数学分析选讲

十省教育学院合编

江苏教育出版社

数学分析选讲

十省教育学院数学系合编

江苏教育出版社

内 容 提 要

本书着重选讲数学分析中理论性较强的部分内容，如极限理论、闭区间上连续函数的性质、可积理论、微分学的基本定理、隐函数存在定理、级数与积分的一致收敛性、场论和实数理论等。书中配有丰富的例题和相当数量的难易适度的习题，书后附有习题答案或解答概要，可帮助读者提高数学分析的理论修养和解题能力。

本书可作为教育学院数学专业二年制本科数学分析教材或高师函授数学专业三年制本科数学分析教学参考书，亦可供师范院校数学系师生参考。

数学分析选讲

十省教育学院数学系合编

江苏教育出版社出版

江苏省新华书店发行　江苏新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 12.25　字数 260,900

1987年10月第1版　1987年10月第1次印刷

印数 7,830 册

ISBN 7—5343—0217—X/G・201

统一书号：7351・597　定价：2.15 元

责任编辑　王建军

编 写 说 明

自一九七八年以来，各省教育学院先后开办了两年制本科进修班，招收具有大专毕业水平的在职中学教师，通过两年系统进修，达到高等师范院校本科毕业水平。为了适应专科到本科的衔接，对专科已开设的某些课程，如数学分析、高等代数等，必须作适当的加深和拓广，以适应进一步学习后续课程的需要。为此，从一九八四年起，广东、广西、四川、云南、江苏、安徽、河南、浙江、湖南、湖北十省教育学院协力编写了《数学分析选讲》和《高等代数概要》作为数学专业上述两门课程的教材。

本书在专科所学数学分析的基础上，着重选讲数学分析中理论性较强的部分内容，如极限理论、闭区间上连续函数的性质、黎曼可积条件、隐函数存在定理、级数与积分的一致收敛性、场论和实数理论等。编写时力求做到说理透彻，论证严谨，深入浅出，简明扼要，并配备有丰富的典型例题和相当数量的难易适度的习题，书后附有习题答案或解答概要，可帮助读者提高数学分析的理论修养和解题能力。

本书亦适宜作为数学专业三年制函授本科数学分析课程的教学参考书，还可作为师范院校数学系学生学习数学分析的辅导书，同时对报考研究生的读者，也不失为一本较理想的数学分析复习资料。

参加本书编写的同志，在集体充分讨论的基础上，按章节分工撰写，各章具体执笔人名单如下：

第一讲　张垚，陈文虎，杨锐之（湖南教育学院）

第二讲　曾灼华（广东教育学院）

第三讲　贾沛蓉（湖北教育学院）

第四讲　单佑民（江苏教育学院）

第五讲　王佩伦（§1—§4）（河南教育学院）

　　　　王学东（§5）（云南教育学院）

第六讲　左宗明（江苏教育学院）

第七讲　陈英娣（§1，§2）（安徽教育学院）

　　　　王学东（§3，§4）（云南教育学院）

第八讲　江业勤（广西教育学院）

附录1　谢汉光（浙江教育学院）

在分工执笔的基础上，全书由左宗明副教授统稿、定稿。统稿人除对原稿作了认真地审阅和修改外，还对以下几处作了重大的更动：改写了第一讲的第二节、补写了第二讲的第一节并增补了比较多的例题和部分习题、第三讲除最后的一道例题外，增补了其余的各例。改写了第五讲的第一节并增补了部分习题、给出了第一、二、三、五、六、八讲的习题的提示和答案。

由于水平所限，错误与不足之处一定不少；我们诚恳地欢迎广大读者批评指正。

十院校系领导对本书的编写非常重视，并给予了热情的支持。还有一些同志参加了编写大纲与初稿的讨论，提出过宝贵的意见。

本书在江苏教育出版社的大力支持下，才得以问世，我们在此一并表示衷心的感谢！

编者　　　一九八六年五月

目　　录

第一讲　极限理论中的几个问题

我们知道，极限方法及其理论是整个数学分析的基础．因此，本章将先对数列极限与函数极限的概念与性质作一简要回顾，然后通过有一定难度的典型例题的介绍，使能掌握在极限问题的证明和计算中的一些方法技巧，以提高解题能力．其次，给出实数的一些基本定理的严格证明．这些基本定理构成了极限理论乃至整个数学分析的理论基础，其中涉及的许多概念与论证方法都是数学分析中最基本的概念与最重要的方法，掌握它们对提高数学修养与素质有重要意义．

