TIMOSHENKO

材料力學

分析與習題詳解

(全冊)

J. M. Gere. 原著

章 致 一 編著

五洲出版社 印行

TIMOSHENKO
材料力學分析與習題詳解

（全 冊）

J. M. Gere 原著

章 致 一 編著

五洲出版社印行

引　　言

要想透徹瞭解一本書的內容，最佳的途徑便是由問題中去發現問題。本書便是本著這個原則，以解 S.P.Timoshenko 和 J.M. Gere 編著的"材料力學"教本中超過600 個的習題，幫助讀者瞭解課本的涵意。此書可幫助首次學習此科目的在校學生，亦可供已任職的工程師複習及準備考試。

為節省讀者的時間與精力，本書以最適當的方法解題。很多題目不祇一種解，讀者或許可尋求其他的方法。並且節錄出每章的摘要精華，以使本書對讀者在最短時間內取得最大的收穫。

編者識

目　錄

第一章　張力、壓力及剪力……1

問題詳解……11

第二章　應力與應變之分析……51

問題詳解……65

第三章　扭　轉……92

問題詳解……99

第四章　剪力與撓矩……117

問題詳解……121

第五章　樑中之應力……141

問題詳解……162

第六章　樑之撓度……207

問題詳解……216

第七章　靜不定樑……243

問題詳解……251

第八章　不對稱的撓曲……278

問題詳解……283

第九章　非彈性撓曲……300

問題詳解……307

第十章　長　柱……326

問題詳解……331

第十一章　結構分析和能量法……350

問題詳解……359

1
張力、壓力及剪力

1·2 應力與應變（Stress and Strain）

應力（Stress）：卽單位面積所受之力，包括拉應力，壓應力，剪應力。

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (\frac{\text{lb}}{\text{in}^2}) \tag{1-1}$$

應變（Strain）：材料受力而產生變形，其單位長度所產生之變形。

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{1-2}$$

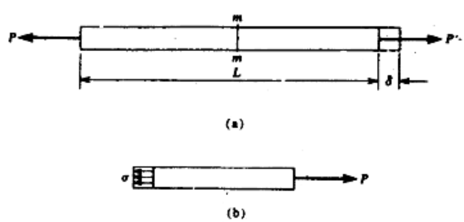


圖 1-1　受張力的稜形棒

1·3 張力試驗（The Tensile Test）

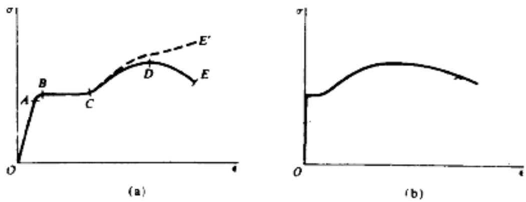


圖 1-2　結構鋼的典型應力—應變曲線
(a)不成比例的圖解　(b)成比例的圖解

如圖 1-2 中爲結構鋼典型應力應變圖。A點爲比例極限點（Proportion limit），B點爲屈服點（Yielding point），D點爲極限強度（Ultimate strength）。在OA區內，材料應變與應力成正比例增加，符合虎克定律，至B點時，應力不增加而應變顯著增加，此段拉長量約爲比例限段內之 10～15 倍。C點時材料開始硬化，而可抗拒再增加的荷重，而於D點達最大值，E點時材料破壞，如果考慮材料破壞前斷面積減少之緊縮作用的實際圖形應如虛線所示。

允許應力（Allowable Stress）

鋼結構有顯著屈服點，其他材料則不甚明顯，通常利用屈服點或極限點來做爲選擇工作應力（Working stress）的標準，將屈服強度或極限強度除以適當之安全係數 n（Safe factor）卽爲工作應力。

$$\sigma_w = \frac{\sigma_{y.p}}{n_1} \qquad \sigma_w = \frac{\sigma_u}{n_2} \tag{1-3}$$

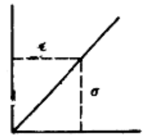
1·4 線性彈性與虎克定律
（Linear Elasticity and Hooke's Law）

在彈性範圍內，應力與應變成正比關係

即　　$\sigma = E\epsilon$　　(1-4)

E：彈性模數（modulus of elasticity）

E為應力與應變間之比例因數。



$$\because \quad \sigma = \frac{P}{A} \qquad \epsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{PL}{EA} \qquad (1\text{-}5)$$

