

559541

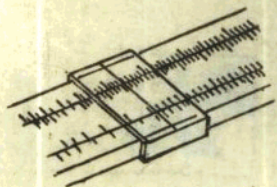
科學圖書大庫

自然科學叢書之一

數 學

(一至五冊合訂本)

湯元吉 主編



徐氏基金會出版

31
3614
F1-5

559541

31
3614
F1-5

科學圖書大庫

自然科學叢書之一

數 學

(一至五冊合訂本)

湯元吉 主編

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人 徐銘信 科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人 林碧鏗 科學圖書編譯委員會編譯委員

版權所有

不許翻印

中華民國六十年七月一日再版



自然科學叢書之一

數 學

(一至五冊合訂本)

本叢書不分售，全套24冊特價400元

主編者 湯元吉 台糖公司董事長

訂為基價218元

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 臺北郵政信箱3261號 電話783686號
發行人 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 林碧鏗 郵政劃撥帳戶第15795號
印刷者 大興圖書製版有限公司 三宜市三和路四段151號 電話979739號

序

居今日而欲致國家於富強之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦為國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久為識者所共喻。

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心繫祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，為邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已為數不貲。前歲之多，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以逐譯刊行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敢承，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋澎、李煥榮、南登岐、孫慶年（物理學總執筆人）、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅哈榛、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鍾恩寵、關德懋（以姓氏筆劃為序）諸君分任逐譯，復承臺灣新生報謝總社長然之、王社長嘯生及顏副總經理伯勤慨允由該社擔任印刷及發行工作，其事遂舉。願以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則為慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自殫獻，得如預期出書，以餉讀者，實為元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日星緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。茲值本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

湯元吉序於臺北

* 該中心為一不以營利為目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事為李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄭乾厚、湯元吉等九人。

編輯要旨

- 一、本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。
- 二、本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別邀請專家逐譯。
- 三、本叢書之供應對象，主要為中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要為主旨。
- 四、原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種教學措施，學生於作成論文後，校方尚需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟為存真起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。
- 五、本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首冊中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專冊，以供讀者檢閱。
- 六、本叢書數學原文，每冊約為六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故為便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印為一冊，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。
- 七、本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，教育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之；其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，尙冀海內專家學者不吝賜教。

- 八·本叢書之逐譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尙祈讀者諒之。
- 九·本叢書原文篇幅浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指教，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認為絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，尤為社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會為促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大眾閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授、研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文學科技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掏誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

數學第一冊目錄

	頁數
不要怕數學	1
切忌死讀	2
研習本書的說明及建議	3
上 冊 數	
走不盡的公路	5
數學符號及四種基本計算法	11
加 法	12
減 法	14
括 弧	20
和數及差數之加減法	20
求未知數	24
下 冊 體	
幾何之基本原理	31
點	32
線	34
面	39
體	39
體之三元	40
位置的意義	42
角，角度	47
內容摘要	54
數學符號	55
希臘字母	56
習題解答	56
雜 題	60
測 驗	60

不要怕數學

許多人對於數學一門，往往害怕而討厭，最好不去碰它。可是同時也知道，不懂數學便找不到職業。數學這一門，乃人人所必需而又迴避不了的一項麻煩的事。假如各位正是這種人，討厭數學而又必需學它，那就正好，本書正好合用。各位很快便可明瞭，數學毫不可怕，祇要循軌前進，不久各位便願意學它，而且結成朋友一般會喜歡它。學習的時候，自然還得自己去努力，不努力是不會進步的。本書將協助各位去解決困難，指點方向，提醒並幫助各位，很快各位便不會再怕它了。

本書不以有數學天才或有數學基礎的人為對象，以便讀者得以溫故而知新。更由基本算術開始，因為算術也是數學的一部份。

或有人問：數學的術語，是不是很難？或者你曾經翻閱過數學課本，看見過什麼專門名詞如同：被乘數，商數及其他等等，以為非懂專門術語不可，這也是一種錯覺。例如某一商人，素無駕駛汽車經驗，一旦進入汽車修理工廠，便聽見一些專門名詞如同：聯接器，差速器等等，一點也不懂。可是工廠中任何學徒，却都知道。數學的術語，也是一樣，各位不久便熟悉會用的。

