

数学小丛书 12 SHUXUEXIAOCONGSHU

多面形的欧拉
定理和闭曲面
的拓扑分类

江泽涵

北京市数学会编

人民教育出版社

数 学 小 丛 书

多面形的欧拉定理
和
闭曲面的拓扑分类

江 泽 涵

北 京 市 数 学 会 编

人 民 教 育 出 版 社

1964 年 • 北 京

一个多面形是有顶点(或叫作角),有棱,有面的,把它的顶点数,棱数,面数分别记作 V, E, F ; 整数 $V - E + F$ 就叫做它的欧拉示性数。第一章里的定理 1 是说:凸多面形的欧拉示性数是 2. 这是属于中学立体几何范围的一个定理。只要读者对于立体图形有一些理解,它的证明是容易懂的。在第二章里,通过定理 1 的证明的分析讨论,以及橡皮薄膜作成的多面形的变形,引进拓扑变换的直观描写,从而得到更广的定理 2, 闭多面形的欧拉定理。在最后一章里, 定理 3 (包含定理 1 和定理 2 为特例)和定理 4 圆满地解决由定理 2 所提出的、闭多面形的欧拉示性数是哪些整数等问题,同时给出闭多面形和闭曲面的拓扑分类。

多面形的欧拉定理

和

闭曲面的拓扑分类

江 泽 涵

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

国营五二三厂印装

统一书号: 13012·0245 字数: 30 千

开本: 787×1092 毫米 1/32 印张: $1\frac{1}{2}$

1964 年 6 月第一版

1979 年 1 月第 3 次印刷

北京: 96,501—396,500 册

定价 0.14 元

引 言

在这个小册子里我们从凸多面形的欧拉定理(定理 1)讲起,通过闭多面形的欧拉定理(定理 2),讲到闭多面形和闭曲面的拓扑分类(定理 3 和定理 4). 书中所讲到的概念主要的是下面的四个: 引进闭多面形的定义是为了确定所讨论的对象;引进拓扑变换的概念是为了说明拓扑分类的观点;而欧拉示性数和单侧双侧性是拓扑分类的标志.

书中的证明主要集中在第一章 §2 和 §3.1, 第二章 §3 和 §4, 第三章 §1.2. 其它部分基本上都是思路和结果(定理)的说明. 更具体地说, 书中的三章所说明的思路和结果分别是 1)怎样从平面多边形的按照边数分类想到凸多面形的分类问题, 从而发现定理 1; 2)怎样从定理 1 和它的证明(第一章 §2)想到闭多面形以及橡皮薄膜所作成的闭多面形的变形, 从而想到更广的定理 2 或定理 2'; 3)怎样从双侧的球面 S_1 和单侧的具有一个交叉帽的球面 Q_1 想到 S_k 和 Q_k 以及它们的欧拉示性数(第三章的定理 2'' 和 §2.4), 从而想到定理 3 (包含定理 1 和定理 2 为特例)和定理 4.

一般地说, 证明是演绎推理, 读起来比较费力. 而思路和结果是主要的, 读起来比较省力, 而且应该在读证明之前读懂. 建议读者在读完定理 1 的证明后, 即在读完第一章前两节后, 先读全书中的思路和结果部分, 然后再回头来补读若干其余的证明.

双侧的闭多面形是常见的图形，橡皮变形是常见的物理现象。所以闭多面形的拓扑分类反映现实世界的一种客观规律，在一些科学技术问题中有其实际应用。本书只限于说明闭多面形的拓扑分类，希望对于读者在遇到拓扑分类的实际应用时有所帮助。

重 印 说 明

趁这次重印的机会，加两个注记。

1. 定理 1 的更直观的证明，可参看《三S 几何》立体部分第 817—818 页和《直观几何》第 287—290 页（王联芳译，高等教育出版社出版）。

2. 本书中只有五色定理，关于四色定理的证明，请参看美国出版的期刊《科学》卷 193(1976)，第 564—565 页，或《美国数学会通报》卷 82(1976)，第 711—712 页。

作者 1978 年 7 月

目 次

第一章 凸多面形的欧拉定理

1. 定理的叙述和来源.....1
 - 1.1 什么是凸多面形(1) 1.2 欧拉示性数的定义和記号(2) 1.3 定理1(凸多面形的欧拉定理)(4) 1.4 定理1的来源(4)
2. 定理1的证明.....6
 - 2.1 球面多边形内角和公式(6) 2.2 公式(1)的证明(8) 2.3 定理1的证明(10)
3. 一个推論和一个問題.....12
 - 3.1 推論(12) 3.2 命題1(13) 3.3 定理1所引起的問題(14)

