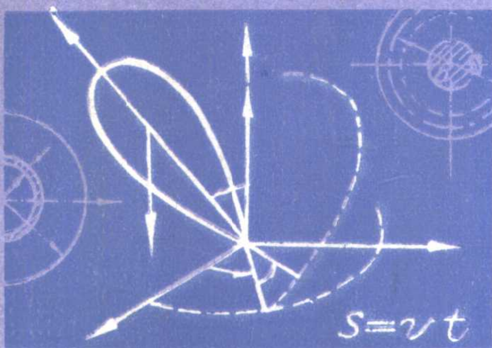
理论力学理论与题解



山东科学技术出版社

理论力学理论与题解

洪铭熙 王喜山
姜万禄 于洛平 编

山东科学技术出版社
一九八二年·济南

内 容 提 要

本书简要地介绍了质点运动学、刚体运动学、静力学、质点动力学、质点组动力学、刚体动力学、分析力学方面的基本理论，对500道典型性强的习题作了指导性的分析和解答。每节后附有适量的练习题，以帮助读者巩固和加强对基本理论的理解，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可供综合性大学、高等师范院校的理工科师生、中学和中等专科学校的教师学习参考，对于有志自学成才的读者来说，也是一本难得的参考书。

理论力学理论与题解

洪铭熙 王喜山
姜万禄 于洛平 编

*

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　27.75印张　2插页　598千字
1982年2月第1版　1982年2月第1次印刷
印数：1—14,500

书号 13195·54　定价 2.35元

出 版 说 明

理论力学是研究物体机械运动一般规律的学科。它是固体力学、流体力学以及各种应用力学的基础。在学习理论力学的过程中，广大读者往往感到不易掌握其解题的方法。在国务院批转教育部关于高等教育自学考试办法以来，广大有志自学成才的读者更是急切地要求对一些疑难习题有一个明确的解答。为此，我们编写了这本书。

本书共分七章：质点运动学，刚体运动学，静力学，质点动力学，质点组动力学，刚体动力学，分析力学。每章除了简要地介绍了有关的基本理论外，重点对难度大、典型性强的500道习题作了指导性的分析和解答，每节后还附有适量的练习题，以帮助读者加强和巩固对基本理论的理解，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可供综合性大学、高等师范院校的理工科师生以及中学、中等专科学校的物理教师学习参考。对广大自学成才的读者来说，也是一本难得的参考书。

一九八一年

目　录

第一章　质点运动学 ……………………………………………………1
§1·1　质点的直线运动 ……………………………………………………1
§1·2　从直角坐标运动方程求质点的速度、加速度和轨迹 ……22
§1·3　从极坐标运动方程求质点的速度、加速度和轨迹 ………39
§1·4　加速度的内禀方程 ……………………………………………51
§1·5　相对运动 ……………………………………………………………73
第二章　刚体运动学……………………………………………………106
§2·1　刚体绕定轴转动和平面平行运动 ……………………………106
§2·2　刚体绕定点的转动 ……………………………………………124
第三章　静力学 …………………………………………………………135
§3·1　交于一点诸力的平衡 …………………………………………135
§3·2　平行力、力偶、力矩和重心 ……………………………………158
§3·3　平面力系的平衡和物体平衡的种类 …………………………177
§3·4　空间力系的平衡和有摩擦力存在时的平衡 ………………206
§3·5　柔软而不可伸长的绳缆 ………………………………………243
第四章　质点动力学……………………………………………………259
§4·1　质点直线运动 ……………………………………………………259
§4·2　自由质点的曲线运动 …………………………………………292
§4·3　非自由质点的运动 ……………………………………………351
§4·4　质点的振动 ………………………………………………………399
§4·5　有心力 ……………………………………………………………441
§4·6　在非惯性系中质点的运动 ……………………………………511

