

固 体 力 学

复旦大学数学系 编著

上海科学技术出版社

固 体 力 学

(試 用 本)

复旦大学数学系 編著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书系复旦大学数学系力学专业革新教材之一，内容包括材料力学、弹性理論、塑性理論等。本书可作綜合大学力学专业固体力学課程的教材，讲授 98 学时，亦可作高等院校有关专业的参考书。

固 体 力 学

(試 用 本)

复旦大学数学系 編著

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

上海市印刷三厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 11 16/32 字数 274,000

1960 年 9 月第 1 版 1961 年 3 月第 2 次印刷

印数 1,001—4,000

统一书号: 13119·392

定 价: (十) 1.30 元

編輯說明

我們受到全國持續躍進的大好形勢的鼓舞和推動，積極響應了黨的號召，在兩年來教育大革命已經取得偉大成績的基礎上，掀起了一个聲勢浩大的教學改革的群眾運動。通過這個運動，我們揭露了現在教學體系、教學內容和教學方法上陳舊落後的狀況，抓住訂方案、編大綱、寫教材、搞試驗等重要環節，試圖建立一套以馬克思列寧主義、毛澤東思想為指導的，反映現代科學發展水平的，理論聯繫實際的新的教學體系和內容，以及與之相適應的教學方法，使培養人才的工作更好地貫徹黨的社會主義建設總路綫的精神。

作為這種探索和嘗試，我們對 1958 年新建的力學專業，採取師生結合的方法，編出了一套可供綜合大學力學專業試用的力學基礎課程教材，包括：流體力學、固體力學、一般力學、振動理論。其中一般力學是和數學專業合用的，故列入數學專業革新教材。

我們力圖使這套教材能具有以下几个特點：

一、在選材上力圖體現為社會主義建設服務和反映現代科學發展水平的要求，因此增加了與當前生產實際有密切關係的內容，並介紹了現代科學的一些新發展，而對原有的內容在不影響基本理論的前提下作了精簡和壓縮。

二、在處理上，為了加強統一性，我們把原來計劃中的六門課程合併為三門，這樣就可以使原來關係密切的課程，如材料力學與彈、塑性力學，流體力學與氣體動力學，理論力學與振動理論相輔相成地組成一個整體，同時也便於安排一些新內容。在編寫過程

中我們還注意到力學課程與數學課程的統一安排。

三、在闡述上我們努力貫徹實踐——理論——實踐的原則。

徹底實現教學改革，建立起一套符合多快好省方針的教材是一個艱巨的任務，需要一個較長的時間來摸索。這一次編寫的教材只是一個開始。由於編寫教材的同志原來都是學數學的，既受到思想水平和科學水平的限制，又缺乏較充分的實踐經驗，因此不論在處理方法上或者是內容的科學性上，特別是在理論聯繫實際方面，都會有不少缺點與錯誤，懇切地希望同志們批評和指正。

同濟大學、交通大學、上海力學研究所和本校物理系，在這次編寫教材中給予我們很大幫助，上海科學技術出版社與中華書局上海印刷廠對這套教材的迅速出版，給了極大的支持，我們在這裡表示衷心的感謝。

復旦大學數學系

1960年5月

序

我国工农业生产和科学技术的飞跃发展，对于力学基础课程如何更好地体现多快好省的方针，更好地为当前社会主义建设服务，提出了更高的要求。虽然我系的力学专业是1958年刚成立的，业务知识和教学经验都很缺乏，但是为了适应这个形势，我们在党的领导下，在毛泽东思想指导下，大搞教学革命和教材建设，编写了这本固体力学的教材。

固体力学是力学专业的主要基础课之一。要求通过本课程的学习，使学生不但在固体力学方面受到充分的基础训练，而且具有一定的归纳和解决问题的能力。根据这个要求，我们在这本教材中作了下面的尝试：

一、把过去的材料力学、弹性理论、塑性理论等三门课程统一处理，合成一门，并在不影响基本理论的前提下删去了一部分古典材料力学的内容。我们力求把经典理论更好地综合概括，提高观点，避免不必要的重复，腾出较多的学时来讲述生产实践中有广泛应用的和现代的内容。

