高等学校试用教材

高等数学

华中师范大学数学系
阎家灏　曾鉴清编

下册　物理专业用

高等教育出版社

高等学校试用教材

高 等 数 学

(物理专业用)

下 册

华中师范大学数学系
阎家麟 曾鉴清 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书系根据高等师范院校物理专业高等数学教学大纲编写而成．全书共十四章，分上、下两册．本册包括向量代数与空间解析几何，线性代数初步，向量函数的微分及其应用，多元函数微分学，常微分方程，重积分与含参变数的积分和场论等七章．

本书选材精炼，深广适度，叙述清楚，便于自学．书中各节附有适当的习题，书末附有习题答案．

本书可作为高等师范院校及师范专科学校物理专业高等数学课程的教材，也可供理工科院校相近专业使用．

高等学校试用教材

高 等 数 学

（物理专业用）

下 册

华中师范大学数学系

阎家麟　曾鉴清　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 14.5　字数 353 000

1988 年 4 月第 1 版　1988 年 9 月第 2 次印刷

印数　3,111—4,120

ISBN7-04-000810-6/O·316

定价 3.30 元

目　录

第八章　向量代数与空间解析几何

有些物理量，如位移、力、速度和加速度等等，不但有数值的大小，而且还具有一定的方向，这样的量叫做向量．每个向量都可以用一条方向与它相同，长度等于它的数值的有向线段表示出来．它们服从一些特定的运算法则，从而形成了向量代数．向量代数是几何与物理学的有力工具．本章先介绍向量代数，然后用向量代数作工具研究平面与空间直线，最后讨论二次曲面．

§8-1　向量及其线性运算

这一节我们用几何的方法来研究向量．

1．向量的概念和几何表示法

我们从向量的几何表示入手．

定义 1　具有确定方向的线段叫**向量**．

线段的两个端点，一个叫起点，一个叫终点，向量的方向是由起点到终点的方向，在图形上用箭头标志这个方向（图 8-1）．起点为 A，终点为 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$．为简便起见，常用一个粗体拉丁字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$．向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记作 $|\boldsymbol{a}|$．

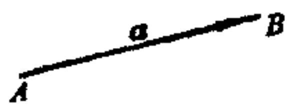

图　8-1

起点与终点重合的向量，即长度等于零的向量叫**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$．零向量只不过是个点，它的方向不确定，以致可以认为它与任何向量平行或垂直．

定义 2　长度相等、方向相同的向量叫做是**相等**的．

根据这个定义，向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 等于由它经过平行移动而得到

的一切向量．即向量由它的长度和方向完全确定，而起点的位置可以任意选择．如图 8-2 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$．满足这个相等定义的向量称为**自由向量**．今后如无特别说明，所讨论的向量都是自由向量．

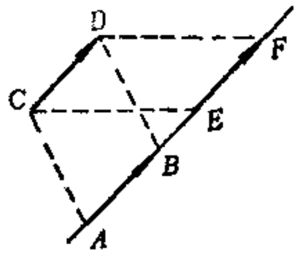

图 8-2

2. 向量的线性运算

向量可以按照以下特定方法进行运算．

向量的加法　如图 8-3 所示，以向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 的终点为起点作向量 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\overrightarrow{AC}$，叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．向量 $\boldsymbol{a}$ 加向量 $\boldsymbol{b}$ 构成向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的这种作图法，叫做向量相加的**三角形法则**．

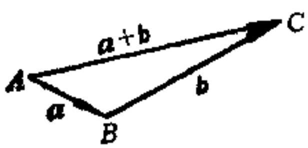

图 8-3

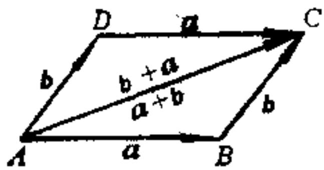

图 8-4

若从同一起点 A 作向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$（图 8-4），由于构成平行四边形对边的两个向量相等，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 就是以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{AC}$．像这样作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方法，叫做向量相加的**平行四边形法则**．

从图 8-4 的两个三角形 ABC 和 ADC 中可以看出，向量的加法服从**交换律**，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

根据定义，对于任何向量 $\boldsymbol{a}$，都有

$$a+0=0+a=a.$$

对于非零向量 $a=\overrightarrow{AB}$，称与它长度相等而方向相反的向量 $\overrightarrow{BA}$ 为它的负向量，记作 $-a=\overrightarrow{BA}$. 根据三角形法则，$a+(-a)$ 的起点与终点将重合，即

$$a+(-a)=0.$$

要想作三个向量 a,b,c 的和，只需用三角形法则（或平行四边形法则），先作出 $a+b$，然后再将 $a+b$ 与向量 c 相加，作出 $(a+b)+c$. 由图 8-5 可以看出

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

这就是说：向量的加法满足结合律，因而三个向量的和可记为 $a+b+c$.