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第五章　质点组动力学 ……548
§5·1　质点组动量定理和质心运动定理 ……548
§5·2　质点组动量矩定理 ……574
§5·3　质点组动能定理 ……586
§5·4　冲量和碰撞 ……613
§5·5　变质量运动 ……640
第六章　刚体动力学 ……658
§6·1　转动惯量 ……658
§6·2　刚体绕定轴转动 ……675
§6·3　刚体平面平行运动 ……701
§6·4　刚体的定点转动和一般运动 ……741
§6·5　刚体的打击 ……776
第七章　分析力学 ……797
§7·1　虚功原理 ……797
§7·2　达朗贝尔原理 ……811
§7·3　第二类拉格朗日方程 ……822
§7·4　正则方程 ……854

第一章　质点运动学

§1·1　质点的直线运动

质点的等速直线运动，就是质点以不变的速度沿一直线的运动。设质点作等速运动时的速度为V，那么，在时间间隔t内，质点所走的路程S为

$$S = Vt \tag{1—1}$$

如果质点运动时，其速度大小的变化与时间成比例，这种运动叫做匀变速运动。这时质点在时刻t的速度为

$$V = V_0 + at \tag{1—2}$$

其中，V_0是初速度，a是匀变速运动的加速度。如果矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{V}$是同向的，这种运动叫做匀加速运动；如果它们是反向的，叫做匀减速运动。质点作匀变速运动时，它在时间间隔t内所走过的路程S为

$$S = V_0t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1—3}$$

从(1—2)和(1—3)式消去t，可得到V和S的关系式：

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2aS} \tag{1—4}$$

当$V_0 = 0$(初速度为零)时，(1—4)式变为

$$V = \sqrt{2aS} \tag{1—5}$$

物体运动时，一般说来，物体中各点的速度和加速度都是不同的，因此，只有在物体上所有的点都以同样的速度和

同样的加速度运动时，亦即物体作平移运动时，才能说“物体作匀速或匀加速运动”，因为这时物体的运动可以用其中任意一点的运动来表示。

如果质点沿直线的运动规律是

$$x=f(t) \tag{1—6}$$

则质点的速度的代数值是

$$V=\frac{dx}{dt}=f'(t) \tag{1—7}$$

而加速度为

$$a=\frac{dV}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t) \tag{1—8}$$

质点的加速度也可以用下式表示

$$a=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}=V\frac{dV}{dx} \tag{1—9}$$

【例1】一物体以初速 v 向上抛，在时间 t 之后，另一物体以初速为 v' $(v'>v)$ 向上抛。试证：若使它们相遇的时间越迟越好，则时间 t 应为

$$\frac{[\sqrt{v'^2-v^2}-(v'-v)]}{g}.$$

证 设第二个物体上抛而经过时间 t' 后才与第一个物体相遇。

这时第一个物体向上运动的位移为

$$v(t+t')-\frac{1}{2}g(t+t')^2,$$

而第二个物体向上运动的位移为

$$v't'-\frac{1}{2}gt'^2.$$

又因二个物体相遇时其位移相等，所以

$$v't'-\frac{1}{2}gt'^2=v(t+t')-\frac{1}{2}g(t+t')^2 \tag{1}$$

由此可知 t' 是 t 的函数，欲使 t' 达到最大值，其必要条件为 $\frac{dt'}{dt}=0$。

微分(1)式得到 $\frac{dt'}{dt}=0$ 的条件为

$$t'=\frac{v}{g}-t。 \tag{2}$$

(2)式代入(1)式，得

$$v'\left(\frac{v}{g}-t\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}-t\right)^2=\frac{v^2}{g}-\frac{1}{2}g\cdot\frac{v^2}{g^2},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}gt^2+(v'-v)t+\frac{v(v-v')}{g}=0,$$