二、在内容上力求贯彻理论联系实际的原则。根据我国当前工农业建设的需要，我们在教材中介绍了具有广泛应用意义的水坝问题、板壳理论和变分法等。我们希望通过这些内容的介绍，对提高同学把固体力学基本理论应用于生产实际的能力，有所帮助。

由于我们思想水平和业务水平的限制，特别是对生产实际接触不多，教学的经验也很缺乏，所以在这本教材中一定还存在着很

多缺点。我們誠懇地希望广大讀者提出寶貴的意見，大家共同努力，不断提高教材的质量。

复旦大学力学专业固体力学教材編写小組

1960年5月

目 录

序

緒論	1
§ 1 研究对象与发展概况	1
§ 2 固体的力学性质	8
§ 3 基本假设	11
第一章 应变分析	13
§ 1 位移与应变	13
§ 2 一点附近的应变分析	18
§ 3 体积应变	26
§ 4 主应变和主方向	28
§ 5 連續性方程	30
§ 6 曲綫坐标	31
第二章 应力分析	36
§ 1 一点的应力状态	36
§ 2 平衡方程	38
§ 3 边界条件	41
§ 4 主应力	45
第三章 应力与应变的关系——物理方程	48
§ 1 彈性体的物理方程——广义胡克定律	48
§ 2 彈性力在物体内所作的功	49
§ 3 各向同性彈性体的胡克定律	51
§ 4 彈性系数之間的关系	55

§ 5 塑性状态方程	58
第四章 問題的建立	80
§ 1 方程的綜合	80
§ 2 基本解法	82
§ 3 彈性波	88
§ 4 非綫性彈性理論的概述	93
§ 5 解的唯一性	95
§ 6 圣維南原理	98
§ 7 变分原理	99
第五章 柱体的扭轉与弯曲	109
§ 1 在平面假設下圓柱体的扭轉	109
§ 2 任意柱体的扭轉	111
§ 3 扭轉函数	114
§ 4 共轭函数	115
§ 5 应力函数	116
§ 6 圣維南的解法	119
§ 7 共形映照法	122
§ 8 薄膜比拟	124
§ 9 彈塑性扭轉	128
§ 10 梁的支承方式、梁的种类及三弯矩方程	132
§ 11 在平面假設下柱体的弯曲	140
§ 12 悬臂梁的弯曲应力和弯曲中心	144
§ 13 圓形截面的悬梁	150
§ 14 梁的彈-塑性弯曲	159
§ 15 压杆的稳定性	161
第六章 平面問題	167
§ 1 平面問題的基本方程	168

§ 2 平面問題的多項式解法	173
§ 3 悬臂梁的弯曲	177
§ 4 簡支梁受均匀載荷时的弯曲問題	182
§ 5 三角形截面的坝	184
§ 6 矩形截面的坝	188
§ 7 受任意載荷的梁的級数解法	189
§ 8 利用极坐标解平面問題	194
§ 9 圓对称的平面問題	198
§ 10 在頂点受載荷的楔	201
§ 11 集中力作用在半无限平面体	206
§ 12 楔受別种載荷的情形	210
§ 13 关于梯形截面坝	212
§ 14 平面問題中的接触問題	216
§ 15 塑性理論的平面問題	221
§ 16 用复变函数解平面問題	224
第七章 薄板理論	233
§ 1 薄板的大撓度理論	233
§ 2 薄板的小撓度理論	246
§ 3 圓形薄板	260
§ 4 平板的彈性穩定	265
§ 5 各向异性板	268
§ 6 正交各向异性的固定边矩形板	272
第八章 曲面論基本知識介紹	283
§ 1 曲面、曲面的切面和法綫	283
§ 2 曲面的第一基本形式	286
§ 3 曲面的第二基本形式	291
§ 4 法曲率、測地曲率和測地綫	293