註：本圖僅表示彈性限度範圍內，當應力增大至某一程度時應力與應變不再呈線性之正比關係，則此時所討論者將不再是彈性力學。

普松比（Poisson's Ratio）

當一棒受張力荷重時，軸向的拉長將伴以側向收縮。在彈性範圍內，橫向應變與縱向應變之比爲一常數稱普松比 ν。

$$\nu = \frac{\text{橫向應變}}{\text{縱向應變}} \quad \text{or} \quad \nu = \frac{\text{單位橫向收縮}}{\text{單位縱向拉長}} \qquad (1\text{-}6)$$

若材料之普松比與彈性模數爲已知，則可求出一受力材料之體積變化。圖 1-6 顯示受張力材料上切下之單位元素體積改變情況。

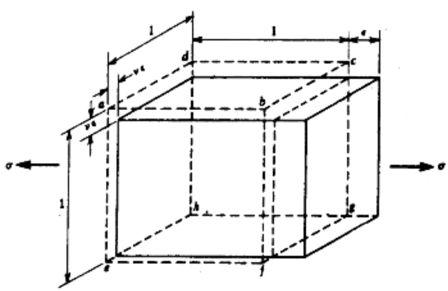


圖 1-6　張力中單位立體的體積變化

$$\Delta V = V' - V$$

$$V' = (1+\epsilon)(1-\nu\epsilon)^2 = 1+\epsilon-2\nu\epsilon$$

$$\Delta V = \epsilon(1-2\nu)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon(1-2\nu) \qquad (1\text{-}7)$$

1·5 軸向荷重棒之撓度

(Deflections of Axially Loaded Bars)

大部份軸向荷重可由式（1-5）求出撓度，但如圖1-7，1-8則必須分段求出其各別之撓度而後相加之，總撓度可由下式表示。

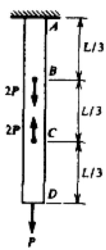


圖1-7　具中間軸向荷重棒

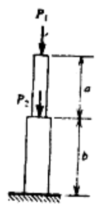


圖1-8　斷面變化之棒

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i} \qquad (1\text{-}8)$$

當軸向力或橫斷面連續沿棒之軸變化時，其撓度可考慮以一棒之微分來表示而得，如圖1-9。

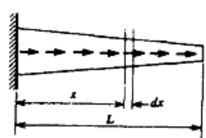


圖1-9　斷面及軸向力皆變化之棒

$$d\delta = \frac{P_x\,dx}{EA_x}$$

$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{P_x\,dx}{EA_x} \qquad (1\text{-}9)$$

1·6 靜不定結構物（Statically Indeterminate Structure）

在解同平面結構之力時僅有三個條件方程式可解三個未知力，當未知力超過三個以上時（即靜不定結構），其靜力方程式（$\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$，$\sum M=0$）不足以解所有未知數，須依靠其變形關係及位移來分析。

(a) 力分析法（Force method）

選一未知量爲贅力而除去，剩下的結構物使成爲靜定與穩定（此靜定部份稱爲主要結構），分別受實荷重及贅力荷重。求出由此二荷重各別之位移，結合成爲位移適合方程式，此位移方程式符合撓度條件，即總撓度（位移）爲某一值或 0 。將此位移表示法以力爲項目代入適合方程式後便可解未知力，另一未知力由靜力求出。茲舉例如下:

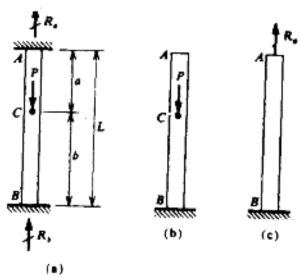


圖 1-11

$$R_a+R_b=P \qquad \text{（圖 a）}$$

$$\delta_P=\frac{Pb}{EA} \qquad \text{（圖 b）}$$

$$\delta_R=\frac{R_aL}{EA} \qquad \text{（圖 c）}$$

$$\delta=\delta_P-\delta_R=0 \qquad \text{（圖 a）}$$

$$\therefore\quad \frac{R_aL}{EA}=\frac{Pb}{EA}$$

$$R_a = \frac{Pb}{L} \qquad \therefore \quad R_b = \frac{Pa}{L}$$

(b) 位移法（Displacement method）

此法乃先選一適當位移爲未知量而來，此位移必須能用來表示結構物之每一部份上的力。然後這些力可結合於一平衡方程式中，將力之大小以位移來表示，可解得此未知位移，最後由位移而求得力之值。