$$t=\frac{-(v'-v)\pm\sqrt{(v'-v)^2-2v(v-v')}}{g}$$

$$=\frac{-(v'-v)\pm\sqrt{v'^2-v^2}}{g}。 \tag{3}$$

若(3)式中根号前取负号，则 $t<0$，等式没有物理意义，故(3)式中根号前取正值。

$$t=\frac{-(v'-v)+\sqrt{v'^2-v^2}}{g},$$

即

$$t=\frac{[\sqrt{v'^2-v^2}-(v'-v)]}{g}。$$

【例 2】二人自同一点出发，分别以初速 v 和 v' 及加速

度 f 和 f' 赛跑，并同时到达终点，试证二人所跑完的距离为

$$\frac{2(v-v')(vf'-v'f)}{(f-f')^2}.$$

证 设二人跑完的距离为 S，所需时间为 t。则对第一个人来讲，有

$$S=vt+\frac{1}{2}ft^2; \tag{1}$$

对第二个人来讲，有

$$S=v't+\frac{1}{2}f't^2. \tag{2}$$

由(1)、(2)式可得

$$vt+\frac{1}{2}ft^2=v't+\frac{1}{2}f't^2,$$

$$\therefore \qquad t=\frac{2(v-v')}{f'-f}. \tag{3}$$

把(3)式代入(1)式，得

$$\begin{aligned}S&=v\cdot\left[\frac{2(v-v')}{f'-f}\right]+\frac{1}{2}f\left[\frac{2(v-v')}{f'-f}\right]^2\\&=\frac{2(v-v')}{(f'-f)^2}[v(f'-f)+f(v-v')]\\&=\frac{2(v-v')(vf'-v'f)}{(f'-f)^2}.\end{aligned}$$

【例 3】一质点 M 自倾角为 α 的斜面上方的 O 点，沿一光滑斜槽 OA 下降，如要使此质点到达斜面上所需时间为最短，问斜槽 OA 与铅垂线的夹角 β 应为何值？

解 如图 1—1 所示，O 点为斜面上方一定点，α 为斜

面倾角，β 为斜槽 OA 与铅垂线的夹角，OE 为铅垂线。设 $OE=h, OA=l$，则重力加速度在 l 上的分量为 $g\cos\beta$，于是有

$$l=\frac{1}{2}g\cos\beta\cdot t^2. \qquad (1)$$

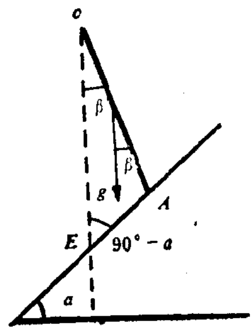


图 1—1

由图可知：

$$\angle OEA=90°-\alpha, \qquad (2)$$

$$\angle OAE=90°+\alpha-\beta. \qquad (3)$$

在△OEA 中，据正弦定理，有

$$\frac{OA}{\sin\angle OEA}=\frac{OE}{\sin\angle OAE}. \qquad (4)$$

把(2)和(3)式及 $OE=h$，$OA=l$ 代入(4)式，得

$$\frac{l}{\sin(90°-\alpha)}=\frac{h}{\sin(90°+\alpha-\beta)},$$

$$\therefore \qquad \frac{l}{\cos\alpha}=\frac{h}{\cos(\alpha-\beta)},$$

$$l=\frac{h\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}. \qquad (5)$$

把(1)式代入(5)式，得

$$\frac{h\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{1}{2}g\cos\beta t^2,$$

则
$$t^2=\frac{2h\cos\alpha}{g\cos(\alpha-\beta)\cos\beta}. \qquad (6)$$

令 $\frac{dt}{d\beta}=0$，利用求 t 的极值的方法，求 β 的值。对 (6) 式求关于 β 的一阶导数，且令其为零，可得

238253

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$$\frac{dt}{d\beta}=\frac{1}{2t}\cdot\frac{2h\cos\alpha}{g}\cdot\frac{\sin(2\beta-\alpha)}{\cos^2(\beta-\alpha)\cos^2\beta}=0,$$

从 $$\sin(2\beta-\alpha)=0,$$

即

$$2\beta-\alpha=0,$$

故 $$\beta=\frac{\alpha}{2}.$$

即当斜槽 OA 与铅垂线的夹角 $\beta=\frac{\alpha}{2}$ 时，质点 M 沿斜槽 OA 下降到斜面所需时间最短。

【例 4】一质点 M 沿椭圆的哪一直径滑下，所需的时间为最短？假定椭圆的长轴是铅直的，并且不计摩擦力。

解 设已知椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1. \qquad (1)$$

如图 1—2 所示，式中 a 为椭圆的长半轴，b 为椭圆的短半轴，P 和 P' 分别为椭圆直径与椭圆的两个交点，φ 为该直径与 y 轴的夹角。该椭圆的离心率 e 满足下式

