

积分变换及其在 物理海洋学中的应用

路季平

海洋出版社

内 容 简 介

积分变换使许多问题的分析与求解得到简化和更有规律性，因此在许多科学领域中得到广泛的应用。本书系统地介绍傅里叶变换和拉普拉斯变换以及它们在变换分析与变换求解中的应用，并着重介绍这两种积分变换在物理海洋学中的实际应用。

本书可供物理海洋学、力学、应用数学等专业学生学习参考，也可供海洋科技工作者参考。

积 分 变 换 及其在物理海洋学中的应用 路 季 平

海洋出版社出版 (北京市复兴门外大街)

新华书店北京发行所发行 北京靛厂印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 8³/₈ 字数: 180 千

1984 年 5 月第一版 1984 年 5 月第一次印刷

印数: 3,000

统一书号: 13193·0256

定价: 1.35 元

前 言

积分变换使许多问题的分析与求解得到简化和更具有规律性。傅里叶变换和拉普拉斯变换是两种常用的积分变换，它们在许多科学领域中得到广泛的应用。本书的目的是为物理海洋学、力学、应用数学等专业的大学生和海洋科技工作者提供一本关于积分变换的学习参考书。书中前三章简要地叙述了傅里叶级数的基础知识，并且系统地介绍傅里叶变换的基本性质。第四章介绍傅里叶变换在物理海洋学中的一些实际应用，其中个别问题需要用到随机过程的知识。第五章介绍离散傅里叶变换和快速傅里叶变换算法及其实际应用。最后两章叙述拉普拉斯变换及其在物理海洋学中的应用。积分变换在变换分析与变换求解中的应用是多方面的，本书在系统介绍傅里叶变换和拉普拉斯变换的同时，着重介绍它们在物理海洋学中的实际应用，由于水平所限，难免有不妥和错误之处，希望读者提出批评指正。

本书原稿经山东海洋学院张炳根副教授审阅，并提出许多宝贵意见和建议，特在此致谢。

编 者

1982年9月

目 录

第一章 傅里叶级数	1
§ 1.1 周期函数的傅里叶级数展开	1
§ 1.2 复数形式的傅里叶级数	3
§ 1.3 帕塞法耳等式	7
§ 1.4 多维傅里叶级数	8
第二章 傅里叶变换	11
§ 2.1 傅里叶积分与傅里叶变换	11
§ 2.2 傅里叶变换的性质	19
§ 2.3 矩和函数宽度	35
§ 2.4 傅里叶正弦变换和余弦变换	42
§ 2.5 多维傅里叶变换	44
第三章 脉冲函数的傅里叶变换	50
§ 3.1 广义函数	50
§ 3.2 脉冲函数 $\delta(t)$	54
§ 3.3 普通函数的广义导数	58
§ 3.4 广义极限	61
§ 3.5 一些广义函数的傅里叶变换	66
§ 3.6 周期函数的傅里叶变换	70
§ 3.7 泊松和公式	75
第四章 傅里叶变换在物理海洋学中的某些应用	78
§ 4.1 三维空间定常风海流	81
§ 4.2 三维空间海流	83

§ 4.3	风海流的消衰过程	94
§ 4.4	大陆架风暴潮	97
§ 4.5	近岸有限宽风带的升降流	103
§ 4.6	沿岸有限深海风海流	109
§ 4.7	利因随机过程外推预报海流	114
§ 4.8	水位振动谱	117
第五章	离散傅里叶变换	123
§ 5.1	离散采样	123
§ 5.2	采样定理	128
§ 5.3	窗函数	132
§ 5.4	离散傅里叶变换	135
§ 5.5	离散傅里叶变换的性质	138
§ 5.6	快速傅里叶变换	146
§ 5.7	二维快速傅里叶变换	156
§ 5.8	傅里叶级数的 FFT 算法	162
§ 5.9	傅里叶积分的 FFT 算法	165
§ 5.10	海浪功率谱密度函数的估计	167
§ 5.11	通过相关函数估计海浪谱密度函数	171
§ 5.12	海浪的数值模拟	177
§ 5.13	互相关函数和互功率谱密度的估计	178
第六章	拉普拉斯变换	188
§ 6.1	拉普拉斯变换式	188
§ 6.2	拉普拉斯变换的性质	194
§ 6.3	拉普拉斯变换对解微分 方程问题的应用	202
第七章	拉普拉斯变换在物理海洋学中的某些应用	209
§ 7.1	深海漂流	209