§1　极　　限

一　数列的极限

1　数列极限的定义

定义 1.1　设$\{x_n\}$是一数列，a 是定数．如果对任意给定的正数 ε，总存在一个正整数N，使当 $n>N$ 时，都有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称 a 是数列$\{x_n\}$的**极限**，或称数列$\{x_n\}$**收敛**于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

或

$$x_n\to a\quad(n\to\infty).$$

如果数列$\{x_n\}$的极限为零，则称$\{x_n\}$为**无穷小量**．显然，$\{x_n\}$收敛于 a 的充要条件是$\{x_n-a\}$为无穷小量．

如果数列$\{x_n\}$的极限不存在，则称数列$\{x_n\}$**发散**．

定义 1.2 如果对任意正数G，总存在正整数N，使当$n>N$时，都有$|x_n|>G$，则称$\{x_n\}$**发散到无穷大**，或称$\{x_n\}$为无穷大量，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty,$$

或

$$x_n\to\infty\quad(n\to\infty).$$

类似地可定义 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$， $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$。

a 是数列$\{x_n\}$的极限的几何意义是：对任一以 a 为中心的开区间$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)(\varepsilon>0)$，$\{x_n\}$中总存在一项 x_N，在此以后的所有各项 $x_{N+1},x_{N+2},\cdots$都位于其内而至多只有前有限个项位于该区间之外.这意味着$\{x_n\}$的项密集于 a 附近。

我们称开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$为 a 的 ε 邻域，记为$U(a,\varepsilon)$。

注意 在一些极限问题的证明中，有时要用到数列$\{x_n\}$的极限不是a的描述(即极限定义的否定叙述).构成否定叙述的方法是：在原定义中将不等式“$<$”改为它的相反意义“$\geqslant$”将“任意”改为它的相反意义“某个”，将“某个”改为它的相反意义“任意”.肯定与否定的两种叙述可以列表对比如下：

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n\neq a$
对任意 $\varepsilon>0$ 总存在(某个)自然数N 当(任意)$n>N$时 有 $\|x_n-a\|<\varepsilon$	存在某个 $\varepsilon_0>0$ 对任意自然数N 存在某个$n_0>N$ 使 $\|x_{n_0}-a\|\geqslant\varepsilon_0$

例 1 由定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}$.

证明 (1) 设 $x_n=\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$，则

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}\right|,$$

当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|=\frac{5(n-2)}{3(3n^2+2n-4)}\leqslant\frac{5n}{3\cdot 3n^2}<\frac{1}{n};$$

（2）任给 $\varepsilon>0$，要使 $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，即

$$n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

（3）取 $N=\max\left\{2,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，这里 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 表示不超过 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的最大整数，那么当 $n>N$ 时，有

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

（4）由极限定义，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3}$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+3}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}.$$

注意 本题直接从 $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}\right|<\varepsilon$ 找 N 是很繁难的，而将 $\left|\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}\right|$ 适当放大为 $\frac{1}{n}$，再去找 N 便显得很容易.这种方法叫做适当放大法.

2 数列极限的性质

性质 1 （唯一性） 若某数列有极限，则其极限是唯一的。

性质 2 （有界性） 收敛数列是有界数列。

性质 3 （分离性） 若 $x_n \to a, y_n \to b(n \to \infty)$，且 $a > b$，则存在自然数 N，当 $n > N$ 时，有 $x_n > y_n$。

性质 4 （单调性） 若 $x_n \to a$，$y_n \to b$ $(n \to \infty)$，且存在自然数 N，使当 $n > N$ 时，$x_n > y_n$，则 $a \geqslant b$。

注意　结论中等号不能去掉。

性质 5 （运算法则） 若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$均收敛，则$\{x_n \pm y_n\}$，$\{x_n y_n\}$都收敛，且

