画法几何学

高宝蕙　赵淑媛　么树芸　编著

国防工业出版社

画法几何学

高宝蕙　赵淑媛　么树芸　编著

国防工业出版社

内容简介

本书是根据课程教学指导委员会制定的《高等工业学校画法几何与机械制图课程教学基本要求》(机械类专业适用)编写的。

本书为加强理论基础，突出能力培养，将全书建立在高等几何学的基础上，用集合论的理论和方法，系统地论述了基本投影理论，形成了比较严谨的画法几何学的理论体系。

本书主要内容有：投影理论基础；点、线（直线、曲线）、面（平面、曲面）、体的映射以及它们之间相互关系的基本投影理论；立体与直线、平面、立体间相交关系的图解基本原理和方法；辅助映射；轴测映射等。

本书叙述简捷，文字易懂，列有适当的例题，且有与本书配套的《画法几何习题集》，便于读者自学。

本书可用作高等工业学校机械类各专业的教科书、参考书，也可供有关教师和研究生参考。

画法几何学

高宝慈　赵淑媛　么树芸　编著

*

国防工业出版社出版

（北京市车公庄西路老虎庙七号）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16　印张$13^1/_2$　308千字

1989年5月第一版　1989年5月第一次印刷　印数：0,001— 1,280册

ISBN 7-118-00841-2/O·35　　定价：2.70元

前 言

当今科学技术迅猛发展，知识更新日益加快，边缘学科、交叉学科、综合学科不断涌现，为适应新形势发展的要求，应使学生具有坚实的理论基础和驾驭新学科的能力．因此，“画法几何学”课程也应责无旁贷地更新、拓广现行教材的传统内容，使之现代化。面临当前的现实，迫使我们编著了本书。

一、全书以投影几何为基础，以“集合论”的理论为工具，对画法几何学的投影理论，作了现代数学的处理和论述，加强了本学科的理论性和科学性，形成了比较严谨的理论体系。

第一章论述了投影理论基础，它是全书的基础。第二、三、四、六章用集合论的映射概念论述了三维空间点、线（直线、曲线）、面（平面、曲面）的映射，用集合的包含运算、交运算，论证了本学科投影理论的基本部分。第五章中，用集合的复合映射概念，揭示了传统投影变换的内在规律，提出了辅助映射的概念，拓广了图解空间几何问题的方法。第七、八章用集合的交运算，研究了立体与直线、平面及立体间定位问题的求解原理和方法。第九章用集合一一对应的传递性质，揭示了空间元素的“三面投影”与“轴测投影”间的内在联系，并介绍了轴测投影图的绘制原理和方法。

二、全书用集合的语言和符号来表达并处理几何运算的逻辑关系、逻辑推理，并列出适当的示范题例。

求解示范题例时，给出了解题算法和解题程序。解题算法表达的是为解题所需，而构造的空间几何元素间的总体逻辑关系；解题程序表达的是每步几何运算的关系，它包括每一步的空间几何关系和投影图上的几何关系，这有助于加深对教材基本内容的理解和启迪思维，使解题思路更加明确，作图步骤更加清晰，让逻辑思维和形象思维的培养得到有机的统一。

三、本书在内容编排上，采取从一般到特殊的方式。先着力阐述普遍规律，再推论到特殊，起到触类旁通的作用，以利于教师因材施教。

在叙述上，力求概念清晰，论述简洁，文字易懂，有详有略，以便于学生自学。

在编写上，注意到既用集合语言和符号表达各种几何关系，又用文字作相应的详细叙述，对于不熟悉集合和逻辑符号的读者，仍能顺利阅读；此外，既注意到内容更新，又照顾到广大教师的习惯，因此书中使用的某些记号尽量做到易理解、易记忆，如 $\overline{L}_{/\!/H}$，由注脚可知，直线 $\overline{L}$ 是平行于 H 面的，故为水平线。

四、使用本书时，如果在讲授中恰当地处理直观与抽象、图象表示与逻辑表达的关系，将会收到更好的教学效果。

编著者经历了 1981 年以来的几度探索性教学实践和教学研究，学习并吸取了国内外同类教材的长处和新内容，于 1986 年编写了内容经过更新的试用教材，并在北京理工大学机械类专业学生中试用，取得较好的教学效果。本书是在试用教材的基础上进一步修改充实而成的。