§ 7.2	漂流的发展	212
§ 7.3	两个水团的混合	215
§ 7.4	有限深海的海流	217
§ 7.5	海水密度的湍流扩散	221
§ 7.6	海流预报问题	225
§ 7.7	不定常沿岸风海流	230
§ 7.8	定常与不定常风海流的关系	238
附录	245
附录 1	傅里叶变换表	245
附录 2	拉普拉斯变换表	247
附录 3	积分公式与特殊函数	252
参考文献	256
人名对照表	258

第一章 傅里叶级数

波动是自然界中广泛存在的一类现象。声波、光波、电磁波、水波、潮波、生物波等都是以波动的形式进行传播。为了分析内部结构复杂的周期波，常把它们分解为一系列频率不同、振幅不等的谐波叠加。傅里叶级数则是进行这类分析的数学工具。

§ 1.1 周期函数的傅里叶级数展开

考虑周期为 T 的函数 $f(t)$ ，在间断点 t_0 处规定

$$f(t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)].$$

假设函数 $f(t)$ 在 $[-T/2, T/2]$ 内满足狄里克莱 (Dirichlet) 条件，即满足条件：(1) 连续或只有有限个第一类间断点；(2) 只有有限个极值点。利用函数系

$$1, \cos \frac{2\pi t}{T}, \cos \frac{4\pi t}{T}, \dots, \cos \frac{2\pi n t}{T}, \dots$$

$$\sin \frac{2\pi t}{T}, \sin \frac{4\pi t}{T}, \dots, \sin \frac{2\pi n t}{T}, \dots$$

的正交性质

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi n t}{T} \sin \frac{2\pi k t}{T} dt = 0, \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, \\ n = 0, 1, \dots, \end{array}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi n t}{T} \cos \frac{2\pi k t}{T} dt = 0, \quad \begin{array}{l} n, k = 0, 1, \dots, \\ n \neq k \end{array}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi kt}{T} \sin \frac{2\pi nt}{T} dt = 0, \quad \begin{matrix} n, k = 1, 2, \dots, \\ n \neq k \end{matrix}$$

和

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \left(\frac{2\pi nt}{T} \right) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 \left(\frac{2\pi nt}{T} \right) dt = \frac{T}{2},$$

函数 $f(t)$ 可展开为傅里叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right), \quad (1.1)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt \quad (n=0, 1, \dots), \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.2)$$

称为 $f(t)$ 的傅里叶系数, 它们构成一个数对列 $\{a_n, b_n\} (n=0, 1, \dots)$ 。(1.1) 式右端的每一项均表示一谐波, 展开式本身说明, 一个内部结构复杂的周期波 $f(t)$ 可分解为一系列谐波的叠加。

$\omega_n = 2\pi n/T$ 称为谐波的圆频率, $1/T$ 称为基频, n/T 称为谐频, 它是基频的整数倍。这些谐波的振幅是 $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ 。

对于定义在有限区间上的函数, 总可以延拓为周期函数, 所以也可以展开为傅里叶级数。

将一个周期函数 $f(t)$ 展开为它的傅里叶级数, 其展开式是唯一确定的。这样就建立了周期函数 $f(t)$ 和数对列 $\{a_n, b_n\}$ 之间的一一对应。(1.2) 式给出了由函数 $f(t)$ 确定数对列 $\{a_n, b_n\}$ 的表达式, (1.1) 式则给出了由数对列 $\{a_n, b_n\}$ 确定函数 $f(t)$ 的表达式。这种相互转换关系, 为分析周期波提供很大方便。函数 $f(t)$ 便于在时间域 (t) 上对一个波形进行分析, 数对列 $\{a_n, b_n\}$ 则便于在频率域 (ω_n) 上对一个波进行分析。当已

