面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

高等学校经济管理学科数学基础

主编　范培华　胡显佑

概率论与数理统计

龙永红　主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 21 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

高等学校经济管理学科数学基础
主编 范培华 胡显佑

概率论与数理统计

龙永红 主编

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪的高等院校经济学学科门类和管理学学科门类的数学基础课教材之一.

全书以经管类学生易于接受的方式介绍了概率论与数理统计的基本内容，重点介绍了概率论与数理统计的方法及其在经济、管理中的应用并附有A、B两级习题及参考答案，还附有常用统计分布表.

本书在内容安排上还考虑了经管类学生将来考研的需要，也适合于考研学生复习备考之用.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/龙永红主编. —北京：高等教育出版社，2001(2002重印)
（经济管理学科数学基础/范培华，胡显佑主编）
ISBN 7-04-009442-8

Ⅰ. 概… Ⅱ. 龙… Ⅲ. ①概率论-应用-经济管理 ②数理统计-应用-经济管理 Ⅳ. F224.7

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第86786号

责任编辑 李 陶　**封面设计** 杨立新　**责任绘图** 尹 莉
版式设计 马静茹　**责任校对** 刘青田　**责任印制** 张小强

概率论与数理统计
龙永红 主编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	化学工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2001年5月第1版
印　　张	20.25	**印　　次**	2002年9月第5次印刷
字　　数	370 000	**定　　价**	17.30元

前　言

1996 年原国家教委开始组织实施“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”其中子项目经济学门类数学基础课研究和管理学门类数学基础课研究分别由中国人民大学和北京大学承担．考虑到这两大学科门类数学基础课程的共同点，教育部又将这两个子项目整合为“经济管理学类专业数学基础课程设置与教学内容改革研究”，集中力量合作研究，并成立了以魏权龄教授和范培华教授为项目主持人的课题组．两年多来，课题组对国内外高等院校同类专业数学基础课程的现状进行了调查研究，编写了教学大纲，组织了多次有关课程体系、课程内容的研讨会．其中，于 1997 年 7 月在长春召开的中国数量经济学会年会上，全国 40 余所院校的教师就经济管理类专业的数学基础课、数量经济分析课程的体系、课程设置、内容等进行了深入的讨论；1998 年 4 月，教育部在京召开了管理类专业面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的研讨会上，初步确定了数学基础课应包括微积分、线性代数和概率统计三门课程，共 16 学分．其中，“微积分”8 学分，“线性代数”3 学分，“概率统计”5 学分．

在调查研究和充分讨论的基础上，课题组拟定了《经济管理学科数学基础教学大纲》（草案），并邀请北京地区部分高校就该大纲进行了讨论．

受教育部委托，北京大学光华管理学院和中国人民大学信息学院共同承担了编写经济管理学科数学基础系列教材的任务．整套教材分为《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》3 个分册，由魏权龄教授任编写组顾问，范培华教授、胡显佑教授任主编．这套教材的《微积分》分册由朱来义教授主编，参加编写的有朱来义、吴岚、范培华和严守权；《线性代数》分册由卢刚副教授主编，参加编写的有卢刚、胡显佑、崔兆鸣；《概率论与数理统计》分册由龙永红副教授主编，参加编写的有龙永红、张贻兰、成世学、王明进．

根据高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革总体目标的要求，我们在编写这套教材时，主要考虑了下述问题：

1. 为适应我国在 21 世纪社会主义建设和经济发展的需要，培养“厚基础、宽口径、高素质”的人才，基础课，特别是数学基础课不应削弱，而应适当加强．

2. 考虑到目前绝大多数综合性大学、工科院校都设立了经济或管理学科的有关专业，但各校、各专业方向对数学基础的要求有一定的差异．这套教材应照顾到多数院校教学的实际情况，便于教师和学生使用．

3. 作为一门数学基础课的教材，我们首先注意保持数学学科本身的科学性、系统性，但在引入一些概念时尽可能采用学生易于接受的方式叙述，对个别冗长，繁琐的推理则略去，而更突出有关理论、方法的应用和经济数学模型的介绍.

4. 作为经济管理学科各专业的数学基础教材，我们注意了专业后继课程的需要，并考虑学生继续深造的需要，教材的各章均配备了A，B两组习题. 一般，达到A组习题的水平，就已经符合本课程的基本要求. B组习题是为数学基础要求较高的专业或学生准备的. 各章中打有“*”号（或小字排版）的内容是为对数学基础要求较高的院校或专业编写的，可以作为选学内容或学生自学用.

