住下的人数“x”可以是 2，而在另外的情形下，它又可以是 3、4，或者是 5 等；并且由于“x”的值不固定，因而也就影响到三个房間能够住下的人数（在这里，是 3x）——当 x 是 2 时，它是 6；当 x 是 3 时，它是 9；当 x 是 4 时，它是 12 等。

定义　在某一个問題中，能保持一定数值的量叫作常量（象上面所講“房間的个数”）；可以取不同数值的量叫作变量（象上面所講“每个房間能够住下的人数”和“三个房間能够住下的人数”）。

在上面所述的問題中，共有两个变量；我們可以看出，这两个变量之間是有一定的关系的。如果我們任意指定了 x 的一个值，則与之相应的 3x 的值就可以計算出来。因此，我們可以把这两个变量加以区别，前者叫作自变量或变数，后者叫作

因变量或函数。

定义 如果一个变量，它的数值是可以任意指定的(有时要在某一个范围内)，则叫作自变量或变数；如果对于自变量的每一个确定的值，另一个变量有确定的值和它对应，那末这个变量叫做因变量或自变量的函数。

在上面所講的問題里，如果用 y 来表示"三个房間能够住下的人数"，我們就有

$$y = 3x$$

这个关系式表明：y 是 x 的函数。

通常，对于"y 是 x 的函数"，我們总用下列的符号来表达：

$$y = f(x), \text{或} \quad y = \phi(x) \cdots\cdots$$

假使把上面所講的問題改变为："如果一个房間能够住下 3 个人，問 x 个同样的房間能够住下多少人？"这样一来，每个房間可以住下的人数就是常量；房間的个数和总共可以住下的人数，就是变量；并且，房間个数"x"是自变量或变数，而总共可以住下的人数"3x"是因变量或函数。用 y 来表示总共可以住下的人数，就有

$$y = 3x$$

假使再把上面的問題改变为："3 个同样的房間总共可以住下 x 个人，問每个房間平均住多少人？"則总共可以住下的人数就是自变量或变数，而每个房間住下的人数就是因变量或函数。用 y 表示每个房間住下的人数，就有

$$y = \frac{x}{3}$$

綜合上面所講的三个問題，我們可以列出如下的表：

	在第一个問題中	在第二个問題中	在第三个問題中
每一个房間能够住下的人数	自变量(变数)	常 量	因变量(函数)
房間的个数	常 量	自变量(变数)	常 量
总共能够住下的人数	因变量(函数)	因变量(函数)	自变量(变数)

由此我們可以知道，所謂常量、变量、自变量(变数)、因变量(函数)，乃是在一定的具体問題中就一定的相互关系而言的。因此，某量可以在一个問題中是常量(这时，只要它的数值是保持不变的)，而在另一个問題中是变量(这时，它的数值并不是固定不变的)；同样，在一个問題中，某量可以是自变量(变数)，而在另一个問題中却是因变量(函数)。

在很多的問題中，函数的变化常不是只与一个自变量(变数)有关的。例如，矩形的面积是随着它的长和寬的变化而变的；这时，长和寬都是自变量(变数)，而面积是函数。

对于不只是一个变数的函数，我們也可以用符号来表达。例如，对于两个变数 x 和 y 的函数 v，可以表达为：

$$v=f(x,y),\ \text{或}\ v=\phi(x,y),\cdots\cdots$$

一般的，若 x，y，z，……各是一个自变量(变数)，则它們的函数 v 可以用如下的符号来表达：

$$v=f(x,y,z,\cdots\cdots),\ \text{或}\ v=\phi(x,y,z,\cdots\cdots),\cdots\cdots$$

在用 $f(x)$ 来表示某一函数时，$f(a)$ 就是当 $x=a$ 时这函数的值；同样，在用 $f(x,y)$ 来表示某函数时，$f(a,b)$ 也就是当 $x=a$、$y=b$ 时这函数的值。

