高等学校教学用書

画法几何学

A. M. 叶鲁薩里姆斯基著

高等教育出版社

高等学校教学用書

画法几何学

A. M. 叶魯薩里姆斯基著
沈力虎 梁德本 胡 斌譯
褚 士 奎 校

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 1954 年出版的叶魯薩里姆斯基(А. М. Иерусалимский)著"画法几何学"(Начертательная геометрия)譯出。原書經苏联高等教育部审定为机械-工艺高等学校教科書。

本書內容包括正投影及軸測投影。正投影叙述了点、綫、面、投影改造、曲綫、曲面、相交、展开等;在軸測投影中还叙述了陰影的画法。

本書由清华大学画法几何及工程画教研組沈力虎、梁德本、胡斌等譯出,由褚士荃校閱。

画 法 几 何 学

A. M. 叶魯薩里姆斯基著

沈力虎 梁德本 胡 斌譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

(北京市書刊出版業营業許可証出字第054号)

商務印書館上海廠印刷 新华書店总經售

統一書号 15010·493 开本 850×1168 1/32 印張 10 字数 236,000 印数 1—3,000

1957 年 8 月第 1 版 1957 年 8 月上海第 1 次印刷 定价(10) ¥ 1.50

对讀者的几点建議

画法几何常被学生們看作是一門困难的課程。甚至有这样的見解:彷彿要通曉画法几何就需要有特殊的才能,要具有一种特殊的所謂“空間想像力”等等。沒有这种空間想像力的人,似乎就不能理解画法几何,也不能掌握它的方法。

所有这些都是一种偏見。

要成功地学会画法几何这門課程,必須懂得在中学階段所学的初等几何,特别是立体几何。至于論到空間想像力,难道能怀疑学好立体几何的学生不能想像平行或垂直于某一平面的直綫以及立方体、稜錐、圓錐等等嗎?

除了这些,学習画法几何就不需要任何特別的空間概念了,因为它的問題和各种数学問題一样是借助于邏輯的推論而不是借想像來解决的。

但是,画法几何的学習具有某些特点,在开始时就記住这些特点是有益处的。在画法几何学里几乎沒有任何需要記憶的公式,它的理論很簡單。然而要能运用这些理論去实际解决具体的几何問題(这就是在高等工業学校里学習画法几何的目的),就需要有足够的投影作圖的技能。而任何技能,都只有通过系統的和相当長期的練習才能獲得。

要在一两个星期內靠“突击”來精通画法几何学是不能設想的。在这种短时期內只能記住基本的定理,而根本不可能獲得任何技能并掌握圖解作題的技術。

因之,要成功地学会本課程,其首要条件是在課程的整个学習

期間(一或两学期)有系統的、經常的学習。

另外,必須注意下列各点:

1. 对画法几何教科書不应只是單純地“閱讀”。必須用鉛筆、直尺及圓規在閱讀課文的同时在紙上画出書中敘述的全部作圖。用这种方法就易于理解和很好地記住書上的說明。

2. 在初期,有任何模糊不清的时候,应作出一些最簡單的空間模型。用两塊紙片,在中部各剪开一半,互相穿插起來就成了一付可以摺叠的投影面模型(見圖 46);大头針、火柴或一段金屬絲可以作为綫段的模型;厚紙板可以作为平面的模型;紙可以很容易卷成圓柱或圓錐等。借助于这些最簡單的設备,可以在必要时使自己弄清楚各已知几何元素的空間位置。

3. 对学过的每一个章節,必須独立完成一定数量的練習以求巩固。在本書中各相当的地方列有这样的練習,每一章的練習要作完一半以上。

4. 所有的圖形必須用直尺及圓規來画,不許徒手作圖。这样能更迅速地得出結果,因为徒手作圖很不准确,会引出不正确的答案。

5. 要准确而清楚地用字母或数字标明已知的或作圖求得的点的投影。不标出这些符号,学生在作題时会將各点弄錯,而被自己所作的圖弄糊塗。这样,或是僅因圖面的紊乱而完全不能解出問題,或是要浪費很多时間去改正錯誤。