第二章 閉多面形的欧拉定理

1. 閉多面形15
2. 从球心投影到拓扑变换.....18
 - 2.1 定理1的証明的討論(18) 2.2 从球心投影到图形的橡皮变形 命題2(19) 2.3 从橡皮变形成到拓扑变换 定理2(閉多面形的欧拉定理)(20)
3. 定理2的拓扑証明 网络.....22
 - 3.1 定理2'(22) 3.2 网络 命題3 命題4(23) 3.3 定理2的拓扑証明(25)
4. 一个应用: 地图五色定理.....26
 - 4.1 关于定理2的一个注記(26) 4.2 五色定理

的叙述(27) 4.3 正规的地图(27) 4.4 命题5
(28) 4.5 五色定理的证明(29)

第三章 闭多面形的一般定理和拓扑分类

1. 具有环柄的球面	33
1.1 从环面谈起(33)	1.2 欧拉示性数(34)
2. 具有交叉帽的球面	35
2.1 乌比斯带(35)	2.2 具有交叉帽的球面(36)
2.3 具有交叉帽的球面的单侧性(38)	2.4 欧拉示性数(40)
3. 闭多面形的一般定理和拓扑分类	40
3.1 闭多面形的一般定理(40)	3.2 闭多面形以及闭曲面的拓扑分类(41)
习题	43

第一章 凸多面形的欧拉定理

1 定理的叙述和来源

1.1 什么是凸多面形 我们用中学立体几何教科书中的下面的这些定义。由若干个平面多边形所围成的封闭的立体叫作**多面体**。这些多边形就叫作多面体的**面**，这些多边形的边和顶点分别叫作多面体的**棱**和**顶点**。多面体的表面叫作**多面形**(在第二章以后，叫作**初等多面形**)；多面体的面、棱和顶点也叫作这多面形的**面**、**棱**和**顶点**。当多面形在它的每一个面所决定的平面的同一侧，它就叫作**凸多面形**。例如图 1 中

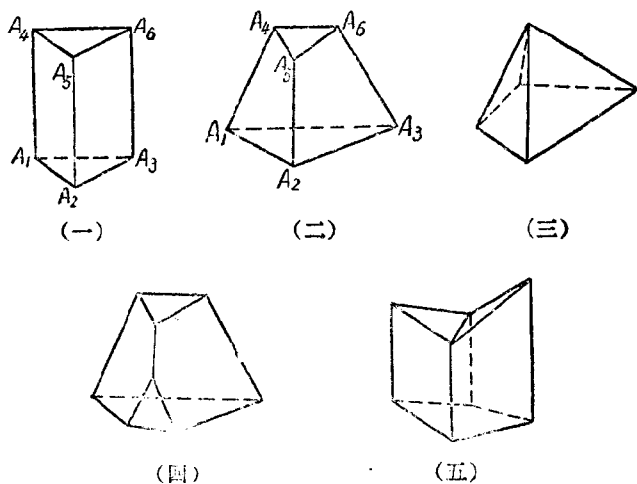


图 1

的(一)到(四)都是凸多面形,图 1 中的(五)不是凸多面形。

如果一个凸多面形的所有的面都是全等的正多边形(等边和等角的平面多边形叫作正多边形),并且所有的多面角都相等,这样的凸多面形就叫作正多面形。中学立体几何教科书中所说的正多面体的表面,就是正多面形。教科书中通常都有五种正多面体的图(如图 2),而且还说明了怎样用硬纸板制作这五种正多面形的模型。我们现在只看正多面体的表面,所以把图 2 中的五个图形都看作是正多面形。