1999年12月，由教育部高教司聘请了有关专家对教材的初稿进行了审定. 参加审稿会的有：北京航空航天大学李心灿教授、清华大学胡金德教授、南开大学周概容教授、（以下以姓氏笔划为序）湖南财经学院苏醒教授、北方交通大学季文铎教授、中央财政金融大学单立波教授、华侨大学龚德恩教授、中南财金大学彭勇行教授. 他们对教材初稿提出了许多中肯的建议和具体的修改意见，这对于完善教材是非常有益的，在此向参加审定会的各位教授表示诚挚的谢意.

在各次研讨会上，全国各高校的许多同行都对这一项目和教材提出了极有价值的建议. 在此向有关院校的老师们表示衷心感谢. 在教材编写过程中，我们得到了教育部高教司的大力支持，得到高教出版社有关部门的协助，在此一并致谢.

范培华 胡显佑

2000年3月

目　录

第 1 章

随机事件与概率

概率论是研究随机现象的规律性的数学学科. 为了对随机现象的有关问题作出明确的数学阐述，像其他数学学科一样，概率论具有自己的严格的概念体系和严密的逻辑结构. 本章重点介绍概率论的两个最基本的概念：随机事件及其概率，主要内容包括：随机事件和随机事件的概率的定义、古典概型与几何概型、条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、以及事件的独立性等. 这些内容是进一步学习概率论的基础.

§1.1 随机事件

一、随机现象

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象，一类是在一定条件下必然出现的现象，称为**确定性现象**. 例如，一物体从高度为 h（米）处垂直下落，则必然在$\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$秒后落到地面，其中 $g=9.8$（米/秒^2）为重力加速度. 我们已学过的数学学科均以确定性现象为研究对象，并为研究其量的规律性提供工具和方法. 另一类则是我们事先无法准确预知其结果的现象，称为**随机现象**. 例如，投掷一枚硬币，我们不能事先预知将出现正面还是反面. 在实际中，我们经常要面对和处理随机现象，比如，明天是否会下雨？某种股票明天价格是多少？电视机价格是否会在近期下调？这些问题往往事先均不能得到明确的答案，然而它们却往往与我们的切身利益密切相关. 概率论将以随机现象为研究对象.

二、随机现象的统计规律性

由于随机现象的结果事先不能预知，初看起来，随机现象毫无规律可言. 然而人们发现同一随机现象在大量重复出现时，其每种可能的结果出现的频率却具有稳定性，从而表明随机现象也有其固有的量的规律性. 人们把随机现象在大量重复出现时所表现出来的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**.

为了对随机现象的统计规律性进行研究，人们往往要对随机现象进行观察，我们把对随机现象的观察称为**随机试验**，并简称为试验．例如，某射手对固定目标进行射击；观察某地区夏季暴雨次数；观察某电话交换台每日收到的呼叫次数等均为随机试验．一般地，一个随机试验要求满足下列特点：

(1) 可重复性：试验原则上可在相同条件下重复进行；

(2) 可观察性：试验结果是可观察的，所有可能的结果是明确的；

(3) 随机性：每次试验将要出现的结果是不确定的，事先无法准确预知．

历史上，研究随机现象统计规律性的最著名的试验是投掷硬币的试验．我们知道，投掷一枚均匀硬币时，事先无法准确预知将出现正面还是反面．但是，当人们重复投掷上千次时，却发现出现正面和反面的次数大致相等，即各自占总试验次数的比例（即频率）大致等于 0.5，而且随着试验次数的增加，这一比例会更加稳定地靠近 0.5，表 1.1 列出了历史上一些试验的记录．

表 1.1 历史上投掷硬币试验的记录

试验者	投掷次数 (n)	正面次数 (r_n)	正面频率 $\left(\frac{r_n}{n}\right)$
De Morgan	2 048	1 061	0.5181
Buffon	4 040	2 048	0.5069
Pearson K	12 000	6 019	0.5016
Pearson K	24 000	12 012	0.5005

三、样本空间

正如前面指出的，一个随机试验将要出现的结果是不确定的，但其所有可能结果是明确的．我们把随机试验的每一个可能结果称为一个**样本点**，因而一个随机试验的所有样本点也是明确的，它们的全体，称为**样本空间**，通常用 Ω 表示．Ω 中的点，即样本点，用 ω 表示．