本书由高宝慈主编。全书九章，其中，第五、七章由赵淑媛编著，其余各章由高宝慈编著。么树芸参加了试用教材第三、四、九章的编著工作。

全书由北京理工大学简召全教授主审。

本书编著过程中，获得简召全教授的积极支持、热情关怀，并提出很多宝贵意见。北京理工大学制图教研室的同事们给予了关心和支持。还有些同事为本书绘图付出了辛勤劳动。我们特借此机会，谨向他们致以诚挚的谢意！

由于本书突破并更新了同类现行教材的传统内容，初次问世，鉴于编著者水平有限，难免有错误与不妥之处，恳请读者批评、指正。

编著者

1988年3月

目　录

绪　论

法国数学家蒙日(G. Monge, 1746～1818)于18世纪末叶，以高度的创造力独辟蹊径创立了画法几何学，并成为数学领域的独立的几何分支。近二百年来，它在物理学、化学、力学、光学以及机械工程、建筑等学科中获得广泛的应用，并显示出非凡的生命力。

一、画法几何学的研究对象

画法几何学是研究三维空间中几何图形在平行映射下的性质的学科。图形在平行映射下的映象（投影）具有不变的（内在的）和可变的两部分性质，并据此建立了投影理论，因此，画法几何学也就是研究投影理论和方法的学科。

画法几何学的主要内容是研究如何将三维空间的几何问题变换到平面上来表示和解决。

画法几何的几何运算是用“作图”来演释的，这就是画法几何的“画法”二字的含义，也是它不同于其它几何学的独特之处。作图演释具有直观、简捷的优点，但运算结果精度不高，因而适用于精度要求不高的场合。

二、画法几何学的研究方法

“在构成几何学时，只许纯粹按逻辑推理进行，绝不容许诉诸直觉或默契”●，自然，对于画法几何也不例外，因而，它的研究方法是使用综合、分析、演释、归纳的推理方法。

画法几何学的投影理论的确立，是以高等几何学为理论基础。

通常的数学系统不仅是用集合来描述，而且是用集合来构造，并且，几乎所有的数学分支都是研究某类对象的集合，因此，画法几何学就是研究点的集合及其运算的学科。众所周知，近代数学——集合论，已广泛应用于数学各分支，成为一切数学分支（除范畴学外）的基础。而且，集合论的魅力和精髓还在于它的符号体系和抽象性，因此，集合论又是用来说明数学中逻辑的，演释的结构之理想工具。因而，把集合论看作现代数学的统一者、简化者是当之无愧的。所以，在画法几何中引入集合论作为建立画法几何学投影理论的数学工具，是有助于画法几何学深入研究的。

三、学习目的和方法

1. 画法几何学是一门历史悠久，比较完整的学科，是高等工业学校的一门重要的技术基础课程。在科技飞速发展的形势下，技术基础课本身应不断用基础科学中的一些新理论，使它的理论更加科学化、系统化，以便能够站在较高的立足点上，观察、认识本学科的本质。因此，在学习过程中，除应掌握投影理论的内容外，还要学会本学科的研究方法。

2. 据画法几何学的研究对象所确定的特点，赋予本课程肩负空间想象能力和空间思

● 梁绍鸿《初等数学复习及研究》，人民教育出版社，1979年。

维能力的培养任务。空间想象能力就是对空间几何问题的形象思维能力，即解题时，从概念分析、问题抽象直至运算和获得结果的整个过程中应具有清晰的空间形象。空间思维能力就是对空间几何问题的逻辑思维能力，即从题设到题断的各个推理的逻辑思维能力和综合、分析、演释、归纳逻辑关系的能力。这两方面能力的培养，除通过教材、教授中获得外，很重要的一方面是通过读者自我实践来获得。读者可借助于集合和逻辑的有关知识，把形象思维和逻辑思维结合起来，有意识地不断实践，自觉地养成严谨的逻辑习惯，并积极的开展逻辑思维，以利于自身能力的提高。

3．画法几何学的特点之一是实践性强，因此，在各种概念、定义、定理建立之后，必须通过作图实践来加深对教学内容的理解和掌握，使读者自身在知识和能力两方面同时增长，相得益彰。

本书常用符号

空间几何元素符号

A、B、C、…；Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、…空间点

AB、CD；$\overline{ABC}$、$\overline{DEFG}$；$\overline{L}$、$\overline{M}$、$\overline{N}$ 空间直线

ABC、$DEFG$；δ、ε、λ、…；P、Q、R、S、T 空间平面

$\widetilde{L}$、$\widetilde{M}$、$\widetilde{N}$…；$\widetilde{ABC}$、$\widetilde{DEFG}$、… 空间曲线