1° $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} y_n$；

2° $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n y_n) = (\lim\limits_{n \to \infty} x_n)(\lim\limits_{n \to \infty} y_n)$；

3° $\lim\limits_{n \to \infty}(c x_n) = c \lim\limits_{n \to \infty} x_n$，这里 c 是常数；若 $y_n \neq 0(n = 1, 2, \cdots)$，$\lim\limits_{n \to \infty} y_n \neq 0$，则$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$也收敛，且有

4° $$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} x_n}{\lim\limits_{n \to \infty} y_n}$$

性质 6 （夹逼法则） 若$\{x_n\}$与$\{y_n\}$均收敛于 a，且从某项起有 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$，则$\{z_n\}$也收敛于 a。

例 2 若 $a > 0$，证明 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$。

证明 (1) 当 $a \geqslant 1$ 时，$\sqrt[n]{a} \geqslant 1$。令 $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$，则 $\alpha_n \geqslant 0$，于是

$$a = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots +$$
$$+ \alpha_n^n \geqslant 1 + n\alpha_n,$$

故 $$0\leqslant \alpha_n\leqslant \frac{a-1}{n},$$

即 $$1\leqslant \sqrt[n]{a}\leqslant 1+\frac{a-1}{n}$$

因 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a-1}{n}\right)=1,$$

由夹逼法则，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

(2) 当 $0<a<1$ 时，令 $a=\frac{1}{b}$，则 $b>1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{1}=1.$$

总之，当 $a>0$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

例 3 设 $\alpha\geqslant 0$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{[\alpha[\alpha[\alpha\cdots[\alpha]]]}$，这里根号下有 n 层方括号.

解 设 $a_n=[\alpha[\alpha\cdots[\alpha]]]$，其中右端有 n 层方括号，再令 $b_n=\sqrt[n]{a_n}$，则要求的是 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

当 $0\leqslant\alpha<1$ 时，$[\alpha]=0, a_n=0, b_n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0=[\alpha];$$

当 $1\leqslant\alpha<2$ 时，$[\alpha]=1$，$a_n=1$，$b_n=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}b_n=1=[\alpha];$$

当 $\alpha=2$ 时，$a_n=2^n$，$b_n=2$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=2=\alpha$；

当 $\alpha>2$ 时，$a_1=[\alpha]\geqslant\alpha-1$，

$$\begin{aligned}\alpha^n\geqslant a_n&=[\alpha a_{n-1}]\geqslant\alpha a_{n-1}-1\geqslant\alpha(\alpha a_{n-2}-1)-1\\&\geqslant\cdots\geqslant\alpha^{n-1}a_1-\alpha^{n-2}-\alpha^{n-3}-\cdots-\alpha-1\\&\geqslant\alpha^n-\alpha^{n-1}-\cdots-\alpha-1=\alpha^n-\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\\&=\frac{\alpha^{n+1}-2\alpha^n+1}{\alpha-1}=\alpha^n\cdot\frac{\alpha-2+\frac{1}{\alpha^n}}{\alpha-1}\\&>\alpha^n\cdot\frac{\alpha-2}{\alpha-1},\end{aligned}$$

所以 $$\alpha\geqslant\sqrt[n]{a_n}>\alpha\cdot\sqrt[n]{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}},$$

即 $$\alpha\geqslant b_n>\alpha\cdot\sqrt[n]{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}.$$

由例 2，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\alpha-2}{\alpha-1}}=1$，故由夹逼法则，有

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha.$$

综上所述，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{[\alpha[\alpha\cdots[\alpha]]]}=\begin{cases}[\alpha] & 0\leqslant\alpha<2,\\ \alpha & \alpha\geqslant2.\end{cases}$$

二 Stolz 定理

定理 1.1 （Stolz定理） i）设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k$，$b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k$，$\beta_k>0$ 且 $b_n\to+\infty(n\to\infty)$。如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}=l$ （l 有限或为 $+\infty$，$-\infty$），则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l$；

ii）设 $0<b_1<b_2<\cdots$，$b_n\to+\infty(n\to\infty)$。如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l \quad （l\text{ 有限或为 }+\infty,-\infty），$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l。$$