§ 5 主曲率、总曲率、平均曲率·····	298
§ 6 曲率綫、欧拉公式、罗德里克公式·····	300
§ 7 曲面基本定理·····	302
第九章 薄壳理論·····	311
§ 1 基本概念与假定·····	311
§ 2 壳体的位移与变形·····	312
§ 3 中面变形的連續性方程·····	321
§ 4 內力和內矩、壳体的平衡方程式·····	322
§ 5 內力、內矩和中面变形之間的关系式——物理方程·····	329
§ 6 壳体的边界条件·····	332
§ 7 軸对称載荷的閉口圆柱形薄壳·····	333
§ 8 无矩理論的基本方程及边界条件·····	337
§ 9 旋轉壳体的基本理論·····	339
§ 10 圓頂壳体 ·····	342
§ 11 等强度壳体 ·····	347
§ 12 “风型”載荷 ·····	350
§ 13 柱形屋盖 ·····	354

緒 論

§1 研究对象与发展概况

物体一般分为固体、液体和气体三种。各种物体在外力作用下有各种不同的特性：气体不能承受剪力，同时，受压力后便会压缩；液体也不能承受剪力，但在压力作用下压缩很小；固体则可承受剪力，也可承受压力，只发生很小的压缩。但上述固体、液体和气体的不同特性是从平衡观点来看的，在运动的情况下就不同了。在低速运动时，气体和液体的特性差别不大。在外力作用下发生缓慢的蠕变时，液体和固体的特性差别也不大。

固体力学所研究的是力对固态物体的作用，以及这时所发生的应力和应变。它是一门与生产实际密切联系的学科。它的基本理论是从生产实践中概括总结出来的，并且都是经实践检验过的，同时它所解决的问题都是由实践活动所提供的。例如在建筑、造船、机械制造等等工程中，为了达到既经久耐用又节约材料的要求，就必须研究物体的强度、刚度和稳定性，也就是必须研究物体在工作情况下的应力状态，这正是固体力学的研究对象和任务。总之，固体力学的理论来源于实践，同时，它又反过来指导实践。

固体力学是由于生产发展的需要而建立起来的，它随着生产力的提高而发展。还在古代，人们就会建造坚固的建筑物，制造简单的机械和工具。可是关于这些建筑物和机械强度的计算，没有留下任何资料。只是到中世纪才有了记载，当时的学者们企图理解建筑物和机器的作用。在十七和十八世纪期间，固体力

學有了巨大的發展。1660年胡克(Hooke)建立了拉伸情況下載荷與形變成正比的定律。十八世紀中葉，俄國學者羅蒙諾索夫(Ломоносов)提出了物質微粒構造的理論，對彈性體的物理本質作了進一步的闡明。

十八世紀末的工業革命促成了工廠的發展與機器的使用，從而提出了有關機器和建築材料強度的一些實際問題。這些問題不但數目日益增多，而且性質越來越多樣化。研究這些問題使人們更深刻地掌握了彈性體的本質，並促進對彈性理論進一步的研究，因而十九世紀彈性力學有着迅速的發展，理論上的成果也被充分地用到具體的工程問題上。

生產實踐的發展，對固體力學不斷地提出新的要求。飛行、航海、大型工程等都需要解決很多新的複雜的技術問題，其中有相當一部分是屬於固體力學問題的，在二十世紀中進行了許多新的問題的研究，例如非線性彈性力學，薄殼理論，彈性穩定性等等。此外，人們已經不滿足於彈性系統的研究，在二十世紀二十年代起塑性理論開始蓬勃發展起來了，在高溫情況下研究固體的性能也成為最重要的問題之一。在社會主義國家中，由於人民群眾覺悟的提高，理論密切聯繫生產實踐，固體力學的發展是很快的，蘇聯的科學技術工作者，在這方面有很多的貢獻。

在古代，我國的勞動人民建造了許多堅固的、具有巧妙結構的建築物，這證明我國在古代固體力學已經有了很高的水平。解放以後，我國生產建設事業的高速度發展，為力學的發展开辟了廣闊的道路。特別是1958年大躍進以來，破除迷信，解放思想，結合生產實際開展了群眾性的科學研究活動，我們在力學方面，包括固體力學在內，取得很大成績，正在迅速地改變着因帝國主義、封建主義和官僚資本主義的壓迫而造成的落后面貌。我們相信：在共產黨的領導下，在毛澤東思想的光輝照耀下，完全可