$\widehat{O}$（O，OO_1）以O为圆心，以OO_1为半径的圆或圆弧

Ψ、Φ、Δ、Υ、Ω 曲面或曲面立体

S-ABC、Λ 平面立体

Σ 立体

$\overset{\infty}{E}{}^0$ 非固有点

$\overset{\infty}{E}{}^1$ 非固有直线

$\overset{\infty}{E}{}^2$ 非固有平面

Ψ_H、Ψ_V、Ψ_W 曲面立体的水平、正面和侧面界限素线

$\overline{L}_{//H}$、$\overline{L}_{//V}$、$\overline{L}_{//W}$ H、V、W面的平行直线

$\overline{L}_{\perp H}$、$\overline{L}_{\perp V}$、$\overline{L}_{\perp W}$ H、V、W面的垂直线

P_H、P_V、P_W 平面P的H、V、W面的迹线

M、N、S 直线的H、V、W面的迹点

几何关系符号

$/\!/$（$\not\parallel$） 平行(不平行)

$\perp$（$\not\perp$） 垂直(不垂直)

$\cap$（$\not\cap$） 相交(不相交)

$\dot{-}$ 相错

$\smile$ 相切

$=$（$\neq$） 相等(不相等)

$\doteq$（$\not\doteq$） 重合(不重合)

$\cong$ 全等

$\backsim$ 相似

$\overline{\backsim}$ 相仿

$\overline{L}\widehat{,}\overline{M}$、$AB\widehat{,}CD$、$\overline{ABC}\widehat{,}\overline{DEF}$、… 直线间的夹角

$\theta_{\overline{L},\delta}$ 直线$\overline{L}$与平面δ间的夹角

映射和投影符号

$\rightarrow$ 映射为

Π、H、V、W 投影面

Γ 映射空间

$\overset{\infty}{E}_H$、$\overset{\infty}{E}_V$、$\overset{\infty}{E}_W$ H、V、W面的映射中心

$\overline{J}$、S 映射线、映射方向

a、b、c、… 点的投影

ab、cd、…$\overline{l}$、$\overline{m}$、$\overline{n}$、… 直线的投影

$\overline{abc}$、$\overline{defg}$、… 平面的积聚投影

$(AB)_\Pi$、… 直线AB在投影面Π上的投影

α、β、γ、 直线或平面对H、V、W面的倾角

解题算法符号

〔A1〕 点面属于关系解题算法

〔A2〕 辅助面解题算法

〔A3〕 三面共点解题算法

〔A4〕 点曲面属于关系解题算法

〔A5〕 截交线解题算法

〔A6〕 贯穿点解题算法

〔A7〕 相贯线解题算法

解题程序符号

Rt-α、Rt-β 直角三角形法解题程序

L_{MH}、L_{MV}、L_{MW} H、V、W面最大斜度线解题程序

$L_{\perp H}$、$L_{\perp V}$、$L_{\perp W}$ H、V、W面垂直线解题程序

L_{P_H}、L_{PV} 水平迹线、正面迹线解题程序

$P_{\perp H}$、$P_{\perp V}$、$P_{\perp W}$ H、V、W面垂直面

	解题程序
$P_{//H}$、$P_{//V}$、$P_{//W}$	H、V、W面平行面解题程序
AP	辅助面求交点解题程序
TP_H、TP_V	点的换面解题程序
$TL_{//H}$、$TL_{//V}$	映为投影面平行线的换面解题程序
$TL_{\perp H}$、$TL_{\perp V}$	映为投影面垂直线的换面解题程序
$TP_{\perp H}$、$TP_{\perp V}$	映为投影面垂直面的换面解题程序
$TP_{//H}$、$TP_{//V}$	映为投影面平行面的换面解题程序
IE_H、IE_V	正等测水平、正面椭圆的解题程序
IP	正等测点的解题程序