數學中有時會用到外國字母，那也不必害怕或懷疑。我可以舉例說明，它們一點也不難，任何十二歲的兒童，都一教便會。茲舉例如下：

一乘一等於一，普通乘號是以 \times 代表。有時也用一點 \cdot 代表 \times ，這一點放在乘數和被乘數當中，依然讀如乘：

$$3 \times 4 = 4 \times 3; \quad 5 \times 8 = 8 \times 5; \quad 9 \times 7 =$$

各位看了上面第一式和第二式，一定可以知道第三式等於什麼。由於上面三式，即可了解乘法的通例，乘數和被乘數可以隨便換動，答數總是一樣的。無論 3×4 或是 4×3 ，答數總是相等的，我們用 $(=)$ 代替等號。兩數相乘所得，叫做積數。積數是由兩個因子相乘而得的。例如 $3 \times 4 = 12$ ， $4 \times 3 = 12$ 。3和4都是因子，12是積（或稱乘積）。因此，我們得到下面的定律：

不論因子排列次序的先後，其乘積相同。

我們也可以說：第一因子和第二因子相乘，或第二因子和第一因子相乘，其積相同。如以 p 代表第一因子， g 代表第二因子，我們可以說：

$$p \cdot g = g \cdot p$$

我們只要把這一公式和上面用文字說明的定律比較一下，便知公式簡便得多，這是數學的好處。

還有一點須加說明的，即在任何一個公式裏，任何一個字母祇能代表一個一定的數字。例如 p 代表 3，即令搬移到公式右邊去了，仍然代表 3。我們又獲得了一條定律如下：

在任何一個公式中，任何字母，
祇能代表一個數字。

除了 p, g 之外，其他字母，一樣可以採用。例如： $a \times b = b \times a$ ， a 不一定代表 1， b 也不一定代表 2，它們可以代表任何一個數字，當然也可以代表 1 或 2。

4 切忌死讀

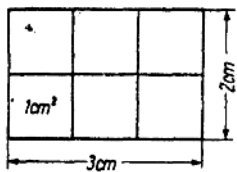
我奉勸各位讀者，要學數學，並不需要死讀和熟記。數學並不盡是一些定律和公式。死記和半懂，為學數學之大忌。許多學生，死記公式，不會思想和活用，那決學不好。本書所着重的，在訓練各位會用：

數學的思考。

讀者會問：當真可以不用定律和公式，就能學會數學嗎？當然不是如此。祇要你細心研究，確實了解之後，許多公式，自然而然，便會深入腦筋，變成各位的知識，使各位能加以靈活運用。這樣，用不着強記，各位也忘記不了。即令忘記了公式，但憑各

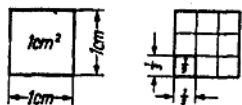
位的了解和智慧，自己也會想得出來。例如：試求 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ 的積數。在死記公式的人看來，或以為分母相同，分子相加即行，一口說出積數是 $\frac{2}{3}$ 。殊不知這是錯了。

各位如果留心學習本書，答案一定兩樣。這是兩數相乘。例如： $2 \times 3 = 6$ ，各位可以想到一個長方形，一邊是 2cm ($\text{cm} = \text{厘米}$) 一邊是 3cm 。兩數相乘，其積應為 $2 \times 3 = 6\text{qcm}$ ($\text{qcm} = \text{平方厘米}$)。一看第[4a]圖便可明瞭。現



4 a

在回到本題 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ 上去。請各位試畫一個圖，每邊是 1cm ，各位便了解第[4b]圖，乃是一塊面積為 1cm^2 或一平方厘米的正方形。 ($\text{cm}^2 = \text{qcm} = \text{平方厘米}$)。因此在 $\frac{1}{3}$ 中的 $\frac{1}{3}$ ，便