例 1.1 在投掷一枚硬币观察其出现正面还是反面的试验中，有两个样本点：正面、反面．样本空间为

$$\Omega = \{正面,反面\}$$

记 ω_1＝正面，ω_2＝反面，则样本空间可表示为：

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

例 1.2 在投掷一枚骰子，观察其出现的点数的实验中，有 6 个样本点：1 点，2 点，…6 点．样本空间为

$$\Omega = \{1\text{ 点},2\text{ 点},\cdots,6\text{ 点}\}$$

或干脆将样本点分别简记为：1，2，…，6，相应地，样本空间记为

$$\Omega = \{1,2,\cdots,6\}$$

例 1.3 观察某电话交换台在一天内收到的呼叫次数，其样本点有可数无

穷多个：i 次，$i=0$，1，2，…，样本空间为：

$$\Omega=\{0\text{ 次},1\text{ 次},2\text{ 次},\cdots\}$$

或简记为 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

例 1.4 观察一个新灯泡的寿命，其样本点也有无穷多个（且不可数!）：t 小时，$0\leqslant t<\infty$，样本空间为

$$\Omega=\{t\text{ 小时}\mid 0\leqslant t<+\infty\},$$

或简记为

$$\Omega=\{t\mid 0\leqslant t<\infty\}=[0,+\infty).$$

四、随机事件

在随机试验中，人们除了关心试验的结果本身外，往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征，概率论中将这一可观察的特征称为一个**事件**. 例如，投掷一枚骰子，我们也许会关心出现的点数是否为偶数，"点数为偶数"就是一个事件. 同样，"点数小于 7"也是一个事件. 但这两个事件有着根本的区别，前者在随机试验中可能发生也可能不发生，这样的事件称为**随机事件**. 后者在试验中是必然发生的，这样的事件称为**必然事件**. 与必然事件完全对立的是，在试验中一定不发生的事件，称为**不可能事件**. 比如在上述试验中"点数不小于 7"是不可能事件. 虽然必然事件与不可能事件是完全对立的，但它们有一个共同的特点，那就是在试验之前我们能够准确预知其是否发生，因而均不是随机事件，通常称之为**确定性事件**. 概率论研究的是随机事件，但为方便起见常常将必然事件和不可能事件视为随机事件的极端情形，并将随机事件简称为事件，通常记作 A，B，…等.

例 1.5 在投掷一枚骰子的试验中，分别记

"点数是 6"为 A

"点数小于 5"为 B

"点数小于 5 的偶数"为 C

则 A,B,C 均为事件，但事件 A 的结构最为简单，它对应于一个惟一的可能结果，即样本点，这样的事件称为**基本事件**①. 在本例中，共有 6 个基本事件（对应于 6 个样本点）："点数为 1""点数为 2"…，"点数为 6". 基本事件的称谓缘于相对其他事件而言，它们是最基本的，其他事件均可由它们复合而成，而它们自身又不能再分解成其他事件. 事件 B 和 C 均不是基本事件，它们分别可以由一些基本事件复合而成. 比如事件 C 可由"点数为 2"和"点数为 4"两个基本事件复合而成.

---

① 在一般的讨论中，基本事件并不一定是事件，在本书的讨论中，我们均假设基本事件是事件.

五、事件的集合表示

根据定义，样本空间 Ω 是随机试验的所有可能结果——即样本点 ω 的全体，因而样本空间实际上是所有样本点构成的集合，相应的每一样本点是该集合中的元素. 而一个事件是由具有该事件所要求的特征的那些可能结果所构成，所以一个事件对应于 Ω 中具有相应特征的样本点（元素）构成的集合，它是 Ω 的一个子集，于是任何一个事件，我们可以用 Ω 的某一子集来表示，通常用符号 $A, B, \cdots$ 等来记. 某事件发生，就是属于该集合的某一样本点在试验中出现. 如果记 ω 为试验中出现的样本点，那么事件 A 当且仅当 $\omega \in A$ 时发生.

例 1.6 在例 1.5 中，样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，事件 B 和 C 则可分别表示为：

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$C = \{2, 4\}$$

由于样本空间 Ω 包含所有可能结果，试验结果必是其中之一，所以样本空间作为一个事件是必然发生的，即为必然事件，今后用 Ω 表示必然事件. 空集 $\varnothing$ 作为 Ω 的子集不含有任何样本点，不管试验的结果是什么，$\varnothing$ 作为一个事件总不会发生，因而是不可能事件. 今后用 $\varnothing$ 来表示不可能事件.