集合和逻辑关系符号

A、B、C、…	集合
a、b、c、…	元素
$\{\cdots\cdots\}$	由……组成的集合
$\{x\mid P(x)\}$	由具有性质$P(x)$的全体x组成的集合
$\varnothing$	空集
$\in$	属于，"点在直线(平面）上"
$\notin$	不属于，"点不在直线（平面）上"
$\ni$	含，"过点作直线(平面)"
$\not\ni$	不含，"直线(平面)不通过点"等
$\subseteq$ $(\supseteq)$	包含于(包含有)
$\nsubseteq$ $(\nsupseteq)$	不包含于(不包含)
$\subset$	含于，是……的子集，直线在平面上
$\not\subset$	不含于，不是……的子集，直线不在平面上
$\supset$	含有，是……的母集，平面上含有直线，过直线作平面
$\not\supset$	不含有，平面不过直线
$\cup$	并
$\cap$	交
$-$	差
$=$	相等
$\sim$ $(\nsim)$	对等(不对等)
$\rightarrow$	映射为，对应为
$\leftrightarrow$ $(\not\leftrightarrow)$	对应(不对应)
$\prec$	前于，先于，小于
$\|A\|$	集合A的基数
$\aleph$	超限基数
$\vee$	或
$\wedge$	且
$\Rightarrow$	如果……则……
$\Longleftrightarrow$	当且仅当，等价于
$\forall$	所有的，任意的
$\exists$	存在有

第一章　投影理论基础

§1-1　集合和投影空间梗概

一、集合理论概要

1. 集合、元素

集合是个原始概念，它不能定义，只能描述。

集合论的创始人德国数学家康托尔（G. Cantor，1845～1918）这样描述集合，“集合就是我们直觉或思维中明确的、个别的物体的聚合”。也就是说，具有某种特定性质的具体的或抽象的全体，称为集合，记作A、B、C、……。构成集合的对象，称为元素，记作a、b、c、……。例如，直线就是实数点的集合（点集）。

设有集合A及元素a，如果a是A的元素，记作$a\in A$，读为a属于A；如果a不是A的元素，记作$a\notin A$，读为a不属于A。

一个集合由属于它的元素所确定，因此，集合的记法是把所属全体元素直接列出，用花括号括上，如$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots a_n\}$；或把构成集合的元素所满足的条件直接列出，如$A=\{a\mid a$满足的条件$\}$。例如$A=\{64,\ 216,\ 512,\ 1000,\ 1728\}$，也可记为$A=\{a\mid a=b^3,\ 4\leqslant b\leqslant 12,\ b$为偶数$\}$。

集合的元素本身也可以是一个集合，例如

$$S=\{a,\ \{3,4\},\ b,\ \{f\}\}$$

集合$\{f\}$是只有元素f的单集，它是集合S的元素，因此$\{f\}\in S$，但$f\notin S$。

2. 相等、包含

相等和包含是集合间的两种基本关系。

如果集合A与集合B的元素完全相同，或者说A的每一个元素都是B的元素，且B的每一个元素都是A的元素，则集合A与B相等，记作$A=B$。上述定义可表示为

$$A=B\Longleftrightarrow[(x\in A\Longrightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Longrightarrow x\in A)]$$

或
$$A=B\Longleftrightarrow(x\in A\Longleftrightarrow x\in B)$$

如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，则称A是B的子集，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$，读为A包含于B，或B包含A。如果集合B不包含集合A，则表示成$A\nsubseteq B$，或$B\nsupseteq A$。上述定义可表示为

$$A\subseteq B\Longleftrightarrow(x\in A\Longrightarrow x\in B)$$

定理1-1　（两集合间包含关系的性质）

设有集合A、B、C，则

（1）集合包含于集合自身。这种性质称为包含的自反性，表示为$A\subseteq A$。

（2）如果集合A包含于集合B，且集合B包含于集合A，则集合A与B相等。这

种性质称为包含的反对称性，表示为

$$(A\subseteq B\wedge B\subseteq A)\Longleftrightarrow A=B$$

（3）如果集合A包含于集合B，且集合B包含于集合C，则集合A包含于集合C。这种性质称为包含的传递性，表示为

$$(A\subseteq B\wedge B\subseteq C)\Longrightarrow(A\subseteq C)$$

包含关系的反对称性（2）说明了集合的相等与集合的包含之间的关系，因而，为证明两集合相等提供了依据。

设有集合A、B，如果$A\subseteq B$且$A\neq B$，即集合A中每一个元素都是集合B的元素，但B中至少有一个元素不是A的元素，则称集合A是B的真子集，记作$A\subset B$。于是可表示为