4 b

4 c

等於[4c]圖所示的 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ ，也就是說等于[4c]圖左下角那樣大小。

各位或將提出疑問，似此構想與畫圖，考試的時間那會够用？不。各位經過如此訓練之後，很快就會有把握，用最大的速度去想像；畫圖也不必過於端正，在幾秒鐘之內，隨便畫個略圖也就够了。開始時也許要多花一點時間，可是值得的。與其快而錯，反不如慢而對來得更好。

本書的教授法，便是求各位懂得所以然，而不是要各位強記或死記。

研習本書的說明及建議

5

本書每一頁的左右旁，印有較粗的亞拉伯字母 1234...，表示第幾節。在以後複習或參考的時候，常常註明：[1; 5] 等等

，那便代表第一冊第五節。書中的插圖，都編有號碼和 a, b, c 等字樣，號碼表示節數， abc 表示圖號。例如：11a 表示第十一節第一圖，11b 表示第十一節第二圖。

如在同一冊中，提到某節第幾圖，便在方括弧內寫明。例如〔11b〕乃代表本冊第十一節第二圖。如果提到另一冊某節某圖，那便在前面將冊名一併說明。例如〔1；4c〕乃代表第一冊第四節第三圖。

每一冊中，多半分成兩部份，上一半講數字，下一半講空間和立體。也就是上一半講算術和代數，下一半講幾何。在學校裡的教授法，是分開的，似乎越學越難。本書用的則是混合教授法，同時並進，便等於同時學了兩樣。

請各位在每天腦筋清醒的時候，研習本書。不妨每一句多讀幾遍，直到完全了解為止。每一重要的定律，不妨大聲反復背誦。祇求意義不錯，不求照句死記！每一幅圖，要自己重畫一遍。即使各位在旁的地方，已經學過數學，但對本書比較容易的章節，切勿跳過。因為本書編寫的體裁不同，其中一字一句，都是有其重要性的。

讀者應隨時注意本書提到前文已經討論過的那些資料。用小號字體排印的章節，可以暫時撤去不必複習，亦不致影響到整體的貫通。但這些部份，假如下面各冊再提到時，最好能詳加複習多次。好多節末尾，常附有許多習題，都不難自行解答。而每冊末端，都附有那些習題的答案，以便讀者自行核對。若有錯誤，最好再複習該節一次，然後再做。須知俗語說得好：錯誤乃人之常情。假如本書內容有誤或印刷有錯誤之處，歡迎讀者不吝指教。

做習題時，最好用兩本無格練習簿，一本備計算用，另一本備幾何用。這兩種練習簿亦可作為繪小圖之用。較大的圖，最好另畫在繪圖紙上，並須置備一塊繪圖板，左邊必須平直。此外還需要有一付繪圖儀，一付三角板一把丁字尺。

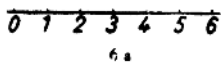
讀完本節，敬祝各位研習數學這一門科學，達到成功之路！

上 冊 數

走不盡的公路

由某城市中心，有一條道路指向東方。在市中心有一塊公路里程碑，上面刻了個 0 字。向東走出去一公里，又看見第二塊里程碑，上面刻了個 1 字；再走一公里，里程碑上刻了個 2 字。學數學的人，一定存了個幻想，這條路是永遠走不盡的。各位可能提出異議，認為天下沒有走不盡的道路的。各位的抗議是對的，可是要知道，數學本是一個理想的世界，學數學必須拋棄現實。可是數學偏偏又能應用在工業的世界裡。以後各位可以慢慢地學到那些。於此又必須提醒各位讀者，假如各位希望變成一個精明的數學家，必須特別專心研習重點，不要七想八想那些不相干的問題。

我們設想將這一條道路縮小，並畫成一條直線。由於我們祇研究里程，所以路寬可以不去管它。爲了簡明關係，路也拉成一條直線。出發點作零點，每一公里加一標記，而且距離相等 $[6a]$ 。在每一格上，註明 $0, 1, 2, \dots$ 。由於這一直線上的標記，全爲數字，故此一直線，定名爲數字直線。



