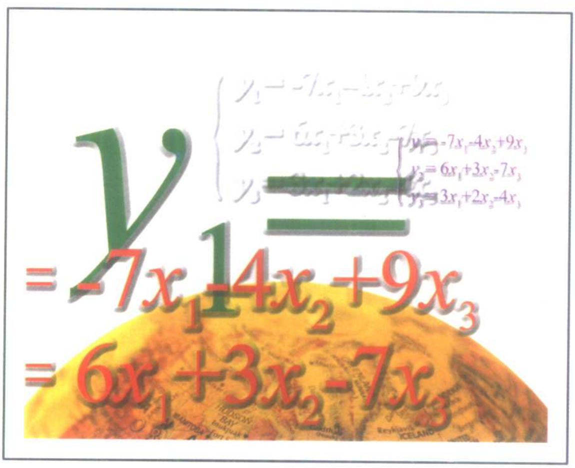
高等学校数学教材系列丛书

线性代数
——题型·方法



- 解题方法
- 典型例题
- 综合练习
- 模拟考题
- 考研题型

主编　梁晓毅　副主编　杨战民　任小红

西安电子科技大学出版社　http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

线性代数——题型·方法

主 编 梁晓毅

副主编 杨战民 任小红

参 编 彭长根 白云霄 王晓琴 王玉萍 李莉

西安电子科技大学出版社

2003

【内 容 简 介】 本书按照高等学校数学课程教学指导委员会制订的《线性代数课程教学基本要求》及硕士研究生入学考试大纲编写. 全书分为六章，第一章为行列式，第二章为矩阵及其运算，第三章为矩阵的初等变换与线性方程组，第四章为向量组的线性相关性，第五章为相似矩阵及二次型，第六章为线性空间与线性变换。本书与同济大学编写的《线性代数》(第三版)配套，各章结构为基本内容、基本要求、基本方法、典型例题精解、课后重点习题选解及综合练习题六部分. 书后附有答案与提示及近年部分研究生考试(线性代数部分)试题与答案.

本书可作为本科生及专科生学期考试及考研复习的辅导教材，也可供教师与科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数——题型·方法/梁晓毅主编.
—西安：西安电子科技大学出版社，2003.2
(高等学校数学教材系列丛书)
ISBN 7-5606-1196-6

Ⅰ.线… Ⅱ.梁… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 107219 号

策　　划　戚文艳
责任编辑　张晓燕
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)8227828　　邮　编　710071
http://www.xduph.com　　E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印　　刷　陕西画报社印刷厂
版　　次　2003 年 2 月第 1 版　2003 年 5 月第 2 次印刷
开　　本　850 毫米×1168 毫米　1/32　印张 9.5
字　　数　234 千字
印　　数　4 001～8 000 册
定　　价　13.00 元
ISBN 7-5606-1196-6/O·0060

XDUP 1467001-2

前　言

“线性代数”、“概率论与数理统计”及“复变函数”是理工科高等院校中除“微积分”以外的三门重点数学课程，它们是许多专业课的理论基础，对后继专业课起着举足轻重的作用．此外，它们也是许多专业的硕士研究生入学考试的必考内容．因此，学好这三门课对本科生及各类专科生是非常重要的．但是，这三门课程都具有理论性较强，较为抽象，方法较难掌握的特点．为此，我们组织了多年在高校担任这三门课的教学工作并具有丰富教学经验的教师编写了这套高等学校数学课系列辅导教材，以满足在校学生及自学人员的需求．

这套系列教材的特点是结构紧凑、简明，题型丰富．除了列举常见题型以外，本书还选取了部分近年的考研题作为例题或习题，并且对各院校较多使用的教材(《线性代数》(第三版)，同济大学编)内的重要题型虽然予以解答，分析其解题方法，使读者通过例题掌握基本概念、基本解题思路．此外，书中还配有综合练习题，使读者能对自己的学习效果进行自我检验．书中许多题型虽然在一般教材中难以见到，但在高校学期考试及考研题中频繁出现．