$$A\subset B\Longleftrightarrow(A\subseteq B\wedge A\neq B)$$

由此引入两个特殊的集合：全集和空集。

包含所论述的每个集合的集合，称为全集。

包含于任何集合的集合，或不含任何元素的集合，称为空集，记作$\varnothing$。

3．集合的并、交、补运算

集合的并、交、补运算是集合的三个基本运算。两个或多个集合经某种运算，能够生成对应的新集合，如作并运算而生成并集，作交运算而生成交集，作补运算而生成补集。

（1）并集

设有集合A、B，由属于A或属于B的所有元素构成的集合，称为A和B的并集，记作$A\cup B$，读为A并B。

表示为　$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$

或　　　$x\in A\cup B\Longleftrightarrow x\in A\vee x\in B$

如图 1-1 所示。

（2）交集

设有集合A、B，由属于A且属于B的所有元素构成的集合，或由集合A和B所共有的元素构成的集合，称为A和B的交集，记作$A\cap B$，读为A交B。

表示为　$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$

或　　　$x\in A\cap B\Longleftrightarrow x\in A\wedge x\in B$

如图 1-2 所示。

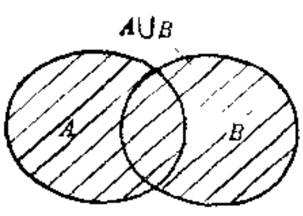


图 1-1

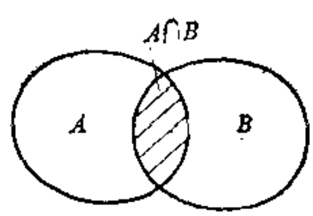


图 1-2

如果$A\cap B=\phi$，就说集合A和B交空，或说不相交；反之，$A\cap B\neq\phi$，则说A和B相交。

（3）补集

设有集合A、B，由属于A但不属于B的所有元素构成的集合，称为集合B相对于A的补集，又称为集合A和B的差集，记作$A-B$，读为A差B。

表示为 $A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$

或 $x\in A-B \Longleftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$

由属于B但不属于A的所有元素构成的集合，称为集合A相对于B的补集，又称为集合B和A的差集，记作$B-A$，读为B差A。

表示为 $B-A=\{x \mid x\in B\wedge x\notin A\}$

或 $x\in B-A \Longleftrightarrow x\in B\wedge x\notin A$

如图 1-3 所示。

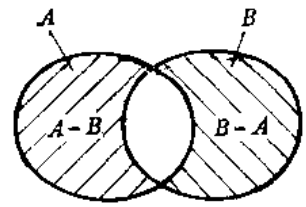


图 1-3

4. 映射

（1）基本概念

任意两个非空集合的元素间的关系，称为该两集合的二元关系，例如$A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{1, 2, 3\}$，若有

$$R=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle d, 1\rangle\}$$

则R为A到B的二元关系。

二元关系是以序偶为元素的集合。

映射是一种特殊的二元关系。

设A、B为非空集合，如果存在一个规律f，使得对于A中任意一个元素a，就有B中的唯一元素b与之对应，则称f是A到B的映射，记作

$$f: A\longrightarrow B\ (\text{或}\ A\xrightarrow{f}B)。$$

元素$a(\in A)$经映射f与$b(\in B)$对应，表示成$b=f(a)$，则称b为a在f下的映象（象），称a为b在f下的原象。

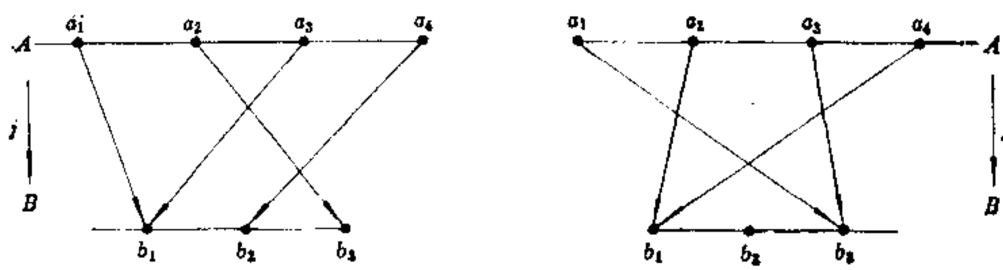
A的所有元素的象的集合$\{f(a) \mid a\in A\}$为A在f下的象，记为$f(A)$。称为映射f的值域，记为$\mathrm{ran}f$，于是

$$f(A)=\{f(a) \mid a\in A\}=\mathrm{ran}f。$$

A中所有以$b(\in B)$为象的元素构成的集合$\{a \mid a\in A,\ f(a)\in B\}$为集合$B$的原象，记为$f^{-1}(B)$。称为映射$f$的定义域，记为$\mathrm{dom}f$，于是

$$f^{-1}(B)=\{a \mid a\in A,\ f(a)\in B\}=A=\mathrm{dom}f$$

如图 1-4 所示。



(a) (b)