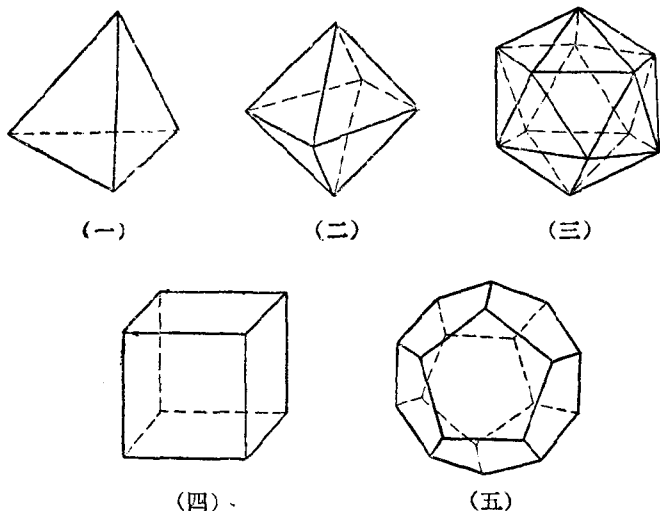


图 2

1.2 欧拉示性数的定义和记号 设用字母 P 表示一个多面形,并用 V 、 E 和 F 分别表示 P 的顶点的、棱的和面的个数,然后

$$V-E+F$$

这个数是一个确定的整数，叫作多面形 P 的欧拉 (L. Euler, 1707—1783) 示性数，记作 $X(P)$ ，即

$$X(P) = V - E + F.$$

我们先来看图 1 中五个多面形的欧拉示性数 $X(P)$ ，并列于下：

表 I

多面形 P	V	E	F	$X(P)$
图 1 (一)	6	9	5	$6-9+5=2$
图 1 (二)	6	9	5	$6-9+5=2$
图 1 (三)	5	8	5	$5-8+5=2$
图 1 (四)	8	12	6	$8-12+6=2$
图 1 (五)	8	13	7	$8-13+7=2$

再看图 2 中五个正多面形的欧拉示性数，并列于下：

表 II

正多面形 P	V	E	F	$X(P)$
图 2 (一): 正四面形	4	6	4	$4-6+4=2$
图 2 (四): 正六面形	8	12	6	$8-12+6=2$
图 2 (二): 正八面形	6	12	8	$6-12+8=2$
图 2 (五): 正十二面形	20	30	12	$20-30+12=2$
图 2 (三): 正二十面形	12	30	20	$12-30+20=2$

从上面两个表中的最右一栏可以看出这些多面形的欧拉

示性数都是 2. 这些多面形中除掉图 1(五)是非凸的以外, 其它的都是凸多面形. 我們很容易产生这样的问题: 是不是所有的凸多面形的欧拉示性数都是 2 呢? 下面是这个问题的解答.

1.3 定理 1 (凸多面形的欧拉定理) 任意一个凸多面形 P 的欧拉示性数都是 2:

$$X(P) = V - E + F = 2.$$

在证明这个定理以前, 我們先来分析一下它的結論. 这結論只是关于凸多面形的頂点个数 V 、棱的条数 E 和面的个数 F 这样的三个整数的一种組合, 即 $X(P) = V - E + F$, 而不是其它的組合, 例如不是 $V + E + F$ 等. 这結論的内容并不涉及凸多面形 P 的棱的长度、面的面积的大小以及面上的内角的大小; 也就是說这結論的内容并不涉及凸多面形 P 的度量性质. 这是定理 1 的特点, 与中学里所見到的一般的几何定理不一样.

在证明这定理以前, 我們还要先談一談欧拉是怎样发现这个定理的.

1.4 定理 1 的来源 我們可以設想欧拉发现这定理的过程大約是下面这样的. 我們知道平面多边形的初步分类是用边的条数来分的, 例如三条边的是三角形, 四条边的是四边形, $\cdots$, n 条边的是 n 边形. 它們的記号是用頂点的排列表示出来的, 例如三角形用它的三个頂点排列 $A_1A_2A_3$ 来表示, 它是以 A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_1 为它的三个边. n 边形的記法为 $A_1A_2\cdots A_n$, 以 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_1$ 为边. 很自然地会想到凸

多面形或者可以用它的面数 F 来分类, 而且把图 1 (一) 这个多面形記作

$$A_1A_2A_3, A_4A_5A_6, A_1A_2A_3A_4, A_2A_3A_6A_5, A_3A_1A_4A_6.$$

图 1 (一) 与图 1 (二) 这两个多面形的面数 F 同为 5, 它們的記法也相同, 因而会想到把它們归成一类而把它們叫作同构 (即結構相同) 的多面形. 图 1 (三) 的面数 F 虽然也是 5, 它的記法却与前两个凸五面形不同, 因为它的五个面中有四个三边形而只有一个四边形, 前两个凸五面形的五个面却同是两个三边形和三个四边形. 所以图 1 (三) 不能和前两个凸五面形归为一类. 这說明了仅用面数 F 来作为凸多面形分类的依据是不够的.

既然要把凸多面形分类时, 只看它們的面数 F 是不够的, 那末就会想到在看它們的面数 F 的同时再看頂点数 V ; 行不行呢? 这样倒是把图 1 (三) 与图 1 (一) 区别出来了; 图 1 (三) 有 5 个面和 5 个頂点, 而图 1 (一) 或图 1 (二) 有 5 个面和 6 个頂点. 它們的面数 F 虽然同是 5, 而它們的頂点数 V 却不一样. 这好像說明了同时看凸多面形的面数 F 和頂点数 V , 就可以区别出它們的結構, 可以作为分类的依据似的. 但只要再看下去, 就知道这还是不够的. 图 1 (四) 和图 2 (四) 这两个凸六面形有相同的面数 F , 有相同的頂点数 $V=8$. 但是图 1 (四) 的六个面中有两个三边形, 两个四边形和两个五边形; 可是图 2 (四) 的六个面都是四边形. 它們的結構显然大不相同; 它們不同类, 虽然它們的面数 F 和頂点数 V 都相同.