知与波 $f(t)$ 对应的数对列 $\{a_n, b_n\}$ 时, 则不仅可以知道该波是由哪些频率的谐波组成的, 而且可以知道这些谐波的振幅分布。由于谐波振动的能量与振幅的平方成正比, 所以组成波的能量随频率的分布也随之确定。由此可见, 用傅里叶级数展开的方法可以分析周期波的内部结构, 也即分析它是由哪些频率的谐波组成的。

§ 1.2 复数形式的傅里叶级数

在实际应用中, 采用复数形式的傅里叶级数有时更方便。利用欧拉(Euler)公式

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, 可把函数 $f(t)$ 的傅里叶级数展开式表示为复数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad (1.3)$$

其中

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (n=0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (1.4)$$

称为 $f(t)$ 的傅里叶系数。 c_n 与 a_n, b_n 的关系是

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}. \quad (1.5)$$

周期波 $f(t)$ 的第 n 个谐波分量

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t \quad (n=1, 2 \dots)$$

的振幅为 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ 。在复数形式中, 第 n 个谐波为

$$c_n e^{i\omega_n t} + c_{-n} e^{-i\omega_n t}$$

并且有

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

可见 $|c_n|$ 和 A_n 同样描述了各个谐波的振幅随频率变化的分布。

c_n 可表示为指数式

$$c_n = |c_n| e^{i\varphi_n},$$

序列 $|c_n|$ 称为波 $f(t)$ 的振幅谱, 序列 $\varphi_n = \arg c_n$ 称为波 $f(t)$ 的相位谱, 序列 c_n 称为 $f(t)$ 的复谱. 振幅谱是偶函数, 相位谱是奇函数. 为了直观起见, 可把振幅和频率的关系用图表示, 这就是所谓频谱图. 由于这种谱的频率只取离散值, 在频谱图上是用线段表示谱值, 所以也称为离散谱或线状谱. 因为所有的谐频是基频的整数倍, 所以相邻谱线之间的距离是相等的。

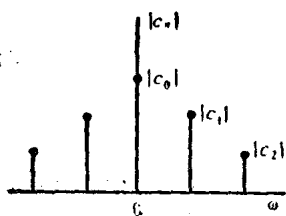


图1 振幅谱

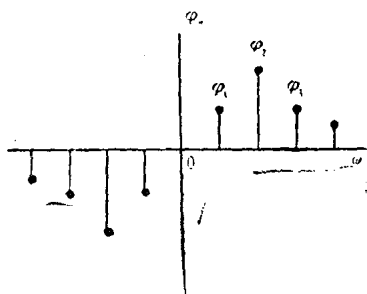


图2 相位谱

从振幅谱的图上, 如图1所示, 不仅可以清楚地知道波 $f(t)$ 是由哪些频率的谐波组成的, 而且可以直接地了解各组成波的重要性, 从而将波的内部组成直观化。

例1 周期为 T 的矩形波 $f(t)$ 在一个周期内的表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & a < |t| < \frac{T}{2}, \end{cases}$$

按照前面的规定, $f(\pm a) = \frac{1}{2}$. $f(t)$ 可展开为傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t},$$

其中

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-a}^a dt = \frac{2a}{T}, \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-a}^a e^{-i\omega_n t} dt \\ &= \frac{2a}{T} \frac{\sin \omega_n a}{\omega_n a} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