本书是这套系列教材中的第一册，主要分为 6 章，基本按同济大学《线性代数》(第三版)顺序编写．各章结构如下：第一部分为基本内容，简述本章的内容(定义、定理及有关公式)．第二部分为基本要求，按照大纲要求，指明本章必须熟练掌握的重点内容及作为一般了解的内容，使读者做到区分主次，心中有数．第三部分为基本方法，根据基本要求、基本内容，简明地列举了本章的主要解题方法．第四部分为典型例题精解，精选了典型的题

型予以详细分析及解答，给读者以示范，使读者在解题时有一个基本思路；这部分还包括一些近年来高校本科生学期考试试题及考研原题. 第五部分为同济大学《线性代数》(第三版)课后重点习题选解，对该教材课后习题中的一些重点题予以解答，可供读者参考. 第六部分为综合练习题，选编了一些常见的典型习题或考研题(配有答案或提示).

本书由陕西科技大学基础课部数学教研室梁晓毅、杨战民、任小红主编，最后由梁晓毅统稿.

西安电子科技大学出版社以及陕西科技大学数学教研室的同仁在本书的编写过程中给予了大力支持，在此一并表示由衷的谢意.

由于编写时间仓促，本书尚有不足之处，恳请读者或同行予以批评指正.

编者

2003 年 1 月

目　　录

第一章 行 列 式

1.1 基 本 内 容

1. 行列式定义

取 n^2 个数排列成 n 行 n 列的数表后，取不同行且不同列的数做乘积，并冠以符号 $(-1)^t$ 求和，称作 n 阶行列式，即

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中，t 为 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$p_1p_2\cdots p_n$ 为 1，2，…，n 的任一个排列. 和式中共有 $n!$ 项. 或

$$D=\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$$

s 为 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数. n 阶行列式记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. 性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同，则行列式等于零.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，如第 i 列的元素都是两数之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

3. 重要定理及公式

1) 上(下)三角行列式及对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

2）行列式的按行（列）展开法则

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},\ j = 1, 2, \cdots, n$$

及

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0,\ i \neq j$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0,\ i \neq j$$

3）范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j)$$

4）克拉默法则

n 元 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2 基 本 要 求

(1) 记住行列式两种定义(行(列)标排列).

(2) 能熟练运用行列式的性质化简行列式.

(3) 记住一些重要结果，如上(下)三角行列式、对角行列式、范德蒙行列式、克拉默法则、行列式的按行(列)展开公式等.

1.3 基本解题方法

(1) 按行列式的定义求解.

(2) 由行列式的基本性质化行列式为上(下)三角行列式或对角行列式.

(3) 按行列式的按行(列)展开法则降阶求解.

(4) 加边法，即按行列式加一行一列升高一阶，变为特殊行列式来解.

(5) 递推公式法.

1.4 典型例题精解

【例 1－1】 求下列各题的逆序数 t：

(1) $1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$；

(2) $n(n-1)\cdots 2\cdot 1$.

解　(1) 显然，此排列中 1，3，…，$(2n-1)$的逆序数均为 0，从 $2n$ 开始，逆序数分别为 0，2，4，…，$2n-2$，所以

$$\begin{aligned}t &= 0+0+\cdots+0+0+2+4+\cdots+2n-2\\ &= n(n-1)\end{aligned}$$

(2) 因为 1 与其他数构成 $n-1$ 个逆序，2 与其他数构成 $n-2$ 个逆序，依此类推，$n-1$ 与其他数构成 1 个逆序，所以

$$t=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

【例 1－2】　如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 t，排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

解　$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 中任意两个不同的 x_i，x_j 必在且仅在 $x_1x_2\cdots x_n$或 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 之一中构成一个逆序，同时这两个排列的逆序总数为 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$，因此，$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}-t$.

【例 1－3】　写出 4 级行列式中所有带有负号并且包含因子 a_{23}的项.