凸多面形的面数 F 和頂点数 V 既然不够作为分类的依

据,那末同时再加看棱的条数,是不是就行呢?还是不行,因为结构不同的图 1(四)和图 2(四)不但有相同的面数 $F=6$, 相同的顶点数 $V=8$, 还有相同的棱的条数 $E=12$. 再试作各种面数 F 相等和顶点数 V 相等, 但结构不同的凸多面形, 结果必然是它们的棱数 E 也相等; 而且更进一步, 发现下面的事实. 不论结构怎么样的两个凸多面形, 尽管它们的面数 F 与顶点数 V 都不一样, 只要当它们的面数 F 与顶点数 V 相加的和数 $V+F$ 相等时, 它们的棱的条数 E 也必然相等, 并且总满足关系式: $E=V+F-2$, 也就是 $V-E+F=2$. 凸多面形分类的这样的讨论, 就引导我们发现定理 1.

2 定理 1 的证明

凸多面形的欧拉定理有种种不同的证法. 我们现在要给出的证明是勒让德(A. M. Legendre, 1752—1833)的证明. 这需要球面几何学中的一个简单事实. 先来证明这个事实, 作为证明定理的准备工作.

2.1 球面多边形内角和公式 设平面 n 边形的 n 个内角是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($n \geq 3$). 这 n 个内角的和 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ 可以简写成 $\sum_{i=1}^n \alpha_i$, 即

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i + \dots + \alpha_n,$$

其中 α_i 表示第 i 个角的弧度, $i=1, 2, \dots, n$. 记号“ Σ ”表示和

的意思，讀作“西格碼”。 $\sum_{i=1}^n$ 表示下标是 1 的項加到下标是 n

的項的总和。中学平面几何教科书中都已經证明过：平面 n 边形的 n 个內角和是 $(n-2)\pi$ ，即

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi, \text{ 平面 } n(\geq 3) \text{ 边形.}$$

球面几何里也討論球面上的 $n(\geq 2)$ 边形的內角和。如果球的半徑长度是 1，并且球面 n 边形的 n 个內角的弧度值也分別用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 表示，則球面 n 边形的諸內角和是：

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi + W, \text{ 球面 } n(\geq 2) \text{ 边形,}$$

式中的 α_i 表示第 i 个內角的弧度值， W 表示这球面 n 边形的面积。关于这个公式(1)，还必须加以說明如下。首先，球面多边形的边，必須是大圓(即以球心为圓心的圓)的圓弧。其次，任意两个不同的大圓有两个交点，是球面上的一对对徑点，即球的同一条直徑的两个端点，如图 3(一)中的点 A 和 A' 。最后，任意两个不同的大圓弧把球面分成四部分；其中的任一部分叫作一个月形，它是一个球面 2 边形(平面上沒有 2 边形)。图 3(一)中有阴影的部分是一个月形，也就是一个球面 2 边形， α 和 α' 是它的两个內角。图 3(三)中有阴影的部分是一个球面三角形， α, β 和 γ 是它的三个內角。此外，还要說明一下球面多边形內角的量法。設要測量球面多边形的一个頂点 A 处的內角 α ，如图 3(二)。夹这个角 α 的两个边必是大圓弧。

在顶点 A 处分别作这两个大圆的切线(射线即半直线) AB_1 和 AC_1 . 平面角 $\angle B_1AC_1$ 的弧度就是角 α 的弧度.