由零點算起

在我們這一條數字直線上，最左一個數字是零。零點代表市中心里程碑的起點。零爲數學上很重要的一個數字。零以下沒有了，零數是起點。

$[6a]$ 又可以當作一根尺，尺上刻了厘米，分米，又可以拿來丈量長短。（工程上畫圖所用的比例尺，並非普通所用的量尺，以後再有說明。）市面上許多量尺的起點，往往並不註上零字

，事實上却是零點或起點。

現在我們要計算走了多少公里了，當然從市中心零點算起。在許多場合，我們必須從零點計算的。例如賽跑，槍聲一響，大家從零點開始。而計時的馬錶，同樣也得由零點開始。因此我們要了解：

在數學中，零點代表沒有，代表尚未，
代表開始。

所以零並非單純代表沒有，也可以代表競賽的開始。各位讀者，讓我們以今天的零點，作我們大家研習數學競賽的開始吧！

8 各位能數得多少

各位在那公路上能走多遠？換句話說，各位能數得多少？這並非對小學初級生的問題。我可以問得再仔細一點：一二三四數下去，要到何時為止？撇去冗長計算和浪費時間不說，即令各位有時間，有興趣，有記性，各位是永遠算不盡的。各位也可以回答說：數下去是沒有止境的。

除了千數萬數億數兆數，再下去還有說不清的某數某數，我們可以簡單說：下一個數一定是前一個數的加一，或者說，每一數必然比前數多了個一。總而言之，在數學上我們可以說：

數字是數不盡的，或者說，數字是無窮的。

此處所指無窮或者不盡，我們也許不懂。反過來，我們給無窮下了一個定義：永遠數下去多一。

現在各位知道無窮數了。根據無窮數的定義，各位也可以用圖或數字表達出來。在上面第〔3〕節我們學過，我們可以用一個字母，代表任何一個數字。我們現在用 n 。

23 加一個，我們知道是 $(23+1)$ ，215 以上一定是 $(215+1)$ 。所以用 $(n+1)$ 既可以代表 $(23+1)$ ，也可以代表 $(215+1)$ ，這 $(n+1)$ 便可以通用了。比 $(n+1)$ 再多一個的數字，便是

$(n+2) \circ 22 = 23 - 1$, 22 是 23 前面的一個數字。假如 n 代表 23, 則前面的一個數字, 便是 $(n-1)$, 以此類推。

在 $[8a]$ 圖中一目了然

。當中有斷線, 代表當中切

去了一段。 n 代表某一數,

隨便說是 275 或者 1056, 甚至任何一數都可。它前面一數, 一定是 $n-1$, 再前面一個是 $n-2$ 。它後面一個, 一定是 $n+1$, 後面兩個一定是 $n+2$ 。

我們用箭頭表示數字一直數下去是無窮無盡的, 同時箭頭前面還有一個好似橫寫的 8 字, 這是數學上專用的一個符號, 代表無窮數。一看見 ∞ , 便知道是說不完的無窮數。

習題:

9

在適當的地點, 我們暫停研討, 先做些練習題也好。上面第 [5] 節中已經說過。(此次只擬請各位做很少幾個習題, 以後將越來越多。)

1) 由 0, 1, 2, ... 數起, 到了 8 以後, 應為何數? (注意: 答數不用 9, 須用另一方式代表。)

2) 在數字行列中, p 代表某一數。問 p 前一數為何數, 後一數又為何數?

3) 問 p 數前五數及後五數各為何數?

4) 問 8 之倍數為何數? (不用 16 表示, 須用另一方式表示之)。

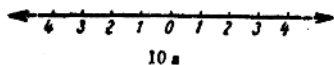
5) p 之倍數為何數?