遵守上述的指示可以節省很多精力,并將使讀者相信掌握画法几何学并不比掌握任何其他課程更困難。

目 錄

第一章 緒 論

§1. 画法几何学的任务

1. 画法几何学研究的是：1）具有三个尺度的物体在平面上各种表示方法的几何原理；2）用繪圖仪器在平面上（例如在紙上）進行几何作圖以解决空間問題的方法。

現逐一詳述这两个任务。

2. 在藝術上，工業上以及科学上我們經常使用画在平面上（例如在紙上，板上等）的各种物体的圖样①。

对于这些圖形的要求是各式各样的。有时要求圖形具有立体感，就是看了以后所引起的印象与所画物体本身（原物）所引起的印象相似。例如，对于寫生画就有这样的要求：画任何物体时，我們当然力求獲得与原物偺可能相似的圖形。

在某些情况下，圖形的立体感退居第二位，而要求圖形能够提供据以判断原物准确形狀与尺寸的可能性，就是与原物几何等价，换言之，要求圖形能代替所表示的物体。在工程上，当需要根据圖形來制造該物体时，这类圖样具有特殊的意义。

最后，上述两种要求也可能同时提出，卽同时要求圖的立体感及它与原物的几何等价。

画法几何学研究各种作圖方法，借助于这些方法能够画出滿足上述要求的圖來。

① 为了特殊需要，这些物体的圖形可以不是画在平面上，而是画在球面、圓柱面以及其他曲面上。

3. 但画法几何学不僅教給人們如何画物体的圖形，也教給人們如何用这些平面圖形去解决三度空間里的某些問題。

这一方面的問題并不比画出圖形本身次要，因为在工程上和在科学上画出物体的圖來并不是最終目的。

例如，我們画一張地形圖，当然不是为了欣賞它。工程师利用这張地形圖就可以拟定鉄路或运河的路綫，决定何处要填土或挖土，計算土方工程量以及解决許多其他問題，就好像他不是站在圖桌旁边而是站在現場一样解决得那么好。

有了机器的圖样（就是按照一定規則將机器画在平面上的圖样），工程师就能研究其所有各个机構的相互作用，它們的动作，計算个别零件的强度等等。

把在空間以各种方向作用于某一結構物上的各个力的圖形画在紙上，就可以用圖解法解决力学上的各种各样問題，这常比計算法（解析法）快而簡單。

可以举出很多这种利用平面圖形來解决空間問題的例子。解决的方法归結为用鉛筆、直尺及圓規在紙上進行几何作圖。

事实上，直接在空間作圖是不可能的，因为我們还沒有一种能用來在空間画出平面或球面的仪器。

这就是平面作圖与空間作圖（立体的作圖）本質上的差别：前者可以用圖解法作出，而后者則不可能。要解决空間問題可以用計算的方法（解析法）。而画法几何学提供了利用圖解法在平面上解决这些問題的可能，就是把空間問題化为平面几何問題來解决。

由此可以看出画法几何学对于工程师的重要的实用意义。它教給我們：1）繪制和看懂工程圖样（因此画法几何学常被称为工程制圖的“文法”）；2）从圖样上研究所画物体的几何性質（形狀、尺寸、空間的相互位置）；3）用圖解法解决各种空間問題。

4. 在研究别的課程时，只要遇見需要解决空間問題的地方，例如在力学、机械原理、建筑力学、采礦学、結晶学、光学、測量学、航空攝影、化学圖的繪制等，都可利用画法几何的方法。

同样，也可以用画法几何学的圖解法去解决解析几何里所研究的全部問題。

所以，画法几何学除了服务于工程这一作用外，作为一种認識現实世界的工具來說也有其普遍的教育意义。它提供了根据物体的圖形研究其形狀及用平面作圖解决空間問題的可能性，而这些作圖是很容易用直尺和圓規完成的。

§2. 歷史概述

5. 众所周知，由欧几里德（Евклид），阿几米德（Архимед），阿波隆尼（Аполлоний）以及其他古代数学家所創始的尺度（量度）几何是由于地畝丈量及航海的需要而成長起來的。

人类生產活动的繼續發展提出了一系列新的几何問題，需要在平面上表示出具有体積的物体。

的确，要想制造任何一样东西，必須預先知道它的准确的形狀与大小，也就是知道它的几何性質。

用語言敍述这些性質总是不够完全，不够清楚的。因此就有了用另一种更簡便的方法來描述物体的必要，这就是画圖的方法。

各种各样的画圖方法早在远古时代就已被發現，并在許多工匠、建筑家、画家、学者等的实踐活动中得到了發展。

画法几何学的歷史可以作为一个鮮明的例子來說明科学理論是从人类的生產实踐中產生和發展起來的。科学的唯物主义持着与唯心主义哲学相反的見解，認为无論哪种科学都不是建立在人們的奇思妙想上，不是他們随意思索或幻想的產物。画法几何学也正是这样。远在它具有科学的体系之前，画法几何学里的一些