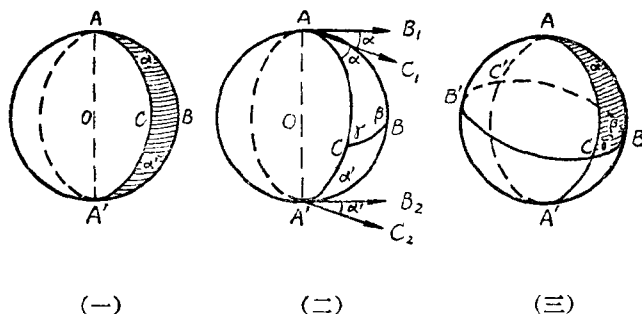


图 3

2.2 公式(1)的证明 在 $n=2$ 时, 如图 3(一) 中由两个大圆弧 ABA' 和 ACA' 所包围的球面上的部分, 就是一个球面二边形, 简记为 $ABA'CA$. 在 A 与 A' 处分别作同一个大圆 ABA' 的切线 AB_1 与 $A'B_2$, 参看图 3(二), 因为都是与直径 AA' 垂直的线段, 故这两切线平行, 即 $AB_1 \parallel A'B_2$. 同理, 在 A 与 A' 处分别作同一个大圆 ACA' 的两切线 AC_1 与 $A'C_2$ 也平行, 即 $AC_1 \parallel A'C_2$. 从而两个平面角 $\angle B_1AC_1$ 与 $\angle B_2A'C_2$ 相等,

也就是 $\alpha = \alpha'$, 即 $\sum_{i=1}^2 \alpha_i = 2\alpha$. 这是公式(1)的左端, 在 $n=2$ 时

的值. 公式(1)右端的第一项, 在 $n=2$ 时为零. 再计算公式(1)右端第二项 W 的值. 在这里, W 是月形的面积. 已知单位半径的球面积是 4π . 由于把半圆弧 ABA' 绕直径旋转一个周角 2π 时得球面, 而旋转一个 α 角时得内角为 α 的月形, 所以

球面积与月形面积的比值, 等于 $2\pi:\alpha$. 所以内角为 α 的月形面积 $W=2\alpha$. 公式(1)的左右端相等, 这证明了在 $n=2$ 时公式(1)成立.

在 $n=3$ 时, 如图 3(三)中由三个大圆弧 AB (不是 $AA'B$, 下同)、 BC 和 CA 所包圍的球面上的部分, 就是一个球面三边形, 它的三个内角是 α, β 和 γ . 所以公式(1)的左端:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = \alpha + \beta + \gamma.$$

下面我們来計算公式(1)的右端. 右端的第一項是 $(3-2)\pi = \pi$. 右端的第二項, 球面三角形的面积等于什么呢? 为方便起見, 用記号 $\triangle ABC$ 表示这个球面三角形的面积. 同理, 由三个大圆弧 $A'B, BC$ 和 CA' 为边的球面三角形的面积用記号 $\triangle A'BC$ 表示. 从图 3(三)可以看出

$$\triangle ABC + \triangle A'BC = 2\alpha \quad (\text{因为左端就是月形 } ABA'CA \text{ 的面积}),$$

$$\triangle ABC + \triangle B'AC = 2\beta \quad (\text{因为左端就是月形 } BAB'CB \text{ 的面积}),$$

$$\triangle ABC + \triangle C'AB = 2\gamma \quad (\text{因为左端就是月形 } CBC'AC \text{ 的面积});$$

因为 $\triangle C'AB$ 和 $\triangle CA'B'$ 对于球心对称, 所以

$$\triangle C'AB = \triangle CA'B',$$

因而第三式可以改写为

$$\triangle ABC + \triangle CA'B' = 2\gamma.$$

把上面的第一式, 第二式和改写后的第三式相加, 得

$$2(\triangle ABC) + (\triangle ABC + \triangle A'BC + \triangle B'AC + \triangle CA'B') \\ = 2(\alpha + \beta + \gamma).$$

但是这和式左端的第二个括号中的四个面积, 应等于 2π . 所以上式化简为

$$2(\triangle ABC) + 2\pi = 2(\alpha + \beta + \gamma),$$

即
$$\triangle ABC + \pi = \alpha + \beta + \gamma.$$

这证明了在 $n=3$ 时公式(1)也成立.

跟证明平面 n 边形内角和公式一样, 可以用数学归纳法证明在 $n>3$ 时公式(1)也都成立.

2.3 定理 1 的证明 设有一个凸多面形 P . 已知它有 V 个顶点、 E 条棱和 F 个面.

在凸多面形 P 所包围的空间内部, 任取一点 O . 作一个以 O 为球心, 半径是单位长的球面 S . 然后, P 上的任一点 x

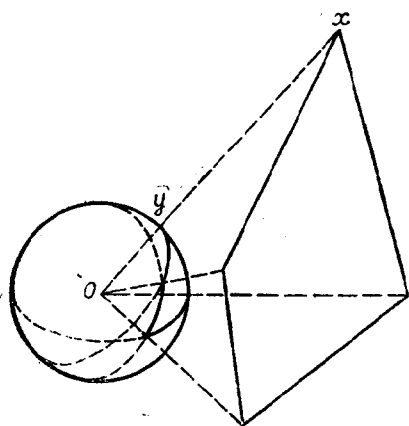


图 4