图 1-4

如果映射 f 的值域 $\mathrm{ran} f \subset B$，则称 f 是 A 到 B"内"的映射. 如图 1-4（b）所示。如果映射 f 的值域 $\mathrm{ran} f = B$，则称 f 是 A 到 B"上"的映射（如图 1-4（a）所示），到上的映射又称为满射。

（2）映射的性质

定理 1－2 （映象的性质）

设 $f: A \longrightarrow B$，$A_1, A_2 \subseteq A$，则有

1）两集合的并集的象等于象的并集

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

2）两集合的交集的象是象的交集的子集

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

3）两集合的差集的象是象的差集的母集

$$f(A_1 - A_2) \supseteq f(A_1) - f(A_2)$$

4）如果 A_1 为 A_2 的子集，则 A_1 的象为 A_2 的象的子集

$$A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$$

例1 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，$B = \{a, b, c, d\}$，

$f = \{\langle 1, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4, d\rangle, \langle 5, c\rangle, \langle 6, a\rangle, \langle 7, b\rangle\}$，

$A_1 = \{1, 2, 3\}$，$A_2 = \{3, 4, 5\}$，

试验证定理 1-2（2）、（3），图 1-5 。

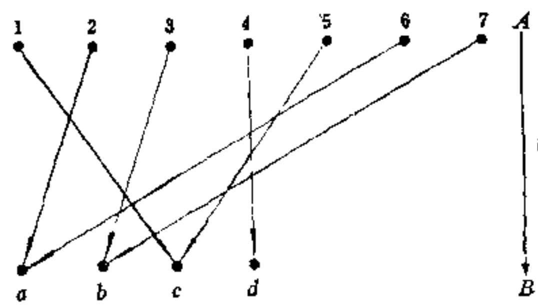


图 1-5

解：

① $f(A_1 \cap A_2) = f(\{3\}) = \{b\}$

$f(A_1) = \{a, b, c\}$，$f(A_2) =$
$= \{b, c, d\}$

$f(A_1) \cap f(A_2) = \{b, c\}$

$\therefore f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

② $f(A_1 - A_2) = f(\{1, 2\})$
$= \{a, c\}$

$f(A_1) - f(A_2) = \{a\}$

$\therefore f(A_1 - A_2) \supseteq f(A_1) - f(A_2)$

定理 1－3 （原象的性质）

设 $f: A \longrightarrow B$，$B_1, B_2 \subseteq B$，则有

1）如果 B_1 为 B_2 的子集，则 B_1 的原象为 B_2 的原象的子集

$$B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$$

2）两集合的并集的原象等于原象的并集

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

3）两集合的交集的原象等于原象的交集

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

5. 常值映射和恒等映射

设 f 是 A 到 B 的映射，如果对于任意一个 $a \in A$，都有 $f(a) = b_0$，b_0 是 B 中一个固定的元素，则称 f 为常值映射。如图 1-6 所示。

设 f 是 A 到 B 上的映射(满射)，且 $A=B$，如果对于任意一个 $a\in A$，都有 $f(a)=a$，则称 f 为 A 上的恒等映射，记作 I_A。

由恒等映射的定义可得，恒等映射是一个集合 A 到自身的映射，如图 1-7 所示。

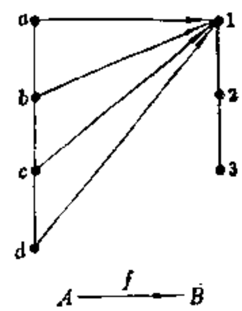


图 1-6

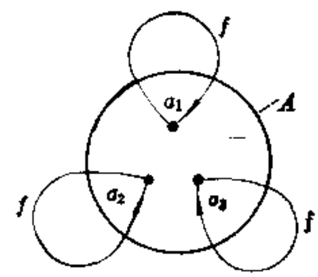


图 1-7

6．一一映射

设 f 是 A 到 B 的映射，如果对于任意两个不同元素 $a_1,a_2(\in A)$，总有 B 中的两个不同的元素与它对应，即 $f(a_1)\neq f(a_2)$ 成立，则称 f 是 A 到 B 的单射，如图 1-8 所示。