若规定 $n=0$ 时

$$\frac{\sin \omega_0 a}{\omega_0 a} = 1,$$

则有展开式

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2a}{T} \frac{\sin \omega_n a}{\omega_n a} e^{i\omega_n t} \\ &= \frac{2a}{T} + \frac{4a}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n a}{\omega_n a} \cos \omega_n t. \end{aligned}$$

波 $f(t)$ 及其复谱如图 3, 4 所示。

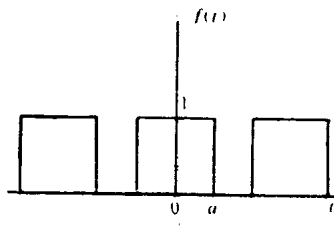


图 3

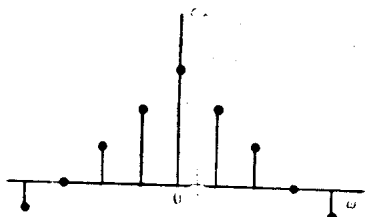


图 4

例 2 周期为 T 的三角形波 $f(t)$ 在一个周期内的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a}, & |t| < a \\ 0, & a < |t| < \frac{T}{2}. \end{cases}$$

它可展开为傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t},$$

其中

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) dt = \frac{a}{T}, \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{2}{T} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) \cos \omega_n t dt \\ &= \frac{a}{T} \left[\frac{\sin(\omega_n a/2)}{\omega_n a/2} \right]^2. \end{aligned}$$

若规定 $n=0$ 时

$$\frac{\sin(\omega_0 a/2)}{\omega_0 a/2} = 1,$$

则有展开式

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{T} \left[\frac{\sin(\omega_n a/2)}{\omega_n a/2} \right]^2 e^{i\omega_n t} \\ &= \frac{a}{T} + \frac{2a}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\omega_n a/2)}{\omega_n a/2} \right]^2 \cos \omega_n t. \end{aligned}$$

波 $f(t)$ 及其复谱如图 5, 6 所示。

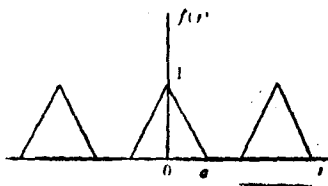


图 5

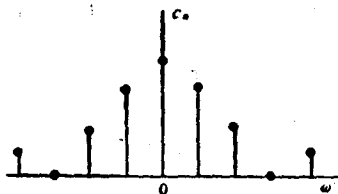


图 6

§ 1.3 帕塞法耳等式

设函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 具有相同的周期 T , 并且在 $[-T/2, T/2]$ 内满足狄里克莱条件, 于是有傅里叶级数展开

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t},$$

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{i\omega_m t}.$$

利用正交性质

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega_n t} \cdot (e^{i\omega_m t})^* dt = 0, \quad m \neq n$$

和性质

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega_n t} \cdot (e^{i\omega_m t})^* dt = 1, \quad m = n$$

得

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) g^*(t) dt &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m^* e^{-i\omega_m t} \right) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n d_m^* \cdot \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(\omega_n - \omega_m) t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n^*. \end{aligned}$$

这里 * 号表示复数共轭。

特殊情况, 当 $f(t) = g(t)$ 时, $d_n = c_n$, 于是得

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (1.6)$$

利用前面 § 1.2 的(1.5)式, 上式变为

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (1.7)$$

以上两式均称为帕塞法耳(Parseval)等式。(1.6)式说明, 周期函数的平方在一个周期内的平均值等于其傅里叶系数模方的和。等式左端在物理上表示波 $f(t)$ 在一个周期内的平均功率。因此, 这个等式的物理意义是, 周期波在一个周期内的平均功率在不计常数因子的情况下等于各组成波能量的总和。对等式(1.7)可作类似的解释。

§ 1.4 多维傅里叶级数

设函数 $f(x, t)$ 对变量 x 的周期是 L , 对变量 t 的周期是 T 。可以把它展开为二维傅里叶级数。先固定 t , 对 x 展开为傅里叶级数

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \cos \frac{2\pi n t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \sin \frac{2\pi n t}{T},$$