六、事件间的关系与运算

在一个随机试验中，一般有很多随机事件，为了通过对简单事件的研究来掌握复杂事件，我们需要研究事件之间的关系和事件之间的一些运算. 前面引进的事件的集合表示，为这一任务提供极大的便利.

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致 B 发生，即属于 A 的每一个样本点一定也属于 B，则称**事件 B 包含事件 A**，或称事件 **A 包含于事件 B**，或称 A 是 B 的**子事件**. 记作

$$B \supset A \text{ 或 } A \subset B$$

显然，事件 $A \subset B$ 的含义与集合论中的含义是一致的. 对任意事件 A，易知

$$\varnothing \subset A \subset \Omega$$

2. 事件的相等

如果事件 A 包含事件 B，事件 B 也包含事件 A，则称事件 A 与 B **相等**（或**等价**），记作 $A = B$. 易见，相等的两个事件总是同时发生或同时不发生. 更直接的表述是，$A = B$ 是指 A 与 B 所含的样本点完全相同，这等同于集合的相等.

3. 事件的并（或和）

“事件 A 与 B 至少有一个发生”这一事件称作事件 A 与 B 的**并**（**或和**），记

作 $A\cup B$，或 $A+B$. 显然，事件 $A\cup B$ 是由 A 和 B 的样本点共同构成的事件，这与集合的并集的含义是一致的.

例 1.7 在投掷一枚骰子的试验中，记

$$A=\text{“点数为奇数”}$$
$$B=\text{“点数小于 5”}$$

则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$.

4. 事件的交（或积）

“事件 A 和 B 都发生”这一事件称为事件 A 与 B 的**交**（或**积**），记作 $A\cap B$（或 AB）. 显然，$A\cap B$ 实际上是由 A 和 B 的公共样本点所构成，这与集合的交的含义一致.

在例 1.7 中，事件 A 与 B 的交为：

$$A\cap B=\{1,3\}.$$

5. 事件的差

“事件 A 发生而 B 不发生”这一事件称为事件 A 与 B 的**差**，记作 $A-B$.

在例 1.7 中，事件 A 与 B 的差为：

$$A-B=\{5\}.$$

6. 互不相容事件

若事件 A 与 B 不可能同时发生，也就是说，AB 是不可能事件，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是**互不相容事件**.

比如，在投掷一枚骰子的试验中，“点数小于 3”和“点数大于 4”这两个事件是互不相容事件.

7. 对立事件

“事件 A 不发生”，这一事件称为事件 A 的**对立事件**，记作 $\overline{A}$，易见，$\overline{A}=\Omega-A$，且 $\overline{\overline{A}}=A$. 根据定义，在一次试验中，如果 A 发生，则 $\overline{A}$ 一定不发生，如果 A 不发生，则 $\overline{A}$ 一定发生，也就是说 A 与 $\overline{A}$ 一定也只能发生其中之一，因而有

$$A\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=\Omega$$

例如，在投掷一枚骰子的试验中记 A 为事件“点数为偶数”，则 $\overline{A}$ 为事件“点数为奇数”.

8. 有限个或可数个事件的并与交

设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，则称“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生”这一事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 称“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生”这一事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交，记作 $A_1A_2\cdots A_n$，或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

设有可数个事件 A_1，A_2，…，A_n，…，则称"A_1，A_2，…，A_n，…，至少有一个发生"这一事件为事件 A_1，A_2，…，A_n，…，的并，记作$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，称"$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…都发生"这一事件为事件 A_1，A_2，…，A_n，…的交，记作$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

9. 完备事件组

设 A_1，A_2，…，A_n，…是有限或可数个事件，如果其满足：

(1) $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，i，$j=1$，2，…

(2) $\bigcup_i A_i=\Omega$

则称 A_1，A_2，…，A_n，…是一个**完备事件组**. 显然，A 与 $\overline{A}$ 构成一个完备事件组.

10. 事件的关系与运算的文氏图

上述关于事件的各种关系与运算可直观地用图形(文氏图)来表示(见图1.1)

例 1.8 考察某一位同学在一次数学考试中的成绩，分别用 A，B，C，D，P，F 表示下列各事件（括号中表示成绩所处的范围）：

A ——优秀([90,100])，　D ——及格([60,70))，

B ——良好([80,90))，　P ——通过([60,100])，

C ——中等([70,80))，　F ——未通过([0,60))，

则 A，B，C，D，F 是两两不相容事件；P 与 F 是互为对立的事件，即有 $\overline{P}=F$；A、B、C、D 均为 P 的子事件，且有 $P=A\cup B\cup C\cup D$.