例如：若 $f(x)=x^3-4x^2+6$，則 $f(1)=1^3-4\times1^2+6$

$=3$；这个数"3"就是当 $x=1$ 时这函数 $f(x)=x^3-4x^2+6$ 的值，且 $f(a)=a^3-4a^2+6$，$f(uv)=(uv)^3-4(uv)^2+6$……。

又如：若 $f(x,y)=x^2+y^2+x-2$，则 $f(1,2)=1^2+2^2+1-2=4$；这个数"4"就是当 $x=1$，$y=2$ 时这函数 $f(x,y)=x^2+y^2+x-2$ 的值。且 $f(a,b)=a^2+b^2+a-2$，$f(a+b,a-b)=(a+b)^2+(a-b)^2+(a+b)-2=2a^2+2b^2+a+b-2$，……。

应当注意，$f(xy)$ 与 $f(x,y)$，在意义上，并不是完全相同的。就 $f(x,y)$ 来講，举凡两个自变量 x 和 y 的函数总可以用它来表示；但是就 $f(xy)$ 来講，它所表示的則是可以把 xy 作为一个自变量来看待的哪些函数。例如，x^2+y^2+x-2 是两个自变量 x 和 y 的函数，我們可以把它記作：

$$f(x,y)=x^2+y^2+x-2。$$

然而，象 x^2y^2+xy-3，則不仅是两个自变量 x 和 y 的函数，而且还可以把"xy"看作是一个自变量而說它是"xy"的函数；因此，我們就可以把它記作：

$$f(xy)=(xy)^2+(xy)-3,$$

这表明 $(xy)^2+(xy)-3$ 是自变量"xy"的函数（当然，我們也可以用 $f(x,y)$ 来表示它）。很明白的，象 x^2+y^2+x-3 就不是"xy"的函数，因而我們也就不能用 $f(xy)$ 来表示它。

〔注〕对于一些特殊的函数，我們也有专用的符号，例如，对数函数、三角函数、反三角函数等，都是特殊的函数，它們各有一定的专用符号。象大家所知道的，表示这些特殊的函数，我們有符号"logx"、"sinx"、"arcsinx"等等。这些符号，和上面所講的 $f(x)$、$\phi(x)$ 等，虽然在作用上都表示函数，但是前者具有特殊性，而后者則是一般的；这也就是說，象"logx"、"sinx"、"arcsinx"、等，乃是分别地专用于表示一些特殊函数的符号（因而它們都各有一定的特殊性），而 $f(x)$、$\phi(x)$ 等則是一般函数的通用的符号。

§2. 什么叫做变数允許值的集合?

前面講过，自变量(或变数)的值是可以任意指定的。但是，在指定自变量(或变数)为某值时，我們也要考慮到这个自变量(或变数)在具体問題中的实际意义。例如，在上面講过的問題中，当自变量 x 所表示的为每个房間能够住下的人数时，这个 x 的值就只能是正整数；很明白的，这时如果指定这个 x 为分数或負数的值，則是沒有什么实际意义的。

在一个具体問題中，如果指定其自变量(或变数)为某变数使之能有意义，則这样的值就叫作变数的允許值(也就是变数可取的值)。

所謂“变数允許值的集合”，就是所有变数的允許值的全体。任一問題，都有其“变数允許值的集合”。

例如，“一个房間能够住下 x 个人，問 3 个同样的房間能够住下多少人?”在这个問題里，变数 x 表示每一个房間住下的人数，因此，它必須取自然数才有意义，因为人数不可能为 $\frac{1}{2}$个 或 -2 个。

但是，每一个房間所住的人数，虽然需要是自然数，我們可以不可以說一个房間住十万个人呢? 当然，这是与客观事实不符合的，我們不可能有这样的大房間。假若我們所討論的房間最多只能住下十个人，这时，变数 x 的允許值集合是由 1 到 10 的所有自然数。