$$\frac{b^2}{a^2}=1-e^2, \qquad (2)$$

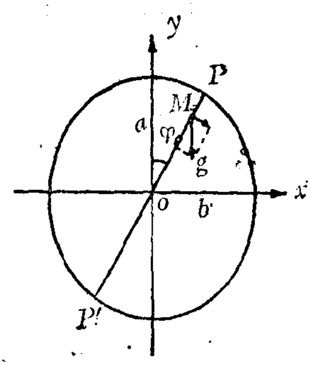


图 1—2

而椭圆的直径方程式（即斜率为 m 的平行弦族的中点的轨迹方程式）为

$$a^2x+b^2my=0. \qquad (3)$$

由(1)式和(3)式可得该直径与椭圆的交点 P 和 P' 的坐标分

别为

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b^2 m}{\sqrt{m^2b^2+a^2}} \\ y = +\dfrac{a^2}{\sqrt{m^2b^2+a^2}} \end{cases} \tag{4}$$

和

$$\begin{cases} x = +\dfrac{b^2 m}{\sqrt{m^2b^2+a^2}} \\ y = -\dfrac{a^2}{\sqrt{m^2b^2+a^2}} \end{cases} \tag{5}$$

式中m的值可正可负，而在图中，m为负值的情况。直径PP'的长L为

$$\begin{aligned} L &= 2\sqrt{x^2+y^2} \\ &= 2\sqrt{\frac{m^2b^4+a^4}{m^2b^2+a^2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

因为重力加速度在L方向的分量为$g\cos\varphi$，所以

$$L = \frac{1}{2}g\cos\varphi\cdot t^2,$$

$$\therefore \qquad t^2 = \frac{2L}{g\cos\varphi}. \tag{7}$$

由图知

$$\cos\varphi = \frac{y}{\dfrac{L}{2}}, \tag{8}$$

将(4)式和(6)式代入(8)式，得

$$\cos\varphi = \frac{a^2}{\sqrt{m^2b^4+a^4}}. \tag{9}$$

将(6)式和(9)式代入(7)式，得

$$t^2=\frac{4a\left[m^2\left(\frac{b^4}{a^4}\right)+1\right]}{g\sqrt{m^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right)+1}}. \tag{10}$$

将(2)式代入(10)式，得

$$t^2=\frac{4a[m^2(1-e^2)^2+1]}{g\sqrt{m^2(1-e^2)+1}}. \tag{11}$$

欲知质点 M 沿哪一条直径滑下所需时间 最短，只要令 $\frac{dt}{dm}=0$，并考察m的取值即可．由(11)式得

$$\frac{2a}{g}\cdot\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{a}}\,\frac{\sqrt{m^2(1-e^2)+1}}{\sqrt{m^2(1-e^2)^2+1}}$$

$$\left\{\frac{[m^2(1-e^2)+1][2m(1-e^2)^2]-[m^2(1-e^2)^2+1]m(1-e^2)}{[m^2(1-e^2)^2+1]}\right\}=0,$$

$$\therefore\quad m(1-e^2)\{2[m^2(1-e^2)+1]-[m^2(1-e^2)^2+1]\}=0. \tag{12}$$

因为 $e\neq1$，所以由(12)式得

$$m=0 \tag{13}$$

或

$$m^2=\frac{2e^2-1}{(1-e^2)^2}. \tag{14}$$

对(14)式进行讨论：

当 $2e^2-1=0$ 时， $e^2=\frac{1}{2}$，$m=0$，此时质点 M 沿长轴滑下所用时间最短。

当 $2e^2-1<0$ 时，$e^2<\frac{1}{2}$，而m为虚数，故m不存在；但由(13)式可知，此时质点M沿长轴滑下所用时间最短。

当 $2e^2-1>0$ 时，$e^2>\frac{1}{2}$，此时

$$m=\pm\frac{\sqrt{2e^2-1}}{1-e^2}, \tag{15}$$

将(15)式代入(9)式，并考虑到(2)式得

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}\,e}, \tag{16}$$

$$\therefore \qquad \varphi=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,e}\right), \tag{17}$$

即当质点M沿与y轴的夹角为$\varphi=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,e}\right)$的直径滑下时所用时间最短。