例 1.9 甲、乙、丙三人各射一次靶，记 A —— "甲中靶"，B —— "乙中靶"，C —— "丙中靶"，则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件：

(1) "甲未中靶" —— $\overline{A}$；

(2) "甲中靶而乙未中靶" —— $A\overline{B}$；

(3) "三人中只有丙未中靶" —— $AB\overline{C}$；

(4) "三人中恰好有一人中靶" —— $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$；

(5) "三人中至少有一人中靶" —— $A+B+C$；

(6) "三人中至少有一人未中靶" —— $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$；

(7) "三人中恰有两人中靶" —— $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；

(8) "三人中至少两人中靶" —— $AB+AC+BC$；

(9) "三人均未中靶" —— $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$；

(10) "三人中至多一人中靶" —— $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$；

(11) "三人中至多两人中靶" —— $\overline{ABC}$；

用其他事件的运算来表示一个事件，方法往往不惟一（比如例 1.9 中的 (6) 和 (11) 实际上是同一事件）读者应学会用不同方法表达同一事件，在解

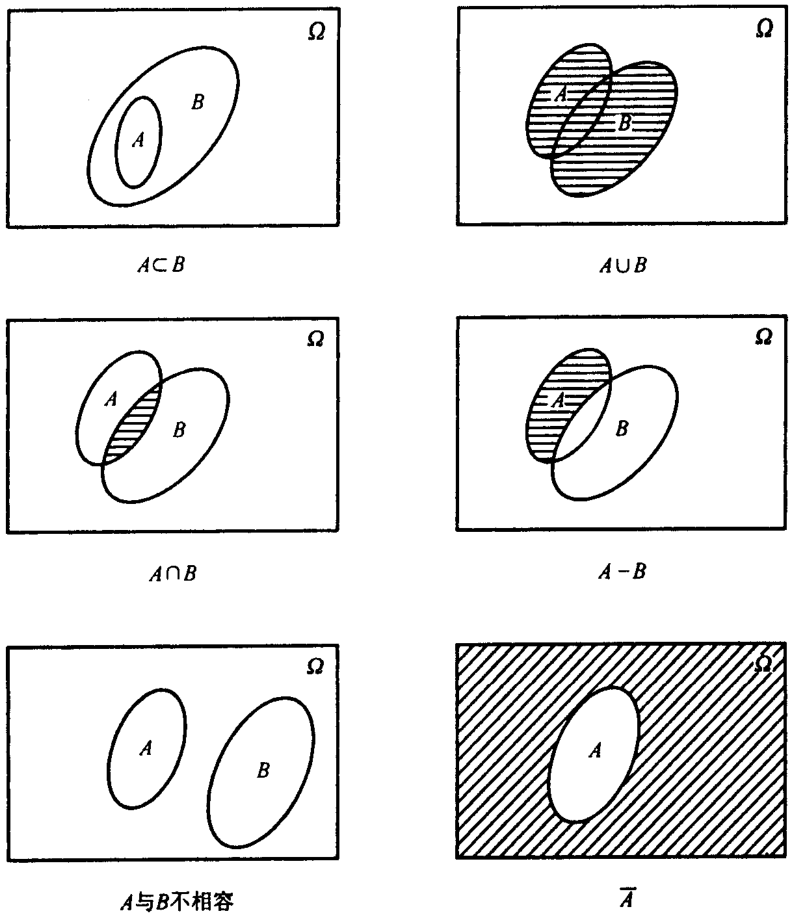

图 1.1 事件的关系与运算的文氏图

决具体问题时，特别是进行概率计算时，往往要根据需要选择其中的一种方法．例 1.9 中许多事件不止一种表达方法，读者可对此进行讨论．

七、随机事件的运算律

我们学过集合的运算律，事件也有相应的运算律，归纳于下：

1．关于求和运算

(1) $A \cup B = B \cup A$　（交换律）

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \xlongequal{\triangle} A \cup B \cup C$　（结合律）

2．关于求交运算

(1) $A \cap B = B \cap A$　（交换律）

(2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \xlongequal{\triangle} A \cap B \cap C$　（结合律）