解　由行列式定义可知，其每项均为取自于不同行不同列的数，故所求的项为

$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44};\ -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41};\ -a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

【例 1－4】　按定义计算下列行列式：

$$(1)\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n\end{vmatrix};\ (2)\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5\\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0\\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0\\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

解　(1) 此行列式只含有一个非零项 $a_{1,n-1}a_{2,n-2}a_{3,n-3}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}$，其符号项为$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$，因此原行列式的值为

$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

（2）此行列的一般项可表成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，列指标 j_3，j_4，j_5 只能在 1，2，3，4，5 中取不同的值，故 j_3，j_4，j_5 中至少有一个要取 3，4，5 中的一个数，从而任一项至少要含一个零因子，故任一项均为零，即原行列式等于零.

【例 1-5】 计算下列行列式：

（1）$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$；

（2）$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_n^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$

其中，a_i，$b_i\neq 0$；$i=1, 2, \cdots, n+1$

解 （1）将 D_n 按第一列展开，可得到一个上三角行列式和一个下三角行列式，则

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n$$

（2）$D_{n+1}\xrightarrow[(i=1,2,\cdots,n+1)]{r_i\div a_i^n}a_1^na_2^n\cdots a_{n+1}^n$

$$\cdot\begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n} \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{范德蒙行列式}} (a_1a_2\cdots a_{n+1})^n \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(b_ia_j-b_ja_i)$$

【例 1－6】 利用范德蒙行列式计算下列行列式：

(1) $$D_{n+1}=\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n & 2n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

(2) $$D_n=\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \cdots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解　(1) $D_{n+1}\xlongequal[\text{交换至第 1 列}]{\text{最后一列依次与第 } n \text{ 列，第}(n-1)\text{列，…，第 1 列}}$

$$(-1)^n\begin{vmatrix} (2n)^n & (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n \\ (2n)^{n-1} & (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

由范德蒙行列式的结果，令 $x_i=2n-i(i=0,1,2,\cdots,n)$，得

$$D_{n+1}=(-1)^n(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 0}[(2n-i)-(2n-j)]$$

$$=(-1)^n\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)$$

(2) $D_n\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{c_i\div\frac{x_i}{x_i-1}}\prod_{i=1}\frac{x_i}{x_i-1}$

$$\cdot\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1-1&x_2-1&\cdots&x_n-1\\x_1(x_1-1)&x_2(x_2-1)&\cdots&x_n(x_n-1)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-2}(x_1-1)&x_2^{n-2}(x_2-1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-1)\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加到第 3 行,}\cdots\text{,新的第 }n-1\text{ 行加到第 }n\text{ 行}]{\text{第 1 行加到第 2 行,将新的第 2 行}}\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i-1}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

【例 1-7】 计算下列行列式：

(1) $D=\begin{vmatrix}0&1&2&-1&4\\2&0&1&2&1\\-1&3&5&1&2\\3&3&1&2&1\\2&1&0&3&5\end{vmatrix}$；

(2) $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&4&\cdots&n-1&n\\2&3&4&5&\cdots&n&n+1\\3&4&5&6&\cdots&n+1&n+2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&n+1&n+2&n+3&\cdots&2n-2&2n-1\end{vmatrix}$；

(3) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$；

(4) $D_n=\begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$；

(5) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$；

(6) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

解 (1) 对于这种数字行列式，通常采用降阶法，而降阶要先找到数 1(如果行列式中没有数 1，可以通过两行(列)相减得到 1)，然后再用数 1 把 1 所在的行(列)的其他非 0 元素化为 0，从而展开降阶. 本例的解法具有代表性.

$$D \xlongequal[\substack{r_4-3r_1\\ r_5-r_1}]{r_3-3r_1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -10 \\ 3 & 0 & -5 & 5 & -11 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & -10 \\ 3 & -5 & 5 & -11 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3+5r_1\\ r_4+2r_1}]{r_2+r_1} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -9 \\ 13 & 0 & 15 & -6 \\ 6 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 6 & -9 \\ 13 & 15 & -6 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -483$$

(2) 注意到本例的后一行各元素都比前一行多 1，则可得

$$D_n \xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

当 $n=1$，2 时，则

$$D_1 = 1，D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$