再談走不盡的公路

10

由市中心除了向東的路以外, 另有一條向西的路。這兩條路同一起點, 而且都豎立了一塊塊的里程碑 1, 2, 3...。雙方均用箭頭, 表示路走不完, 可是

方向是一東一西相反的, 這應該有一個區別, 好比東行四公里和



西行四公里，怎樣去劃分和計算。因為這裡兩路是正東正西的，故可用逆向去解決它。這方法也適用於正南正北，或者左右對向，而不適用於其他的，不在一條數字直線上的兩條路，如〔10a〕圖。

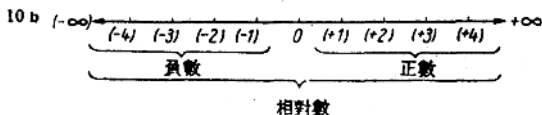
我們在計數物羣（如公路里程碑）數學上，逢有逆向，即一正一反的地方，必須加以區別，這對以後研究數學，有極大意義。

數學家對於兩個逆向的計算，係用正號和負號來區分。

孰是正號，誰是負號，可以隨意選定。假如各位選定東向為正，則西向一定是負。選擇時多半以向着目標為正，背着目標為負。例如造屋工作為正，拆屋工作為負。

〔10a〕圖中，我們選定東向為正。在0點以東的數字前，一律加以正號(+)。在零點以西的數字，則一律加以負號(-)，讀如正負。這是數字前面的符號，例如+4讀如正四，-4讀如負四。祇有0才沒有正負符號。(何故?)+-在此為正負，過去有加減符號亦為+-，注意它們的符號雖然相同，可是讀法不同，意義也不同。這是非常重要的！初學時為了避免混淆起見，我們暫時將正負符號的數字，外面加一道括弧()，例如(+4)為正四，(-4)為負四。

現在我們可以將〔10a〕的數字直線，利用符號，使其完整了，如〔10b〕圖：

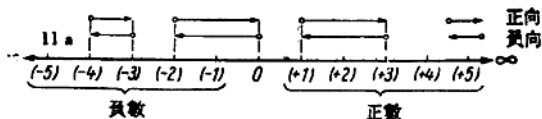


〔10b〕圖中，0點以東的數字，全加上正號，以西的數字，全加上負號。正數和負數，都是相對數。看便圖明白，它們是分向東西或正負兩個不同的方向的。

註：在第〔3〕節中，我們知道一個字母，可以用來代替任何一個數字

現在應該補充一句，這字母可以代表一個正數或負數。所以一個字母，可以代表任何一個相對數，而用不着加上正號或負號。不過也例有外。在需要區別正 a 和負 a 時，也須加上正負符號。以下還要說到。假如我們祇要絕對數值，而不計較它的正負，則無需正負符號；例如 $(+4)$ 和 (-4) 的絕對值，同樣都是 4。

現在我們回到談公路的第 [10b] 圖。由 0 點向右，數字都是正的，我們叫它正向。同樣，向左都是負數，我們叫它負向。在任何一個方向之中，由任何一點或里程碑，我們又可以由左向右，或由右向左行走。例如由 (-4) 到 (-3) 或由 (-2) 到 0，雖然都是在負向區內，可是走的仍是正向。祇要是由左向右走，便都是正向。反之，祇要是由右往左，無論是由 $(+4)$ 到 $(+2)$ 或由 $(+5)$ 到 0 乃至到 (-2) ，都是負向。參閱 [11a] 圖。



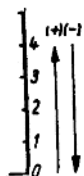
由上圖我們必須嚴格區分：

- 正數及負數；由 0 向右都是正數，向左都是負數。
- 正向及負向；不論正數和負數，向右走的都是正向，向左走的都是負向。[11a] 圖中，係用箭頭表明。

除了左右之外，我們再舉上下一例。

電梯中上下

住宅中的電梯，多半由平地開始。我們叫出發點為 0。電梯裡面也是用 0 點表示到了平地。乘客看到 0 點的燈光，便知道已經落地了。假如各位要上一樓，只要看見 1 字的燈光亮了，便是到了一樓。[11b] 圖，是電梯上的簡化圖。



電梯向上開動，我們叫它為正向。於是向下開動，便是負向。電梯已降落到了平地，0 燈發亮，電梯再開