【例 5】直角曲杆OAB在其本身平面内绕固定点O以等角速度ω转动，在此平面内有一固定直线LN，距O点距离$OO'=a$，求杆与直线LN的交点M的速度和加速度（设$OA=r$为已知）。

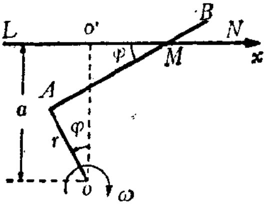


图 1—3

解 由图1—3可知，φ为$\overline{OO'}$与$\overline{OA}$的夹角。设LN为x轴，O'为原点，

$$\begin{aligned} O'M &= x \\ &= (a-r\sec\varphi)\operatorname{ctg}\varphi \\ &= a\operatorname{ctg}\varphi - r\csc\varphi, \end{aligned} \tag{1}$$

因为直角曲杆OAB在其本身平面内绕固定点O以等角速ω

转动，所以

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\omega, \tag{2}$$

式中负号表示ω方向与φ增加方向相反。

M点的速度可以由(1)式对时间的导数求得

$$\begin{aligned}v&=\dot{x}\\&=\left[-\frac{a}{\sin^2\varphi}+r\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right]\frac{d\varphi}{dt}\\&=\omega\left(\frac{a-r\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right),\end{aligned} \tag{3}$$

而M点的加速度可由(3)式对时间的导数求得

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=\omega\left[\frac{r\sin\varphi\sin^2\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi(a-r\cos\varphi)}{\sin^4\varphi}\right]\frac{d\varphi}{dt}\\&=\frac{2a\cos\varphi-r-r\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}\omega^2\\&=\omega^2\left[\frac{2a\cos\varphi-r(1+\cos^2\varphi)}{\sin^3\varphi}\right].\end{aligned}$$

【例6】一曲柄OQ以恒角速度ω绕O点转动，连杆PQ和曲柄OQ连接于Q点，P限制于OX直线上运动。设$OQ=a$，$QP=l$，$\angle QOP=\theta$。试证：在$\frac{a}{l}$很小时，P点的加速度大小约为

$$\omega^2 a\cos\theta+\frac{\omega^2a^2}{l}\cos 2\theta.$$

证　从图1—4中可以看出，若设$OP=x$，根据余弦定理，则有

$$l^2=x^2+a^2-2ax\cos\theta,$$

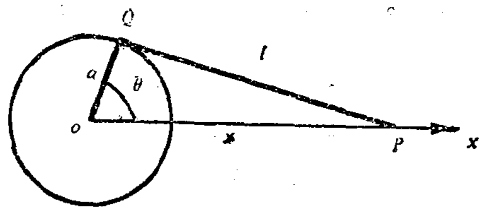


图 1—4

$$\therefore \qquad (x-a\cos\theta)^2=l^2-a^2\sin^2\theta.$$

即 P 点的坐标为

$$x=\sqrt{l^2-a^2\sin^2\theta}+a\cos\theta. \tag{1}$$

微分(1)式得到 P 点的速度为

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{a^2\sin 2\theta\cdot\omega}{2\sqrt{l^2-a^2\sin^2\theta}}-a\sin\theta\cdot\omega, \tag{2}$$

其中 $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$ 为恒角速度，求(2)式对时间的导数，即

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{2(l^2-a^2\sin^2\theta)a^2\cos2\theta\cdot\omega^2+a^4(\sin^22\theta)\cdot\omega^2}{(l^2-a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$-a\omega^2\cos\theta. \tag{3}$$

若将(3)式按台劳级数展开，略去比$\left(\dfrac{a}{l}\right)^2$高次的诸项，即得 P 点加速度的近似式为

$$\frac{d^2x}{dt^2}\approx-\frac{a^2\omega^2\cos 2\theta}{l}-a\omega^2\cos\theta.$$

由此可见，P 点加速度的大小为 $\omega^2a\cos\theta+\dfrac{\omega^2a^2\cos 2\theta}{l}$.

【例 7】一列火车以匀加速度 a 从静止开始运动，到具有速度 v，然后匀速前进一段时间，最后以匀减速运动，直到

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com