以相信,在不太长的时间内,我国的力学水平一定能够达到世界的高峰。

§ 2 固体的力学性质

固体在外力作用下,产生伸长(或压缩)的试验,叫做简单拉伸(或压缩)试验。这种试验是用标准试件来进行的(图 0-1)。设试件两定点间的长度为 L_0 , 其截面积为 F_0 , 加上拉力 P 后, L_0 伸长了 ΔL ; 称 P/F_0 为拉伸应力 σ , 称 $\Delta L/L_0$ 为拉伸应变 ε , 我们有

$$\sigma = P/F_0, \quad \varepsilon = \Delta L/L_0.$$



图 0-1

某一种材料的拉伸应力和拉伸应变的比,称为这种材料的杨氏(Young)模量 E , 即

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{PL_0}{F_0\Delta L},$$

E 表示该材料的特性。拉伸(压缩)试验的力学性质常常用试验过程中的应力和应变的关系曲线来表示, 这种曲线称为拉伸(压缩)图。韧性固体的拉伸图如图 0-2 所示。

从图中看出当 $\sigma < \sigma_a$ 时, σ 和 ε 之间保持线性关系。 σ_a 称为比例极限。

当 $\sigma_a > \sigma > \sigma_a$ 时, σ 与 ε 之间已不保持线性关系。但是如果将外力去掉, 则 σ 还是沿原来的曲线返回去, 从 O 到 D 这个阶段称

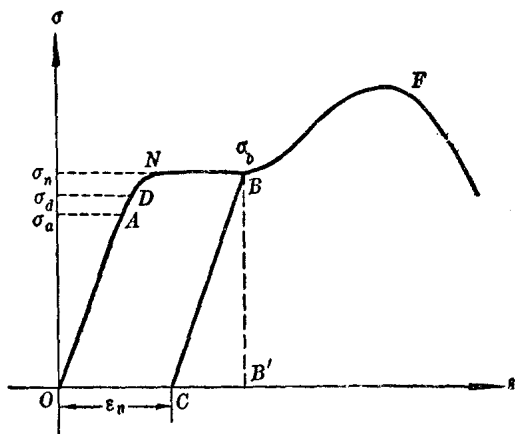


图 0-2

为弹性阶段, σ_d 称为弹性极限。A, D 两点很近, 在实用上常认为它们是相合的。当 $\sigma > \sigma_d$ 时, 材料开始失去弹性, 就是说当把外力去掉后, 试件不能恢复到原来形状。当 $\sigma > \sigma_n$ 时, σ 几乎不增加, 而 ε 不断增加, 这一阶段 NB 通常称为屈服阶段, σ_n 称为屈服极限。

当 ε 继续增大时, σ 增加较显著, 这一段就称为强化阶段。此后当 ε 继续增加, 而 σ 减小, 最后试件断裂。已经说过, 当应力加载到 $\sigma = \sigma_b > \sigma_d$ 时, 如果把 σ 减少, 下降曲线不是沿原来曲线 $\widehat{OAB}$ 返回去, 而是沿着与 OA 线几乎相平行的直线 BC 下降, 当 $\sigma = 0$ 时 ε 不为零而有 $\varepsilon = \varepsilon_n$, ε_n 即称为残余应变。如果再加载, 则还沿

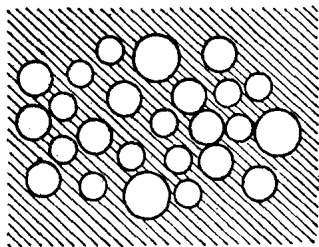


图 0-3

CB 线上升, 并且在比 B 点高一点的地方发生转折, 就是弹性极限比前升高。简单拉伸应力应变曲线所具有的这种性质, 可以用金属的微观结构变形来解释。根据微观分析, 金属是由很多晶粒组成, 晶粒之间由晶界物质联结着, 如图 0-3 所示。