$$R_a = \frac{EA}{a}\,\delta_c$$

$$R_b = \frac{EA}{b}\,\delta_c$$

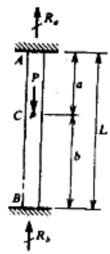
$$R_a + R_b = P$$

$$\frac{EA}{a}\,\delta_c + \frac{EA}{b}\,\delta_c = P$$

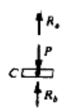
$$\delta_c = \frac{Pab}{EAL}$$

$$\therefore \quad R_a = \frac{Pb}{L}$$

$$R_b = \frac{Pa}{L}$$



(a)



(b)

圖 1-12

1·7 熱與預應變效應

（Thermal and Prestrain Effects）

靜定結構物中，整個結構物的溫度均勻改變將不產生任何應力，其改變量爲

$$\delta = \alpha L \Delta T \qquad (1\text{-}10)$$

靜不定情況或結構物中某構件溫度改變時則將由熱產生應力。

$$\delta = \frac{RL}{EA} = \alpha L \Delta T$$

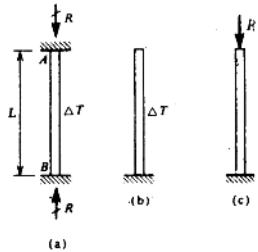


圖 1-17　溫度增加之棒

$$R = EA\alpha\,\Delta T \tag{1-11}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = E\alpha\Delta T \qquad \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha\Delta T \tag{1-12}$$

1·8 非彈性行爲（Nonlinear Behavior）

塑性分析法（Plastic Analysis）

近年來極限設計（U.S.D.）已逐漸爲工程界採用，因其較彈性應力設計經濟且實用，極限設計通常簡化應力—應變圖如圖 1-19(c)

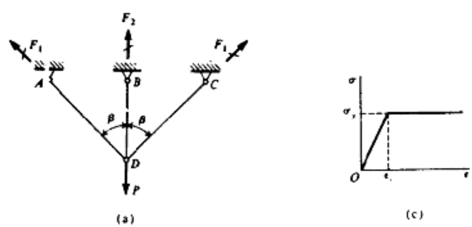


圖 1-19

此圖假設應力沿一定比例關係變化達到屈服點 σ_y 後繼續無限制的屈服，此時材料將無法再承受外力而繼續增長。圖 1-19(a)中當 P 增至某值時 DB 桿開始屈服則 $F_2 = \sigma_y A$，但此時 DB 桿雖不能再承受增加

之力，而AD，DC仍在彈性範圍內，當外力P再增加直到AD，DC桿均達屈服，此時三桿均無法承受繼續增加的外力，此即極限荷重P_u。

$$P_u = \sigma_y A(1+2\cos^3\beta)$$

1·9 剪應力與剪應變

（Shear Stress and Shear Strain）

由一物體上截一平面，沿此平面之作用力謂之剪力以V表之。現考慮一出現剪力情況，圖1-22(a)在荷重P之作用下，棒與鉤將對螺釘壓縮而產生應力，有一趨勢沿mn及pq橫切面剪此螺釘如圖1-22(b)，而此剪力必沿此斷表面作用如圖1-22(c)，其平均剪應力可由剪力求得