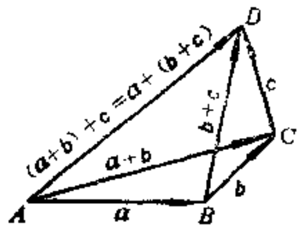

图 8-5

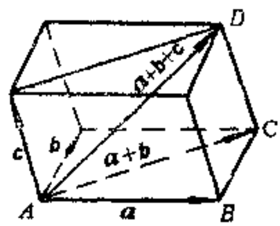

图 8-6

不在同一平面上的三个向量的和，就是以它们为棱的平行六面体的对角线（图 8-6）.

由图 8-5 可以看出，向量 $a+b+c$ 就是封闭折线 $ABCD$ 的向量 $\overrightarrow{AD}$. 由于向量的加法满足交换律和结合律，因此，我们有

向量加法的一般法则：以任何顺序连续画出向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，即总是以前一向量的终点作为后一向量的起点，于是它们作成一条折线，封闭该折线的自第一个向量的起点到最后一个向量终点的向量，就是向量 $a_1+a_2+\cdots+a_n$.

位移是向量. 因为它既描述了从起始位置到最终位置的线段

的方向，又描述了该线段的长度．上述向量的加法，作为位移的合成，那是很容易理解的．除位移外，一个物理量，只要它有确定的数值和方向，而且能满足加法的三角形法则或平行四边形法则，都可以用向量表示．

向量的减法 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，满足方程

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$$

的向量 $\boldsymbol{x}$，叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．

以某一点 P 为共同起点，引向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}, \boldsymbol{b}=\overrightarrow{PR}$，由图 8-7得

$$\boldsymbol{b}+\overrightarrow{RQ}=\boldsymbol{a}.$$

所以

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{RQ}.$$

于是我们得到向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的作图法：过空间同一点引向量 $\boldsymbol{a}$与 $\boldsymbol{b}$，则以减向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以被减向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量，就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差．

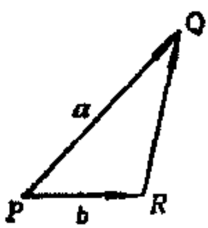

图 8-7

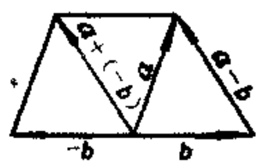

图 8-8

其次，比较 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$的作图(图 8-8)，可见

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

数与向量的乘法 实数 m 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $m\boldsymbol{a}$ 或$\boldsymbol{a}m$(图 8-9)：

i) 当 $m>0$ 时，$m\boldsymbol{a}$ 的长度$|m\boldsymbol{a}|=m|\boldsymbol{a}|$，$m\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同．

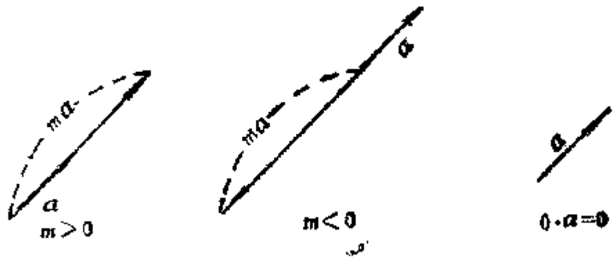

图 8-9

ii) 当 $m<0$ 时，$m\boldsymbol{a}$ 的长度 $|m\boldsymbol{a}|=|m||\boldsymbol{a}|$，$m\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

iii) 当 $m=0$ 时，$0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，即 $0\cdot\boldsymbol{a}$ 为零向量.

由这个定义得知

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a},$$

当 m 为正整数时，$m\boldsymbol{a}=\underbrace{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\cdots+\boldsymbol{a}}_{m\text{ 个}}$.