若晶界联結力較强, 在外力作用下物体内部产生的应力小于晶界联結力时, 則只有每个晶粒体积增大(或者縮小), 外力取去后, 晶粒就恢复原状, 这就是彈性阶段。当应力大于晶界联結力时, 則晶粒之間要发生滑移, 这就出現了屈服阶段。晶粒滑到一个新的位置后, 就不能再滑动了, 繼續增加外力, 晶粒体积增大, 就出現了强化阶段。这时如果我們把外力拿去, 因为晶粒不能滑动到原处, 只能晶粒本身体积收縮, 故最后还有残余变形存在。彈性阶段以后的这些阶段統称为塑性阶段。

固体在伸长(或压縮)时不仅长度发生变化, 同时試件截面也要变形。当长度伸长时, 截面縮小; 长度縮短时, 截面扩大。如果設横向的应变为 ε_x , 纵向应变为 ε_y , 在簡單拉伸(或压縮)的情况下, 有

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\nu,$$

其中 ν 称为泊松比, ν 一般在 $1/3$ 和 $1/4$ 之間。

下面进一步分析簡單拉伸的塑性現象。上面已經討論过, 在 $\sigma > \sigma_d$ 时, 即达到图 0-4 上某点 B , 此时当外力全部去掉后, B 点沿着与 OA 綫几乎平行的直綫 BC 下降, 綫段 OC 表示残余变形。从图中可以看到, 同一个应力可以对应着几个应变数值, 这要看它是第一次加载荷, 或是减载荷, 或是重新加载荷。若試件是第一次重复加载荷, 則图形沿着直綫 BC 上升, 直綫 BC 称为第一次重复承受载荷的彈性区域, 而应力 σ_b 大于最初的彈性极限 σ_d 。这种提高彈性极限的現象称为硬化現象。繼續增加载荷超过 B 点时, 图形又重合于連續拉伸情形的曲綫 AF , 因为 B 点是图形上的任意点, 所以可以认为 B 点的应变 ε 包含两部分, 即彈性应变 $\varepsilon_a = \frac{\sigma}{E}$ 及塑性应变 ε_n , 而 $\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_n$, 若 $\sigma < \sigma_d$ 时, 則 $\varepsilon_n = 0$ 。

若在完全解除载荷后再加上相反方向的载荷(图 0-4), 即从

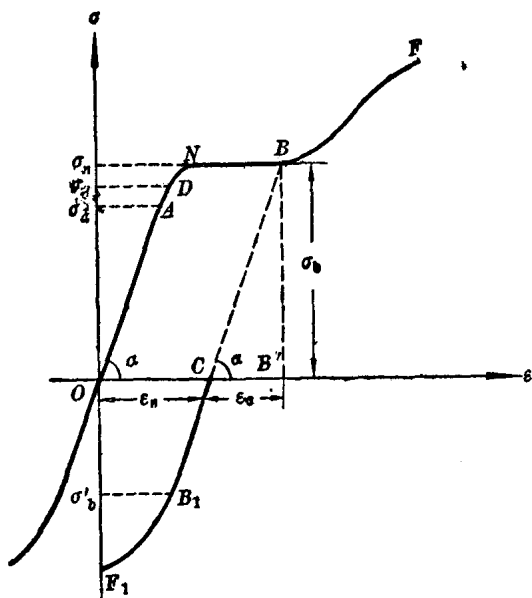


图 0-4

拉伸轉为压缩, 則图形最初是沿着直綫 BC 的延長綫 B_1B 进行, 当达到压应力 σ'_b 后, 試件将发生第二次塑性变形。以后的过程是順着曲綫 B_1F_1 的。新的彈性极限 B_1 点对应着应力 σ'_b , σ'_b 就絕對值来說小于 σ_b , 也常常小于由于第一次載荷得到的彈性极限 σ_a 。因此若对已經“硬化”的試件加相反方向的載荷, 可以看出彈性极限降低, 这称为巴烏辛盖尔 (Bauschinger) 效应。

在以后的說明中, 我們假定沒有发生与巴烏辛盖尔效应有关的塑性变形。

現在来看時間对于变形的影响。作試件的拉伸試驗, 在达到 M 点后保持不变[图 0-5(a)], 这时应力会自动下降。最初下降較快, 以后越来越慢而漸近于某一应力 σ'_M ($\sigma'_M < \sigma_M$)。

在应变不变的条件下, 随着時間而自动降低应力的过程, 称