由此可知，在某一个具体問題中，由于問題的本質的限制，那么，变数的允許值集合也要受限制。

又如在物理学上，研究質点从地面上高 h 处的地方自由

降落，我們有公式：

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

这里，S表示距离，t表示时間，g表示重力加速度（$g=9.8$米/秒^2）。如果我們仅从这个公式来看，变数t的允許值集合是一切值。但就这个具体問題来看，t就必須是非負数（卽大于或等于零），并且t所能取的最大值为$\sqrt{\frac{2h}{g}}$，因为，若$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$，則$S=h$，这就說明，这个質点已經达到地面了。如果取$t>\sqrt{\frac{2h}{g}}$，那么，这个質点就要“鑽在地里了”。

所以，就自由降落的距离公式的这个具体問題而言，变数t的允許值集合是由0到$\sqrt{\frac{2h}{g}}$中間的一切值。写作：

$$0\le t\le\sqrt{\frac{2h}{g}}。$$

就数学上的式子而言，能使这个式子有确定的值的变数值的集合，就是变数的允許值集合。

例如：$\frac{1}{x-1}$这个式子，它的变数x的允許值集合是除1外的一切值，因为当$x=1$时，分母$x-1=0$，这个分数无意义。

又如：$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$的变数x的允許值集合是除1和2以外的一切值。

如果有这样的一个式子：

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{y-1},$$

这里有两个变数。变数 x 的允許值集合是除 2 外的一切值；变数 y 的允許值集合是除 1 外的一切值。这时，叫做变数 x 和 y 的允許值組集合($x \neq 2$ 和 $y \neq 1$ 的一切值)。

变数的允許值（或值組）集合也与所討論的数的范围有关。

例如 $\sqrt{x-1}$ 。在实数范围內来研究它，变数 x 只能取不小于 1 的一切值才有意义。如果在复数范围內来研究，则 x 可以取一切值。

又如 $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$ ，在实数范围內，第一个根式需要 $x \leq 1$，第二个根式需要 $x \geq 2$ 。我們不可能求得一个数，一方面要小于或等于 1，另一方面要大于或等于 2 。因此，沒有一个 x 的值能使这个式子得到一个实数。这样，我們說变数 x 的允許值集合是空集合。但在复数范围內，x 可以取一切值。

定义1. 如果两个式子，对于变数的所有允許值（或值組）都有相等的数值，就說它們是恒等的，这个等式叫做恒等式。

定义2. 把一个式子换以另一个与它恒等的式子，叫做恒等变换。

在进行恒等变换时，必须要注意到变数的允許值集合。

例1. $\frac{x^2}{x}=x$，只有在 $x \neq 0$ 时才成立，若 $x=0$，左端 $\frac{x^2}{x}$ 是无意义的。

例2. $\sqrt[4]{x^2}=\sqrt{x}$，只有在 $x \geq 0$ 时才成立。若 $x<0$，则左端为实数，而右端为虛数。

例3. $\log_a x^2 = 2\log_a x\ (a>0)$，只有在 $x>0$ 时才成立。若 $x\leq 0$，則 $\log_a x$ 无意义。

例4. $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$，只有在 $2n\pi\leq x\leq(2n+1)\pi$（n 为整数）时才成立。否則，$\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}$。

練 习 一

在实数范围內求下列各式的变数的允許值(或值組)的集合：

1. $\dfrac{x-3}{(x+1)(x-2)}$，
2. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}$，
3. $\dfrac{1}{x-y}$
4. $\dfrac{x+\dfrac{1}{x}+1}{x^2+\dfrac{1}{x}}$
5. $\log_a(x+2)\quad(a>0)$
6. $\operatorname{tg} x$

第二章 方程的意义

§3. 何謂方程?