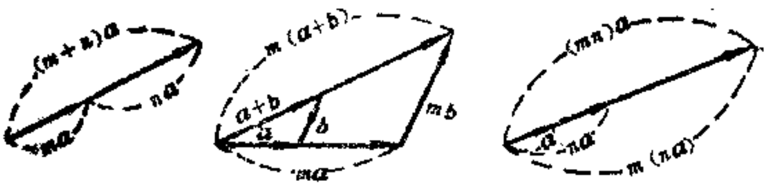

图 8-10

从图 8-10 可以看出，数与向量的乘法服从以下运算法则：

$$\left.\begin{array}{l}(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a},\\ m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},\end{array}\right\}\text{(分配律)}$$

$$m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{a}.\ \text{(结合律)}$$

长度为 1 的向量叫**单位向量**. 如果用 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 表示非零向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的单位向量，则

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\hat{\boldsymbol{a}}\quad\text{或}\quad\hat{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

表达式

$$m_1\boldsymbol{a}_1+m_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+m_k\boldsymbol{a}_k$$

叫做向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 的**线性组合**.

3. 向量的分解

互相平行的向量叫**共线向量**. 共线向量经过平行移动，它们就会落在同一直线上，所以可以用落在一条直线上的向量来表示. 设 $\boldsymbol{a}$ 是一非零向量，那末每一个与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量 $\boldsymbol{b}$ 都可以表示成数 m 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积: $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$, 其中 $m=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时取正号，反向时取负号.

空间里平行于同一平面的向量叫**共面向量**. 它们可以用落在一个平面上的向量来表示. 显然任意两个向量共面，但并不是空间的任意三个向量都共面. 假定 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 共面，而 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 是不共线的向量，则向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表成 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的线性组合. 事实上，将它们的起点移到同一点 O，过向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点分别作平行于向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的直线，设它们分别交向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 所在直线于 M,N 点(图 8-11)，则

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=p\boldsymbol{u}+q\boldsymbol{v}.$$

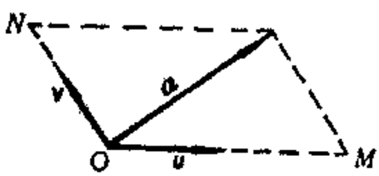

图 8-11

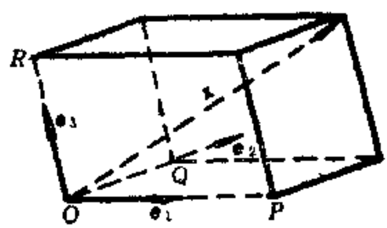

图 8-12

这叫做平面向量 $\boldsymbol{a}$ 关于向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的**分解**，此时向量 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 称为平面上的**基**.

设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是空间里不共面的向量，则空间里的任一向量 $\boldsymbol{x}$ 都可按它们进行分解. 事实上，把它们的起点移到同一点 O，由 $\boldsymbol{x}$

的终点作平行于 $e_2, e_3; e_3, e_1; e_1, e_2$ 所在平面的平面，设它们分别交向量 e_1, e_2, e_3 所在直线于 P, Q, R(图 8-12)，则

$$\begin{aligned} x &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \\ &= r e_1 + s e_2 + t e_3. \end{aligned}$$

这是向量 x 关于 e_1, e_2, e_3 的分解. 此时向量 e_1, e_2, e_3 称为空间的基.

习 题 8-1

1. 证明

$$|a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm 2|a||b|\cos\theta,$$

其中 θ 为向量 a 和 b 间的夹角.

§ 8-2 空间直角坐标系

这一节将要建立空间的点及向量与三数组的对应关系，以引进研究向量的代数方法，从而建立代数方法与几何方法的联系.

1. 空间直角坐标系

在空间里取交于原点 O，且两两垂直的坐标轴 Ox，Oy 和 Oz，分别叫做 x 轴(或横轴)，y 轴(或纵轴)，z 轴(或竖轴)，它们组成空间直角坐标系. 它们的交点叫坐标原点，通过 x 轴和 y 轴，y 轴和 z 轴，z 轴和 x 轴的坐标平面，分别叫做 xy 面，yz 面和 zx 面. 坐标轴的方向本来是可以任意放置的，但为便利起见，通常采用右手系，如图 8-13 所示. 这时若将右手姆指，食指和中指两两互相垂直地伸开，并用姆指和食指分别指向 x 轴和 y 轴的方向，则中指指向 z 轴的方向.