如果映射 f 既是 A 到 B 的满射，又是单射，则称 f 为一一映射（又称双射），记作 $f: A\xrightarrow{1-1}B$，如图 1-9 所示。

可见，如果映射 f 是一一映射，则不仅 A 的每个元素 a 对应 B 的唯一元素 b，而且，B 的每个元素 b 也对应 A 的唯一元素 a，成为一一对应。

由上所述，不难看出，常值映射不是一一映射，恒等映射是一一映射。

7．逆映射

设 f 是 A 到 B 的一一映射，如果存在一个映射，使得 B 中每个元素 b，有 A 中的唯一元素 a 与之对应，则称该映射为映射 f 的逆映射，记作 f^{-1}。

根据映射的定义，不难得出，存在逆映射的充要条件是映射 f 是一一映射。因而，逆映射 f^{-1} 的定义域为 B，值域为 A，且逆映射 f^{-1} 也是一一映射。如图 1-10 所示。

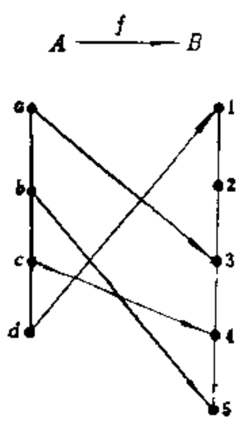


图 1-8

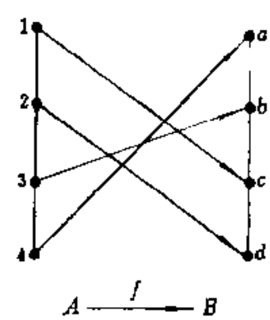


图 1-9

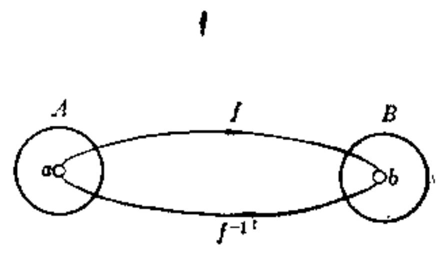


图 1-10

8．复合映射

设有映射 $f:A\longrightarrow B$，$g:B\longrightarrow C$，如果存在一个映射 h，使得 A 中任意一个元素 a，有 C 中的唯一元素 c 与之对应，即 $h(a)=g(f(a))=c$，则称映射 h 为映射 f 和 g 的复合映射。记作 $h=g\circ f:A\longrightarrow C$，读为 g 跟着 f。

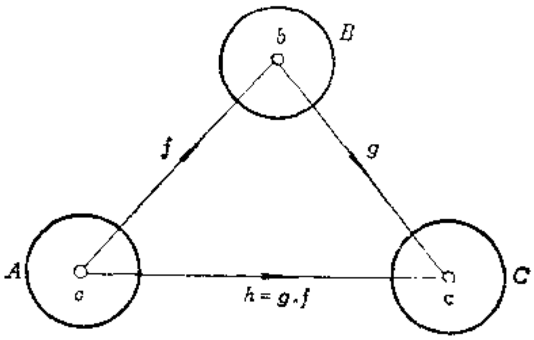


图 1-11

复合映射必须满足映射 f 的值域 $\mathrm{ran}f$ 是映射 g 的定义域 $\mathrm{dom}g$ 的子集($\mathrm{ran}f\subseteq\mathrm{dom}g$)，否则，定义 $h=g\circ f$ 为空。

复合映射 h 的定义域就是映射 f 的定义域 A，其值域就是映射 g 的值域的子集($h(A)\subseteq g(B)$)。如图 1-11 所示。

例 2 设有集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{x,y,z\}$，如果存在映射 $f:A\longrightarrow B$，$g:B\longrightarrow C$，

且 $f=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$

$g=\{\langle 1,y\rangle,\langle 2,x\rangle\}$

则有映射 $h=g\circ f:A\longrightarrow C$

$$h=\{\langle a,y\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,y\rangle\}$$

由此可得 $\mathrm{dom}f=\{a,b,c\}$，$\mathrm{ran}f=\{1\}$；

$\mathrm{dom}g=\{1,2\}$，$\mathrm{ran}g=\{x,y\}$；

$\mathrm{dom}h=\{a,b,c\}$，$\mathrm{ran}h=\{y\}$。

显然，$\mathrm{dom}h=\mathrm{dom}f$，$\mathrm{ran}h\subseteq\mathrm{ran}g$。

定理 1－4 设有集合 A，B，C，如果映射 $f:A\longrightarrow B$，$g:B\longrightarrow C$ 是一一映射，则复合映射 $h=g\circ f:A\longrightarrow C$ 也是一一映射。

表示为 $f:A\xrightarrow{1-1}B$，$g:B\xrightarrow{1-1}C\Longrightarrow h:A\xrightarrow{1-1}C$