3. 关于求和与求交运算的混合

(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （第一分配律）

(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ （第二分配律）

4. 关于求对立事件的运算

$$\overline{(\overline{A})}=A \quad \text{（自反律）}$$

5. 关于和及交事件的对立事件

(1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ （第一对偶律）

(2) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ （第二对偶律）

上述各运算律可以推广到有限个和可数个事件的情形．读者可通过复习集合论的知识自行给出．

§1.2 随机事件的概率

一、概率和频率解释

我们知道，在一次随机试验中，一个随机事件是否会发生，事先不能确定．但是，我们可以问，在一次试验中，事件 A 发生的可能性有多大？比如，投掷一枚均匀硬币，我们不能肯定是否会出现正面．但由于硬币是均匀的，我们有理由认为，出现正面和出现反面的可能性相同，均为$\frac{1}{2}$．但可能性大小究竟意味着什么呢？简单地说，它反映了一次试验中事件 A 出现的机会．然而这种机会在一次试验的实际结果中无法体现．可以想像，如果 A 发生的机会越大，那么在大量重复试验它将出现得越频繁，也就是说出现的频率会越大．在投掷一枚均匀硬币的试验中，如果果真出现正面和反面的机会均等，即可能性均为$\frac{1}{2}$，那么在大量重复试验中，出现正面和反面的频率会接近．事实正是如此，正如前一节指出的，大量重复投掷一枚均匀硬币，出现正面和反面的频率会接近一个稳定值$\frac{1}{2}$．可见频率的稳定值与事件发生的可能性大小存在内在必然的联系．一方面频率的稳定性说明事件发生的可能性大小确实是一种客观存在，另一方面，频率的稳定值对事件发生的可能性大小提供了经验解释．为此，我们引入下列定义：

定义 1.1 随机事件 A 发生的可能性大小的度量（数值），称为事件 A 发生的**概率**，记作 $P(A)$．

正如前面指出的，一个事件 A 发生的可能性的大小——概率，在经验上表现为大量重复试验中事件 A 发生的频率的稳定值．因而频率的稳定值为概率的

含义提供了一种经验上的直观. 但频率的稳定值本身并不是概率的本质，不能作为概率的定义. 一个事件的概率是由事件本身特征所决定的客观存在，就好比一根木棒有它的长度一样. 频率的稳定值是概率的外在的必然表现，当进行大量重复试验时，频率会接近稳定值，因而，频率可用来作为概率的估计，就好比是测定概率的“尺子”，随着试验次数的增加，测定的精度会越来越高.

二、从频率的性质看概率的性质

记一个事件 A 在 n 次重复试验中，发生的次数为 $r_n(A)$，则其发生的频率 $f_n(A)$ 为

$$f_n(A)=\frac{r_n(A)}{n}$$

设与试验有关的全体事件的集合为 $\mathscr{F}$，通常称 $\mathscr{F}$ 为**事件域**. 随着 A 取遍 $\mathscr{F}$ 中的任意事件，$f_n(A)$ 便成为定义在 $\mathscr{F}$ 上关于 A 的函数. 容易证明，作为一个函数，$f_n(A)$满足下列性质：

(1) $f_n(\Omega)=1$；

(2) 对任意事件 A，有 $f_n(A)\geqslant 0$；

(3) 对任意两两不相容的事件 A_1，A_2，…，A_n，…，有

$$f_n(\bigcup_{i=1} A_i)=\sum_{i=1} f_n(A_i).$$

上述各性质的证明是简单的，我们略去. 但值得指出的是，$f_n(A)$还满足许多其他性质，比如，比较显然的性质有：$f_n(\varnothing)=0$，$f_n(A)\leqslant 1$. 然而这些性质均可由上述三条性质导出，所以上述三条性质是反映频率特征的核心性质.

同频率一样，记事件 A 发生的概率为 $P(A)$，随着 A 取遍任意事件，$P(A)$ 则可视为定义在全体事件构成的集合，即事件域 $\mathscr{F}$ 上的一个函数. 根据概率的频率解释，概率可视为频率的稳定值，从而应具有频率的相应性质，即

(1) $P(\Omega)=1$；

(2) 对任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(3) 对任意可数个两两不相容的事件 A_1，A_2，…，A_n，…，有

$$P(\bigcup_{i=1} A_i)=\sum_{i=1} P(A_i).$$

三、概率的公理化定义

任何一个数学概念都是对现实世界的抽象，这种抽象使得其具有广泛的适应性，并成为进一步数学推理的基础. 前面指出，概率的频率解释为概率提供了经验基础，但不能作为一个严格的数学定义，它没能抓住“概率”这一概念