形式如 $f(x,y,z,\cdots\cdots)=\phi(x,y,z,\cdots\cdots)$

的等式，其中 $f(x,y,z,\cdots\cdots)$ 与 $\phi(x,y,z,\cdots\cdots)$ 是变数 x，y，z，……的函数，叫做未知数 x，y，z，……的方程。

方程的未知数的允許值組集合是指它的左端的式子和右端的式子的变数允許值組集合的共同部分。

例1. $2x+3=3x-2$。左端式子的变数 x 的允許值集合是一切值，右端式子的变数 x 的允許值集合也是一切值。

因此，这个方程的未知数 x 的允許值集合是一切值。

例2. $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-2}$。左端式子的变数 x 的允許值集合是除 1 外的一切值，右端式子的变数 x 的允許值集合是除 2 外的一切值。因此，这个方程的未知数 x 的允許值集合是除 1 和 2 外的一切值。

例3. $\frac{1}{x-y}=\frac{1}{y-1}$。左端式子变数 x 和 y 的允許值組集合是 $x \neq y$ 的一切数对：$x=h$，$y=k$，而 $h \neq k$，右端式子变数 y 的允許值集合是除 1 外的一切值（这里 x 可取任意值）。因此，这个方程的未知数 x、y 的允許值組集合是 $x \neq y$ 且 $y \neq 1$ 的一切值，即一切数对：$x=h$，$y=k$ 而 $h \neq k$，及 $k \neq 1$。

例4. $\log_a x+\log_a y=\log_a xy\ (a>0)$。左端式子变数 x 和 y 的允許值組集合是 $x>0$ 和 $y>0$，右端式子变数 x 和 y 的允許值組集合是 x 和 y 同为正数或同为負数，因此，这个方程的未知数 x 和 y 的允許值組集合是 $x>0$ 且 $y>0$ 的一切数对。

例5. $\sec x=\frac{1}{\cos x}$。左端式子变数 x 的允許值集合为 $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$（k 为整数）的一切值，右端式子变数 x 的允許值集合也是 $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ 的一切值。因此，这个方程的未知数 x 的允許值集合是 $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ 的一切值。

〔注〕例 4 和例 5 所选取的方程，平常亦叫做恒等式。

§4. 何謂解方程?

在未知数的允許值組的集合中，能使方程两端相等的未知数的数值組叫做方程的解。

所謂解方程，就是求出这个方程的所有解。

沒有解的方程叫做矛盾方程。

例1. 方程 $2x+3=3x-2$ 的未知数 x 的允許值集合是一切值，但只有在 $x=5$ 时，方程的两端才相等，因此，5 是这个方程的解。

例2. 方程 $\frac{6}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{(x-3)(x-4)}$ 的未知数 x 的允許值集合是除 1、2、3、4 外的一切值。但只有在 $x=5$ 或 $x=\frac{14}{5}$ 时，方程的两端才相等。因此，5 或 $\frac{14}{5}$ 是这个方程的解。

例3. 方程 $x-y=0$ 的未知数 x 和 y 的允許值組集合是一切值。但只有在 $x=y$ 的一切值时，方程两端才相等。因此，这个方程的解是 $x=y$ 的一切数对：$x=h$，$y=k$ 而 $h=k$。

例4. 方程 $\log x^2=2\log x$ 的未知数 x 的允許值集合是 $x>0$ 的一切值。而所有这些值中的任一个都能使方程的两端相等。因此，$x>0$ 的一切值都是这个方程的解。

例5. 方程 $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$ 的未知数 x 的允許值集合是除 1 外的一切值。但 x 取任何值时都不能使方程的两端相等，因而这个方程无解。

由此可知，方程的解的集合可能与方程的未知数的允許值(或值組)集合一致(如例 4)；可能是方程的未知数允許值(或值組)集合的一部分集合(如例 1 、2 、3)；也可能沒有解(如例 5)。