个別方法及法則就已在技術的各个部門和世界各地被实际应用了。在十八世紀俄國机械师庫里賓（Кулибин）和波尔宗諾夫（Ползунов）等的圖样里，以及某些俄國及外國技师們有关各項建筑工程的更早期的著作里，我們都可找到这些方法及法則，特別是在彼得一世时代的造船圖样里，就初次应用了在三个平面上的投影。

在指導怎样鑿复雜建筑結構（穹窿、拱門、桥、圓屋頂等）用的石塊方面，画法几何学中所研究的方法獲得了特別廣泛的發展。

但是，画法几何学的方法是由法國几何学家蒙若（Г. Монж）首次極为完备而有系統地叙述出來，并于 1795 年發表的。由他所創始的这門科学恰好誕生在法國革命的火焰里。它的問世是由于技術的蓬勃高漲，而技術的發展則是正在成長着的資產階級所需要的。正是从这时候起画法几何学才獲得嚴密的科学論証，而它的結論才在新的技術上得到廣泛的应用，并使得圖样成为工程师們的“國际語言”。

这就証实了蒙若的預見，他在其画法几何学的第一部著作的序言里断言，“誰要想使所加工的物体具有一个确定的形狀，他就需要画法几何学”①。

但是蒙若未能預見到画法几何学除了应用于技術外，也顯著地影响到整个几何学本身的繼續發展。

在十八世紀末，当画法几何学形成时，由笛卡兒（Декарт）創始的解决几何問題的解析法已經确立并獲得了优势的地位。那时，几何学可說是成了代数学的俘虏。

画法几何学刺激了純几何方法的复兴，它为一門更一般的科学——射影几何学以及科学的几何知識的輝煌發展奠定了基礎。

① 蒙若的著作的俄文譯本于 1947 年由苏联科学院首次出版，由卡尔金（Л. И. Каргин）教授主編。

十九世紀就标誌着这些几何学上的成就。

6. 在俄國，远自蒙若时期(1810 年)起就在交通工程学院——現在的列寧格勒鉄道运輸工程学院——开始了画法几何的講授。最早的講授是用法文進行的。

1816 年出版了第一本俄文的画法几何学教科書，它是教員謝伐斯基揚諾夫 (Я. А. Севастьянов，后来是該校的教授) 翻譯的。顯然，这門科学的俄文名称是由他定的。

画法几何学的講授不久就推廣到别的学校中，并一直列为工程教育中的一門課程。

俄國学者編寫了許多有关这門課程的新課本，其中最著名的是馬卡罗夫教授 (Н. И. Макаров)，庫尔玖莫夫 (В. И. Курдюмов) 及雷寧教授 (Н. А. Рынин) 的教科書。

庫尔玖莫夫教授所寫的有高度科学水平的一些著作 (自 1893 年至 1905 年出版) 对画法几何学講授方法与它的專用術語的發展有着特别巨大的影响。

雷寧教授的活动在这方面也是成效特著的。他的著作 (大部分在十月革命后出版) 的特点是力圖指出画法几何学在各个技術領域內应用的可能性。

几何学的一个新部門——“射影几何学”——的成就促進了画法几何教学的繼續進展。射影几何学能使人們更深刻地理解各种圖解方法的几何实質，并找到新的途徑与方法以解决在平面上表示具有三个尺度的物体的各种問題。

射影几何学观念的普及和它們在画法几何学講授及教科書里的运用，我們应当主要归功于弗拉索夫教授 (А. К. Власов)，格拉哥列夫教授 (Н. А. Глаголев)，切特維魯新教授 (Н. Ф. Четверухин) 和伏尔别尔格教授 (О. Л. Вольберг) 的著作。在 1947 年出版的伏尔别尔格教授所著师范学院用的教科書“画法几何学講义”

可以認为是用射影的观点系統而連貫地闡明画法几何学方法的第一本著作。

7. 随着画法几何学的普及和其講授方法的改善的同时，深入与發展其理論基礎的科学研究工作也在進行着。

但是革命前的俄國在这方面做得很少。科学院院士費道罗夫(E. C. Федоров)的“制圖基礎——新几何学”(1907年)及“新画法几何学”(1917年)是在制圖理論領域內唯一具有科学思想的卓越成就。費道罗夫不但享有科学結晶学的奠基者这个世界声譽，他还是一个傑出的几何学者。在上面提及的著作以及別的几篇論文里，他提出了很多关于画圖的科学新概念并創立了矢量画法几何学。他成功地运用了自己所創立的一些新穎的画圖方法來研究結晶的結構以及別的自然科学。