其中

$$A_n(x) = \frac{2}{T\delta_n} \int_{-T/2}^{T/2} f(x, t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt \quad (n=0, 1, \dots),$$

$$B_n(x) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x, t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\delta_n = \begin{cases} 2, & n=0 \\ 1, & n \neq 0. \end{cases}$$

然后将 $A_n(x)$, $B_n(x)$ 对变量 x 展开得

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \cos \frac{2\pi k x}{L} \cos \frac{2\pi n t}{T} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \cos \frac{2\pi k x}{L} \sin \frac{2\pi n t}{T} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} \sin \frac{2\pi k x}{L} \cos \frac{2\pi n t}{T} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} \sin \frac{2\pi k x}{L} \sin \frac{2\pi n t}{T}, \end{aligned}$$

其中

$$a_{nk} = \frac{4}{LT\delta_n\delta_k} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-L/2}^{L/2} f(x,t) \cos \frac{2\pi kx}{L} \cos \frac{2\pi nt}{T} dx dt$$

$$b_{nk} = \frac{4}{LT\delta_n} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-L/2}^{L/2} f(x,t) \cos \frac{2\pi kx}{L} \sin \frac{2\pi nt}{T} dx dt$$

$$c_{nk} = \frac{4}{LT\delta_n} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-L/2}^{L/2} f(x,t) \sin \frac{2\pi kx}{L} \cos \frac{2\pi nt}{T} dx dt$$

$$d_{nk} = \frac{4}{LT} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-L/2}^{L/2} f(x,t) \sin \frac{2\pi kx}{L} \sin \frac{2\pi nt}{T} dx dt.$$

采用复数形式的展开为

$$f(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{nk} e^{-2\pi i \left(\frac{kx}{L} + \frac{nt}{T} \right)},$$

$$c_{nk} = \frac{1}{LT} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-L/2}^{L/2} f(x,t) e^{-2\pi i \left(\frac{kx}{L} + \frac{nt}{T} \right)} dx dt.$$

并且有帕塞法耳等式

$$\frac{1}{LT} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-L/2}^{L/2} |f(x,t)|^2 dx dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{nk}|^2.$$

对于更多变量的周期函数,可进行类似的展开。

习 题

1. 将周期为 T 的函数

$$f(t) = \begin{cases} -t - \frac{T}{2}, & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ -t + \frac{T}{2}, & 0 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$f(t+T) = f(t),$$

展开为复数形式的傅里叶级数。

2. 若函数系 $\{\varphi_i(x)\} (i=1, 2, \dots)$ 在 $[a, b]$ 上是标准正交的,

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除有限多个第一类间断点外是连续的, 并有展开式

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x),$$

$$a_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots,$$

证明

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2.$$

第二章 傅里叶变换

自然界中有些波是长时间内存在的非周期波。对于非周期波，可以先在有限区间内展开为傅里叶级数，然后令区间无限增大，这时傅里叶级数将转变为傅里叶积分，相应的离散谱将转变为连续谱。傅里叶积分变换对于分析非周期波起着重要的作用。本章主要介绍傅里叶变换的基本性质。

§ 2.1 傅里叶积分与傅里叶变换

设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的非周期函数。假定它仅有第一类间断点，在间断点 t_0 处规定

$$f(t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)].$$

如果函数 $f(t)$ 在任何有限区间内都满足狄里克莱条件，那么可以在有限区间 $[-T/2, T/2]$ 内把它展开为傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}.$$

将 c_n 的表达式代入前式得

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-i\omega_n \tau} d\tau \right] e^{i\omega_n t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-i\omega_n \tau} d\tau \cdot \Delta\omega, \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

上式右端是积分和的形式。令 $nT \rightarrow \infty$ ，这时 $\Delta\omega = 2\pi/T \rightarrow 0$ ，有