定义 如果M是一个数的集合，在这个数的集合M中取一部分的数值組成一个数的集合S，則集合S叫做集合M的部分集合。

例如在自然数的集合中，取所有的正偶数組成一个集合，这个正偶数的集合叫做自然数集合的部分集合，这样的部分集合叫做眞部分集合。

集合M的本身也叫做它自己的部分集合。例如自然数集合叫做它自己(自然数集合)的部分集合(而不叫做它的眞部分集合)。

一个数也沒有的集合叫做空集合。如(Ⅰ) 17 至 24 間的完全平方数;(Ⅱ) 14 至 16 內的質数(或素数)。

由此可知，任何方程的解的集合是它的未知数的允許值(或值組)集合的部分集合。上面的例 1 、例 2 、例 3 的解的集合是未知数允許值(或值組)集合的眞部分集合。例 4 的解的集合与未知量允許值集合一致。例 5 的解的集合是空集合。对于上述第二种情形的方程(即方程的解的集合与未知量允許值集合一致的情形)就是恒等式；而第三种情形的方程(即方程的解的集合是空集合的情形)就是矛盾方程。

〔注〕 本书中我們把恒等式看作为方程的一种特殊情形，因为下面所討論的方程的性質，对于恒等式来說也是适用的。

第三章　同解方程

§5. 同解方程的意义。

在解方程时，我們必須对方程的两端进行某些数学运算。例如方程：

$$2x-1=5, \qquad (1)$$

两端各加上1，得

$$2x=6。 \qquad (2)$$

又如方程

$$\frac{x^2+3x}{x-1}=\frac{4}{x-1}, \qquad (1')$$

两端同乘以$x-1$，得

$$x^2+3x=4。 \qquad (2')$$

显然，方程(1)的所有解都是方程(2)的解；方程(1′)的所有解，也都是方程(2′)的解。我們就叫方程(2)〔或(2′)〕是方程(1)〔或(1′)〕的結果。

定义　若方程(1)的所有解是方程(2)的解，則方程(2)叫做方程(1)的結果。

例如方程$(x-1)(2x+1)=5(x-1)$是方程$2x-1=5$的結果。因为方程$2x-1=5$的解是3，而$x=3$也滿足方程$(x-1)(2x-1)=5(x-1)$，因而也是它的解。

但方程$2x-1=5$不是方程$(x-1)(2x-1)=5(x-1)$的結果。因为方程$(x-1)(2x-1)=5(x-1)$有解1或3。

而 $x=1$ 不滿足方程 $2x-1=5$，因而不是它的解，只有 3 是方程 $2x-1=5$ 的解。这样，方程 $(x-1)(2x-1)=5(x-1)$ 所有解不全是方程 $2x-1=5$ 的解，所以方程 $2x-1=5$ 不是方程 $(x-1)(2x-1)=5(x-1)$ 的結果。

因此，方程(1)經过某些数学运算变换到方程(2)时，它們有如下的四种关系：

(Ⅰ) 方程(1)的解与方程(2)的解是一致的。也就是說，方程(2)是方程(1)的結果，方程(1)也是方程(2)的結果。例如方程 $2x-1=5$ 与 $2x=6$ 的解是一致的。

(Ⅱ) 方程(1)的解是方程(2)的解，而方程(2)的解中有某些解不是方程(1)的解。也就是說，方程(2)是方程(1)的結果，而方程(1)不是方程(2)的結果。例如方程 $2x-1=5$ 的解是方程 $(x-1)(2x-1)=5(x-1)$ 的解，而方程 $(x-1)(2x-1)=5(x-1)$ 的解 1 不是方程 $2x-1=5$ 的解。

(Ⅲ) 方程(2)的解只是方程(1)的解的一部分，而方程(1)的解包含方程(2)的所有解。也就是說，方程(1)是方程(2)的結果，而方程(2)不是方程(1)的結果，例如方程 $(x-1)(2x-1)=5(x-1)$ 与 $2x-1=5$。

(Ⅳ) 方程(1)不是方程(2)的結果，方程(2)也不是方程(1)的結果。例如 方程 $\frac{(x-1)^2(x-3)}{x-1}=0$ 与 $\frac{(x-1)(x-3)^2}{x-3}=0$，前一方程的解是 3，而 3 不是后一方程的解；后一方程的解是 1，而 1 也不是前一方程的解。

在解方程时，往往要把一个方程变换成另一方程。但变