由此可知，当复合映射 h 为一一映射时，其值域就是映射 g 的值域。

9．集合的基数

（1）对等集合

设有集合 A、B，如果集合 A 和 B 间存在一一映射 f，则集合 A 和 B 对等(等价)称集合 A、B 为对等集合。记作 $A\sim B$。

例如，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3\}$，存在映射 $f:A\longrightarrow B$，$f=\{\langle a,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle\}$，那么，集合 A 和 B 对等($A\sim B$)，集合 A 和 B 为对等集合。

显然，$A\sim B$ 与 $A=B$ 是不一样的。

（2）有限集合和无限集合

自然数集合 $N=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$ 的子集 $N_n=\{1,2,3,\cdots\cdots n\}$，称为自然数列的截段。

如果集合 A 和 N_n 对等($A\sim N_n$)，则称 A 为有限集合；如果集合 A 和 N_n 不对等($A\nsim N_n$)，则称 A 为无限集合。

如果集合A和N对等($A\sim N$)，则称A为可数集，如正奇数集、正偶数集；否则($A\nsim N$)，称A为不可数集，如实数集。

（3）集合的基数

所有与集合A对等（等价）的集合归为一类，称为集合A的等价类。集合A的等价类的共有特征，称为集合A的基数（或称势），记作$|A|$。

有限集合的基数，称为有限基数；无限集合的基数，称为超限基数。

由基数定义可得出：

1）有限集合的基数就是其元素的个数，用自然数n计。例如，$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{a, b, c, d, e\}$，$C=\{$北京，天津，上海，广州，南京$\}$，集合B和C与集合A对等，归为集合A的等价类，其共有特征为5，则它们的基数为$|A|=5$。因此，个数概念是有限基数的直观概念。

2）无限集合的基数不能用个数概念来表征，必须以对等概念为基础来确定超限基数，超限基数仅能表达集合无限的层次，而不是多少。可数集合的基数，习惯上用$\aleph_0$表示（$\aleph$是希伯来文的第一个字母，读作“阿列夫”。$\aleph_0$读作“阿列夫零”）。不可数集合的基数用$\aleph$表示。

定理1-5　设A_1、A_2为非空有限集合，集合A_1与A_2的基数之和等于集合A_1和A_2的并集与交集的基数之和。

$$|A_1|+|A_2|=|A_1\cup A_2|+|A_1\cap A_2|$$

该定理常称为包含排斥原理，对于有限集合的元素计数问题有着广泛应用。

10．点集

在几何学中所讨论的集合是以点为元素的集合，称为点集。例如，直线是经实数集到数轴的有序的一一映射（称为同构映射或相似映射）所获得的映象，也就是说该映射使得实数集的每个数r都对应着数轴上唯一点p，且如果实数有$r_1\prec r_2$(数r_1小于数r_2)，则点有$p_1\prec p_2$(点p_1在点p_2的左边）关系。如图1-12所示。

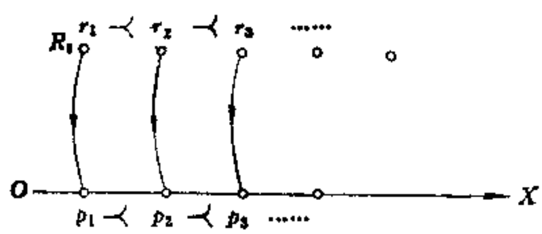


图 1-12

同理，面、立体是实数集经同构映射，在二维空间（由坐标轴OX、OY正交所确定的空间)、三维空间（由坐标轴OX、OY与OZ正交所确定的空间）的映象——点集。

由上所述，得出：

1）“点”、“线(直线或曲线)”、“面(平面或曲面)”、“立体”都是点集。“点”可视为单点集，其基数为1，例如，直线$\overline{L}$和平面δ相交于点K，$\overline{L}\cap\delta=\{K\}$。线、面、立体都是不可数点集，其基数均为$\aleph$。

2）按点集的元素——点的维数分，直线和曲线是一维点集E^1，平面和曲面是二维点集E^2，立体是三维点集E^3。自然，点本身是零维点集E^0。

如果点A在直线$\overline{L}$（或平面δ）上，则称点A属于直线$\overline{L}$（或平面δ），$A\in\overline{L}$(或$A\in\delta$)。如果，过点A作直线$\overline{L}$(或平面δ)，意即含点A作直线（或平面)，记为$\overline{L}\ni A$