$$\tau_{aver} = \frac{V}{A} \tag{1-13}$$

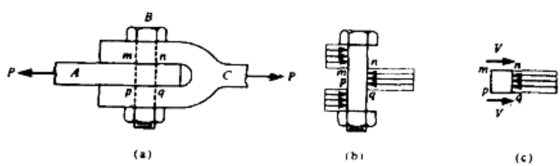


圖1-22　直接剪應力的圖解

在受荷重之材料，任取一立方體則發現有剪應力存在且有如下性質：

(a) 作用於材料元素的剪應力經常以大小相等方向相反成對出現。

(b) 剪應力常存在兩互相垂直的平面，成對剪應力同時指向或離開平面交線。圖1-23(b)無軸向力為純剪的情況，剪應變（Shearing strain）

$$\gamma = \frac{aa'}{L}$$

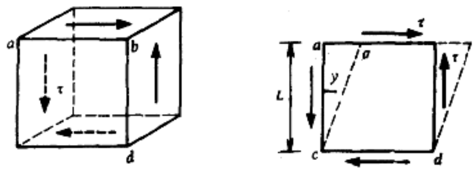


圖 1-23　剪應力與剪應變

若材料有線性彈性區，則應力應變圖將為一直線而剪應力與剪應變成正比例可得公式

$$\tau = G\gamma \tag{1-14}$$

G ＝材料之彈性剪模數。

1·10　應變能（Strain　Energy）

一簡單張力中之棒受一 P 之靜力荷重，若此棒符合虎克定律，其荷重撓度圖將為一直線如圖 1-24 。當 P 漸加於棒上則此功轉變為位能或應變能而貯存於棒中，若將力 P 緩慢移去棒將恢復原來長度，應變能又轉變為功，視棒之作用有如彈簧 。P 於棒上所做之功為：

$$U = \frac{1}{2} P\delta \tag{1-15}$$

此式僅用於彈性限度內。

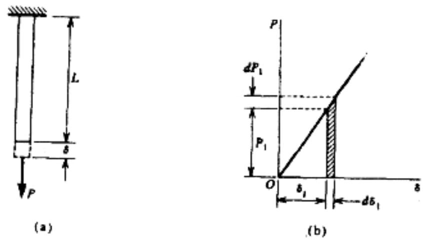


圖 1-24　張力棒的荷重一撓度圖

因 $\delta = PL/EA$ 故（1-15）式可改寫為

$$U=\frac{P^2L}{2EA} \quad \text{or} \quad U=\frac{EA\delta^2}{2L} \qquad (1\text{-}16a, b)$$

此式於動力及能量轉換上極為方便。

單位體積之應變能 u，可由總應變能 U 除以總體積 AL 而求得。

$$u=\frac{\sigma^2}{2E} \quad \text{or} \quad u=\frac{E\epsilon^2}{2} \qquad (1\text{-}17a, b)$$

棒上之衝擊荷重（Impact Loads on Bars）

當處理有動力之荷重時，此種荷重所具有之部份能量將轉變成棒之應變能或消耗於引起棒之塑性變形。

$$W(h+\delta)=\frac{EA\delta^2}{2L} \qquad \text{(a)}$$

若 $\delta_{st}=\dfrac{WL}{EA}$ ， $v=\sqrt{2gh}$

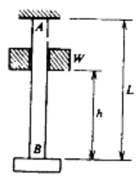


圖1-26 棒上衝擊荷重

由(a)
$$\delta=\delta_{st}+(\delta_{st}^2+2h\delta_{st})^{1/2} \qquad (1\text{-}18a)$$
$$=\delta_{st}+(\delta_{st}^2+v^2\delta_{st}/g)^{1/2} \qquad (1\text{-}18b)$$

若 $h \gg \delta_{st}$

$$\delta \approx (2h\delta_{st})^{1/2}=(v^2\delta_{st}/g)^{1/2} \qquad (1\text{-}19)$$

$$\sigma=\frac{E\delta}{L}=\frac{E}{L}\left(\frac{v^2\delta_{st}}{g}\right)^{1/2}=\left(\frac{Wv^2}{2g}\right)^{1/2}\left(\frac{2E}{AL}\right)^{1/2}$$

突加荷重（Suddenly Applied Load）

即重物 W 突然置於樑端 B 處凸緣上而無任何最初速度（圖1-26）。此種情況於棒開始延伸時沒有動能，與靜荷重亦不同，不是將荷重逐漸加上去。當荷重突加上去，棒開始延伸，亦漸漸增加抗力直至為

W時，此時荷重之位移爲 δ_{st} ，而荷重因獲得動能乃將繼續運動，直到速度等於零最大延伸量（位移）可由（1-8）中，令 $h=0$ 而得：

$$\delta = 2\delta_{st} \qquad (1\text{-}20)$$

純剪中之應變能（Strain Energy in Pure Shear）

一彈性材料在純剪力作用下，剪力由零逐漸增至V，則V作用於此材料上之功等於材料之應變能

$$U=\frac{V\delta}{2} \qquad (1\text{-}21)$$

$$\because \quad \gamma=\frac{\delta}{L} \;,\quad \tau=\frac{V}{A} \;,\quad \delta=\frac{VL}{GA}$$

$$\therefore \quad U=\frac{V^2L}{2GA} \text{ 或 } U=\frac{GA\delta^2}{2L} \qquad (1\text{-}22a,b)$$