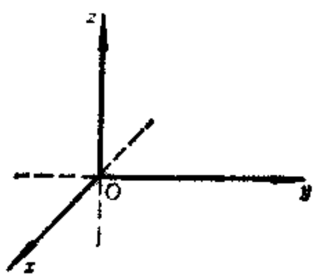

图 8-13

建立了直角坐标系以后，空间的任意一点M在坐标系中的位置就可以用三个数来确定. 如图 8-14，过点M分别作垂直于 x轴，y 轴和 z 轴的平面. 设垂足为 P,Q,R，而 x,y，z 是它们在对应坐

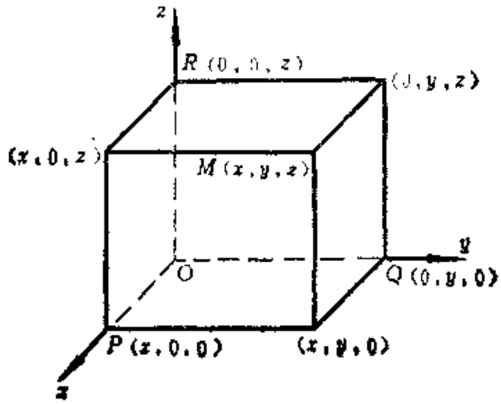

图 8-14

标轴上的坐标，于是点M确定了三个数 x,y,z；反之，若已知三个数 x,y,z，过 x 轴，y 轴和 z 轴上坐标分别为 x,y，z 的点作垂直于它们的平面，这三个平面便唯一确定它们的交点M. 因此三数组(x,y,z)与空间的点一一对应，并称三数组(x,y,z)为空间点M的坐标，记作$M(x,y,z)$.

显然，点M的坐标 x,y,z 依次等于点M到yz 面，zx 面和xy面的距离带上一定的符号；当点M与正半 x 轴在yz面的同侧时，x为正，在异侧时，x 为负；当点M与正半 y 轴在 zx面的同侧时，y 为正，异侧时，y 为负；当点M与正半 z 轴在 xy面的同侧时，z 为正，异侧时，z 为负.

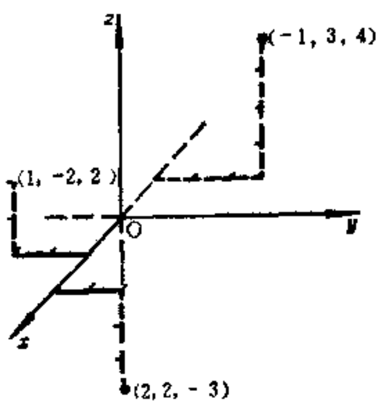

图 8-15

例如图 8-15 中描出了三个点$(2,2,-3)$，$(1,-2,2)$和$(-1,3,4)$.

坐标原点的空间坐标是$(0,0,0)$；x 轴上点的空间坐标是$(x,0,0)$；y 轴上点的空间坐标是$(0,y,0)$；z 轴上点的空间坐标是$(0,0,z)$；xy 面上点的空间坐标是$(x,y,0)$；yz 面上点的空间坐标是$(0,y,z)$；zx 面上点的空间坐标为$(x,0,z)$.

2. 向量的分量

设在空间建立了直角坐标系 $Oxyz$. $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 分别表示从原点引出的 x 轴、y轴和 z 轴方向上的单位向量，叫做空间的**标准基**. 因为它们是不共面的向量，所以每个空间向量皆可按 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分解.

若 $\boldsymbol{a}$ 是任一空间向量，将 $\boldsymbol{a}$ 的起点移到坐标原点，设它的终点M的坐标是(x,y,z). 依照上节所述的方法，将 $\boldsymbol{a}$ 按 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$分解，如图 8-16，有

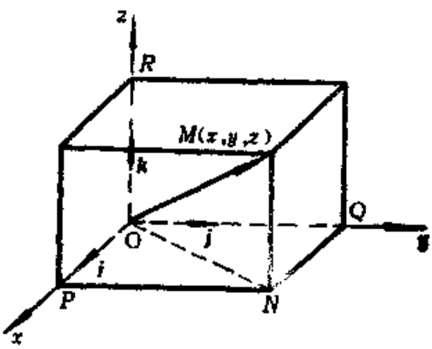

图 8-16

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

数x,y,z 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的**分量**或**坐标**. 当向量的起点在坐标原点的时候，它的分量与它的终点的坐标是一致的. 这是因为每个以原点为起点的向量都唯一确定它的终点的位置. 反之空间每个点P的位置都可用以原点为起点，P 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$确定. 起点在原点的向量叫做它的终点的**位置向量**.

由于向量的分解是唯一的，所以有

定理 1 相等向量的各对应分量均相等；反之亦然.