只是在十月革命以后，有关圖形表示法的理論的研究工作才得到了廣闊的开展；这时，各高等工業学校中設立了独立的画法几何教研組，开設了这門学科的研究所，接受了它的学位考試。在这短短的一段时間里，苏联学者們在理論以及实用圖術領域內的成就比整个上一世紀都多。他們的工作深远地向前推动了画法几何学各种問題的研究与論証。

教育科学研究院通訊院士切特維魯新教授以他許多关于高等几何学，特别是画法几何学与射影几何学方面的著作，給圖術理論开闢了新的途徑。他的学位論文“标号圖形的理論”乃是画法几何学中新的一章，在那里面探討了“全圖形与不全圖形”的一般理論，并論証了一种特殊的他称之为“参变的”画标号圖形的方法，这种方法可使圖形具有数值的特性。

功勳科学和技術工作者、列寧格勒鉄道运輸工程学院卡尔金教授的“圖算的精确性”、“鏡面反射的一般理論”、“理論的軸測投影”等論述、有关俄國圖術歷史的研究以及在1936—1949年寫成

的一些短文对画法几何学都是巨大的貢献。

葛罗莫夫教授 (M. H. Громов) 完成了一系列关于繪制曲面問題的独創而廣泛的研究，現代的先進技術对于这方面的研究極为需要。

烏克蘭建筑科学院通訊院士科洛多夫教授(C. M. Колотов)研究出一种称为“輔助投射”的方法，在这种方法的基礎上建立了画陰影的新理論。

蕭尔 (Я. И. Шор) 把費道罗夫的观念加以發展而創造了在一个在平面上画圖的新方法——“帶矢量标記的投影”，大大簡化了画法几何学本身以至空間力学的一些基本問題的解决。

这里只列举了苏联学術革新者們最为傑出的一些著作。就是这个極不完全的書目也就足够駁倒某些資產階級学者的說法：好像画法几何学早已耗尽自己的生机，發展到窮途末路，变成一門“僵死”的科学了。

8. 与画法几何学理論深入發展的同时，苏联学者們还致力于將画法几何学的圖術方法擴大应用于其他知識領域內。例如在1948—1950年發表的这些作品：阿諾索夫教授 (B. Я. Аносов) 的“画法几何在三元系統和四元系統化学圖里的应用”；叶高罗夫 (B. B. Егоров)的“确定机構空間位置的圖解方法”(机械原理科学討論会記錄，科学院，第25期，第7册)；阿納諾夫(Г. Д. Ананов)的“力学問題中的正投影法”。苏联的青年学者們最近的著作与知名的西欧圖解統計学專家們馬約尔 (Майор)，米賽斯 (Мизес)，貝耶尔 (Бейер) 等的著作比較起來佔顯著的优勢。

在圖術理論上以及其他的科学領域里，都是力求把学術上的成就引向生活，把它与人們的实踐活动联系起來，促進这个活动从而增進人民生活的繁荣，这是这些方面的全部苏联学術思想突出的方向。

由列寧格勒人倡議的，学術工作者与先進生產工作者進行創造性的合作这一卓越活动，更使上述的方向深入而擴大。毫无疑問，实踐会給画法几何学提出新的問題，也会給新的理論及新的概括提供新的材料。

§3. 投射及投影

在平面上（例如在一張紙上）的任何正确的物体圖形都是該物体在此平面上的投影①。圖画，照片，电影，工程圖样以及由日光或灯光照射物体所得的落影，或是在眼睛的網膜上所得的物体圖形，所有这些都是物体在各种表面上的投影。現在我們來研究一下，实际的投射是如何發生的，以及如何借投射而在平面上得到圖形。

A. 中心投射

9. 我們試做一个如下的实驗：用鉄絲或木条作出一个如圖1

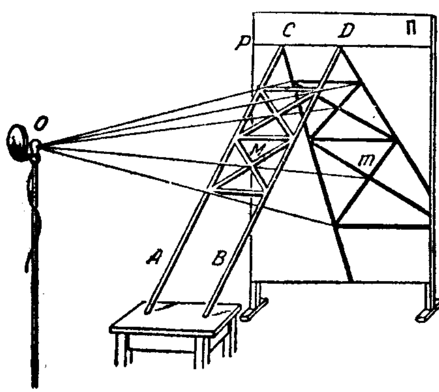

圖 1.