材料之體積 $=AL$

$$\therefore \quad u=\frac{\tau^2}{2G} \text{ 或 } u=\frac{G\gamma^2}{2} \qquad (1\text{-}23a,b)$$

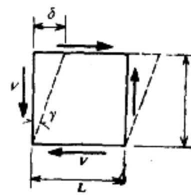


圖1-28 純剪中之應變能。

問 題 詳 解

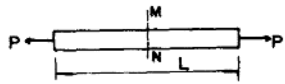
1.2-1 試以靜力解說一受拉力的稜柱，且其應力爲均匀分佈在橫斷面，則在橫斷面上的合力，將通過此斷面的形心。（提示：假設此稜柱爲任意形狀。在此斷面的平面上決定一組座標，則可以得到合力作用經過點的座標）。

解： 設 $dA=$ 斷面mn 上之一單位面積

$A=$ 此斷面之總面積

$\sigma=$ 此角柱所受之均匀應力

$=$ const



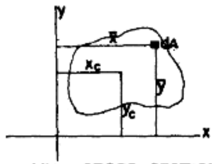


圖 1．2-1

作用在此一單位面積上的力為 σdA ，則作用在此斷面上的合力為：

$$P=\int \sigma\, dA=\sigma\int dA=\sigma A$$

由力矩公式：

$$I_x=\int y\sigma\, dA=\sigma\int y\, dA=\sigma A\bar{y}$$

$$I_y=\int x\,\sigma\, dA=\sigma\int x\, dA=\sigma A\bar{x}$$

$$x_c=\frac{I_y}{P}=\bar{x} \qquad y_c=\frac{I_x}{P}=\bar{y}$$

故斷面上的合力通過其形心。

1．2-2 有一矩形稜柱斷面為 1in × 2in，長度 $L=12$ ft ，承受 20 kips 之軸向拉力時，柱伸長 0.048in，求此柱之拉應力及拉應變。

解：應力 $\sigma=\dfrac{P}{A}=\dfrac{20}{1\times 2}=10$ kpsi

應變 $\epsilon = \dfrac{\delta}{L} = \dfrac{0.048}{12 \times 12} = 0.00033$

1.3-1 一長金屬線，以其本身重量懸掛，求其可能的最大伸長量而不斷裂，此線若爲：(a)鋼線，極限應力 300,000psi，(b)鋁線，其極限應力 50,000psi。（註：鋼之單位重量：490pcf，鋁之單位重量：170pcf。）

解：(a) $\sigma_{steel} = \dfrac{P}{A} = 300000 \times 144 \text{psf} \qquad P = 490LA$

$$P = 300000 \times 144A = 490LA$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{300000 \times 144}{490} = 88,200 \text{ft}$$

(b) $\sigma_{alum.} = 50,000 \text{ psi} \qquad w_{alum.} = 170 \text{pcf}$

$$l = \frac{50000 \times 144}{170} = 42,000 \text{ft}$$

1.3-2 一節短鋼管（$\sigma_y = 40,000$psi）承受 250kips 之壓力，其抗降伏之安全係數爲 1.8，若此鋼管厚度爲外直徑的 $\frac{1}{8}$，求其所需之最小外直徑 d。

解：$P = 250 \text{kips} \qquad \sigma_y = 40,000 \text{psi} \qquad n = 1.8$

故所需承受之面積：

$$A = \frac{P}{\sigma_y / n} = \frac{250 \times 10^3 \times 1.8}{40000} = 11.25 \text{in}^2$$

t = 管之厚度　　d_0 = 外徑　　d_i = 內徑

$$t = \frac{1}{8} d_0 \quad \Rightarrow \quad d_i = d_0 - 2 \times \frac{1}{8} d_0 = \frac{3}{4} d_0$$

$$A = \frac{\pi}{4} \left[d_0^2 - \left(\frac{3}{4} d_0 \right)^2 \right] = 11.25 \text{in}^2$$

$$d_0^2 = 32.7415 \text{in}^2 \qquad d_0 = 5.72 \text{in}$$

1.3-3 一圓形實體棒（直徑：$d = 1.5$in）之斷面上鑽一小洞，