分量为 x,y,z 的向量

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

可以更简洁的记作

$$\boldsymbol{a}=(x,y,z)\ \text{或}\ \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

特别地

$$\mathbf{0}=(0,0,0),\ \boldsymbol{i}=(1,0,0),\ \boldsymbol{j}=(0,1,0),\ \boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

起点不在原点的向量，它的分量可以用它的两个端点的坐标表示.

定理 2 以 $A(x_1,y_1,z_1)$为起点，$B(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解是

$$\boldsymbol{a}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

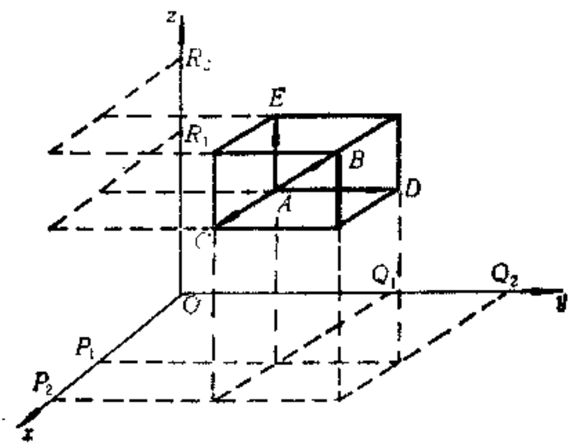

图 8-17

证 如图 8-17，过点 A 和 B 分别作垂直于三个坐标轴的平面，则

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}.$$

又

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=x_2\boldsymbol{i}-x_1\boldsymbol{i}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i},$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{Q_1Q_2}=(y_2-y_1)\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{R_1R_3}=(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

代入 $\boldsymbol{a}$ 的表示式中，即得

$$\boldsymbol{a}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

例 1 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的起点为 $A(2,1,-3)$，试求其终点.

解 设终点 B 的坐标为 (x,y,z)，依照定理2，有

$$x-2=3,\ \ y-1=-4,\ \ z+3=1.$$

于是

$$x=5,\ \ y=-3,\ \ z=-2,$$

即终点 B 的坐标为 $(5,-3,-2)$.

定理 3 设 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

证 如图 8-16，由勾股定理得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{|\overrightarrow{ON}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}$$

$$=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

推论 设 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$ 两点间的距离为 d，则

$$d=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 2 求 $M(3,2,-4)$ 和 $N(0,-2,-1)$ 间的距离.

解 $|MN|=\sqrt{(0-3)^2+(-2-2)^2+(-1+4)^2}$
$=\sqrt{34}.$

定理 4 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$m$ 为常数，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,\ \ y_1+y_2,\ \ z_1+z_2),$$

$$m\boldsymbol{a}=(mx_1,my_1,mz_1).$$

证 由向量的加法法则和数乘向量的乘法法则，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})$$

$$=(x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{i})+(y_1\boldsymbol{j}+y_2\boldsymbol{j})+(z_1\boldsymbol{k}+z_2\boldsymbol{k})$$

$$=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k};$$

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{a} &= m(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}) \\ &= m(x_1\boldsymbol{i})+m(y_1\boldsymbol{j})+m(z_1\boldsymbol{k}) \\ &= (mx_1)\boldsymbol{i}+(my_1)\boldsymbol{j}+(mz_1)\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

推论 二向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 平行的充要条件是它们的对应分量成比例，即

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}.$$

证 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$，于是等式两端的对应分量相等，即

$$x_2=mx_1,\quad y_2=my_1,\quad z_2=mz_1.$$

所以

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}(=m)$$

例 3 已知 $\boldsymbol{a}=(3,-1,-4)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-2,3)$，求 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

解
$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} &= 2(3,-1,-4)-(-2,-2,3) \\ &= [2\times3+2,2\times(-1)+2,2\times(-4)-3] \\ &= (8,0,-11) \end{aligned}$$

例 4 已知 $\boldsymbol{c}=(6,3,2)$，求 $\hat{\boldsymbol{c}}$.

解 因为 $$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{36+9+4}=7,$$

所以 $$\hat{\boldsymbol{c}}=\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7}\right).$$

例 5 在点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的联线上求一点 M，使

$$\frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\overrightarrow{MM_2}|}=\frac{m}{n}\quad 或 \overrightarrow{M_1M}=\frac{m}{n}\overrightarrow{MM_2}.$$

这叫线段的定比分割.

解 如图 8-18，将点用它的位置向量表示，就可以用向量的