证明 i）当 l 为有限实数时，因为

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n}-l=\frac{\alpha_n-l\beta_n}{\beta_n},$$

$$\frac{a_n}{b_n}-l=\frac{a_n-lb_n}{b_n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k-l\beta_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k}$$

故不失一般性可设 $l=0$，否则用 $\alpha_n-l\beta_n$ 代替 α_n，a_n-lb_n 代替 a_n 便可。这样，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}=0$ 及 $\beta_n>0$ 知，对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 N_1，使 $n>N_1$ 时，有

$$|\alpha_n|<\varepsilon\beta_n,$$

于是,当 $n>N_1$ 时,有

$$\left|\sum_{k=N_1+1}^{n} \alpha_k\right| \leqslant \sum_{k=N_1+1}^{n} |\alpha_k| < \varepsilon \sum_{k=N_1+1}^{n} \beta_k,$$

即 $$|a_n - a_{N_1}| < \varepsilon(b_n - b_{N_1}).$$

另一方面，因 $\frac{|a_{N_1}|}{b_n} \to 0(n\to\infty)$,故存在自然数$N_2$,使 $n>N_2$ 时，有 $\frac{|a_{N_1}|}{b_n}<\varepsilon$。取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，那么当 $n>N$ 时，

有 $$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \left|\frac{b_n - b_{N_1}}{b_n}\right| \cdot \left|\frac{a_n - a_{N_1}}{b_n - b_{N_1}}\right|$$

$$+\left|\frac{a_{N_1}}{b_n}\right| < \left(1-\frac{b_{N_1}}{b_n}\right)\varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

故有 $$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

当$l=+\infty$时，因 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = +\infty$ 及 $\beta_n>0$， 故对任意 $M>0$,存在自然数 N_1，使 $n>N_1$ 时,有

$$\alpha_n > 2M\beta_n,$$

于是，当 $n>N_1$ 时,有

$$\sum_{k=N_1+1}^{n} \alpha_k > 2M \sum_{k=N_1+1}^{n} \beta_k,$$

即 $$a_n - a_{N_1} > 2M(b_n - b_{N_1}).$$

另一方面，因为$\frac{a_{N_1}}{b_n}\to 0\ (n\to\infty)$，$\frac{b_{N_1}}{b_n}\to 0(n\to\infty)$，故存在

自然数 N_2，使 $n>N_2$ 时，有

$$\left|\frac{aN_1}{b_n}\right|<\frac{1}{2}M,\quad \left|\frac{bN_1}{b_n}\right|<\frac{1}{4},$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\frac{a_n}{b_n}=\left(\frac{b_n-bN_1}{b_n}\right)\left(\frac{a_n-an_2}{b_n-bN_1}\right)+\frac{aN_1}{b_n}$$

$$\geqslant\left(1-\frac{bN_1}{b_n}\right)\left(\frac{a_n-aN_1}{b_n-bN_1}\right)-\frac{|an_1|}{b_n}$$

$$>\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot 2M-\frac{1}{2}M=M,$$

故有 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$

同理可证，当 $l=-\infty$ 时结论成立。

ii）添加两项 $a_0=b_0=0$，令 $\alpha_n=a_n-a_{n-1},\beta_n=b_n-b_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$，则 ii)归结为 i)。

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$。$(k\in N)$

解 令 $x_n=1^k+2^k+\cdots+n^k$，$y_n=n^{k+1}$，显然

$y_n<y_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，且 $y_n\to+\infty(n\to\infty)$。

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\cdot\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}-1}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{(k+1)+\frac{(k+1)k}{2!}\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^k}$$

$$\therefore \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{1}{k+1},$$

由 Stolz 定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{1}{k+1},$$

$$\therefore \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

三　函数的极限

1　函数极限的定义

定义 1.3　如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 在点 x_0 的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

若在上述定义中将 $0<|x-x_0|<\delta$ 换以 $0<x-x_0<\delta$ 和 $-\delta<x-x_0<0$，则 A 分别称为 $f(x)$ 在点 x_0 的右极限和左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A, \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

定义 1.4　如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $G>0$，使当 $|x|>G$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

类似地，可给出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义。

定义 1.5　若当 $x\to a$（a 为有限数或为 ∞）时，$f(x)$ 的极