① 我們把这样的一种圖形称为"正确的"，它是按照現实世界里实际存在的几何光学的法則作出的。当然，也可以有違背这些法則而作出的圖形。例如，原始人的圖画、孩子們的圖画、各种象形的符号等。这种圖形不是其原物的投影，因而对它們就不能采用几何研究的方法。

所示的任意几何形。把它靠在牆上或另一垂直平面 Π 上，然后取一盏灯或一支燭。O（發光"点"）放在与几何形相距不远的地方來照耀它。

这时在 Π 平面（我們以后將称之为画面或投影面）上就得到該几何形的影子的圖形。

在几何观念上，圖形是这样產生的：因为光在同一介質中直綫地散播，所以可把光綫看作是直綫，这些直綫称为投射綫。每一条投射綫，例如通过点 M 的那条，它与平面 Π 相交，就在此平面上定出一个而且只有一个点子 m。这个点子称为点 M 的投影①。几何形上所有各点的投影的总和就形成了該几何形在平面 Π 上的圖形。因为所有的投射光綫都由一个中心（点 O）發出，所以这种投射称为中心投射，而圖形本身称为中心投影。

中心投射也可以用其他方法作出，如圖 2 所示。在此圖中所画的是一种古老的由实物描繪圖形的仪器。將眼睛湊近不大的静

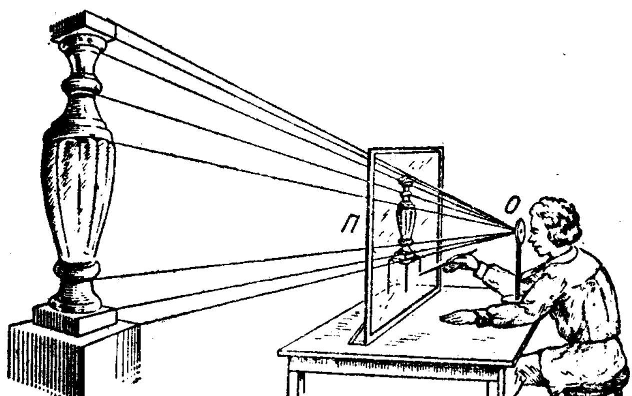

圖 2.

① 我們規定將原物体上各点以大寫的拉丁字母——A, B, C 等标出，而各点的投影則以相应的小寫字母 a, b, c 等标出。有时我們也將被投影的各点用罗馬字 I, II, III, IV, …标出，而它們的投影就用阿拉伯数字 1, 2, 3, 4, …标出。

止孔 O,透过透明板 Π 观看要描繪的实物,就可用鋼筆或毛筆在板上画出物体看得見的外形輪廓。所得的圖形,換言之,即一束投射光綫被平面 Π 所截得的断面,它顯然也是实物的中心投影。

画法几何学使我們能够不用上述的装置,不实际進行投射而只根据几何法則正确地作出圖形來。

我們將被投射的几何形(原物)与其圖形(投影)作一比較,見圖 1。

不难看出,投影并不是原物的重复,不是它准确的付本。例如,原物中的各个直角在投影中改变了大小;正方形变成了梯形;長度相等的綫段被画成了長度不等的綫段;平行的木条 A 和 B 在圖形中变为不再平行的等等。

这样,中心投射將一个几何形(原物)換成了另一个几何形(圖形)。因之,在几何意义上这样的投射是某种变換。这种投射称为透視的变換。

同时也不难看出,在这种变換过程中,原物的某些性質被保持了,例如点的圖形仍是点;直綫的圖形仍是直綫;两直綫的交点在圖中正好是該两綫投影的交点;如果一点位于原物的某一直綫上,則此点的投影仍在該直綫的投影上。

由这些观察可以得出下列結論:虽然在中心投射时原物的形狀及其某些性質有了改变,但在原物与投影之間仍存在着一定的对应关系:圖形中有一定的点与原物的每一点相对应,例如每条直綫对应于一条直綫等。也就是說,原物与其圖形不是两相互間沒有任何联系的任意的几何形。相反地,两者之間具有一定的对应关系,而借此就能通过对圖形的研究以判断原物的性質。

几何形的平面与投影面 Π 相交的直綫 PP_1 称为对应軸。顯然,位于对应軸上的点(例如 C 和 D)在投射过程中仍变換为其本身(或者称为"自身对应")。