电磁场理论

下册

杨 弃 疾

高等教育出版社

电 磁 场 理 论

下 册

杨 弃 疾

高 等 教 育 出 版 社

(京)112号

电磁场理论

下　册

杨　奔　疾

*

高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
农业出版社印刷厂印装
*
开本 787×1092　1/16　印张 27　字数 610 000
1995年6月第1版　1995年6月第1次印刷
印数 0001—1 108
ISBN 7-04-004346-7/TM·222
定价 29.05 元

为学若登山好景无边峰
峦之外更新天五洲四海收
眼底心胸豁然 鸟道行艰
难挽葛攀巖险阻岂常言
志坚大话平但务安急还到
峰巅

浪淘沙

杨奔庭

目　录

第六章　几何光学近似

§1 射　　线

在连续渐变介质中，如果空间可以分割为一组管状空间，每管的横截面线度处处都在几个波长以上，在每一管状空间内，电磁场可以近似表示为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})e^{ik_0\psi(\boldsymbol{r})}\qquad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})e^{ik_0\psi(\boldsymbol{r})}$$

其中 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{H}_0$ 和 ψ 在每管的横截面内变动很少，而沿着管轴，$\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 的方向和大小可能渐变，但相位则不变。这样，每一管状空间中的场就如同沿管轴传播的平面波，它的传播方向决定于电容率的分布和管的起始截面上的传播方向(投射方向)。每一这样的波称为一条**射线**。如果介质的间断面或介质与理想导体的界面是相当平滑的，射线在这种界面上反射和折射后，仍然可以是射线。

如果电磁波的频率是无限大($k_0=\infty$)，任何有限体积的线度相对于波长都是无限大，任何圆滑界面上的有限面积的线度相对于波长也都是无限大。这时，就可以把问题看作均匀介质中的均匀平面波在平面上的反射与折射。所以把电磁波分解为射线族，乃是以频率无限增加时的渐近结果作为电磁场的近似式。用射线来描述场的分布是一种渐近方法，其近似程度决定于在每一个波长的长度上电容率的变动大小和界面的曲率大小。所以射线法的可用性不仅决定于介质和界面的参数的分布，也取决于波的频率。例如，在多模光纤芯子的横截面上电容率是渐变的，而且它的直径约为 5×10^{-5}—10^{-4} m 的量级，对于可见光(最长的波长为 7.6×10^{-7} m)，大致可以说还能用射线法来分析其特性，但对于芯子直径只有 $10^{-6}\sim10^{-5}$ m 量级的单模光纤，就必须当作介质波导来分析了。

射线问题需要研究的首先是射线的描述。即：在电容率的分布和射线的入射方向已知时，求射线轴的轨迹，以及已知界面的形状和投射线的几何参数时，求反射和折射线轴的轨迹。在求得射线轨迹后，射线任何两个横截面之间的相位差显然等于折射率 n 沿射线轨迹的积分与 k_0 之积。因此，求射线轨迹与求解函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 可以说是一件事。

另一个问题就是求解函数 $\boldsymbol{E}_0$。包括它的方向和它的大小。为此，需先求得波面的几何参数。

可见研究射线的性质，也就是用微分几何的方法来研究电磁波的折射(渐变或突变)和反射。所以这种方法也可以称为电磁波反射和折射的**几何理论**，也就是几何光学方法。

在高频电磁场问题中，分析渐变介质透镜和反射镜的特性以及较大的圆滑物体表面的散射问题，一般都可以使用几何理论。分析波在电离层中的传播和在对流层中传播的某些问题也可以使用几何理论。

为应用几何理论来分析一些典型问题，先介绍微分几何的基本概念。

§2 曲线的局部性质

设 $\boldsymbol{r}$ 是曲线上点的位置矢径。一条曲线可以用坐标（$\boldsymbol{r}$ 的分量）的参变方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\tau)$ 来表示。这里 τ 是一个参变数。例如，平面椭圆的方程是 $x=a\cos\tau, y=b\sin\tau$。圆柱右螺旋线的方程是 $x=a\cos\tau, y=a\sin\tau, z=a\tau\operatorname{tg}\theta$（$\theta$ 是前进仰角）。两个邻点 $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 之间，参变数的差是 $\mathrm{d}\tau$，而弧长即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的数值 $\mathrm{d}s$ 则是 $\mathrm{d}s=\sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}\,\mathrm{d}\tau$。这里顶上的 · 表示对 τ 的导数。如果选定了曲线的始点和曲线上点的前向移动方向（对应于参变数 τ 增加的方向），从始点起算的弧长 s 也可以当作参变数。以下对弧长的导数以 $(')$ 为标志。

显然 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\dot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\tau$ 指向曲线的正切方向，而 $\boldsymbol{r}'$ 则是曲线的正切方向单位矢量。以 $\boldsymbol{\tau}$ 表示正切方向单位矢量，即 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}'$。因此，$\boldsymbol{r}(\tau)$ 应是 τ 的连续函数。在圆滑（没有折弯点）的曲线上，$\dot{\boldsymbol{r}}$ 也应是连续函数。一个具有 p 阶连续导数的函数称为 C^p 阶函数。C^∞ 阶函数是任意阶连续可导的函数。对于圆滑曲线，$\boldsymbol{r}(\tau)$ 至少是 C^1 阶函数。

由 $\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'=1$，两边对 s 求导，得到 $2\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}''=0$。说明矢量 $\boldsymbol{r}''$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 正交①，即与曲线正交。这可由图一看出。对于 $\boldsymbol{r}(s)$ 和 $\boldsymbol{r}(s+\delta s)$ 两点的切向单位矢量应用中值定理，

$$\boldsymbol{r}'(s+\delta s)-\boldsymbol{r}'(s)=\boldsymbol{r}''(s+\theta\delta s)\delta s \qquad (0<\theta<1)$$

图一表明，这个矢量恰好与 $\boldsymbol{r}(s+\delta s)$ 和 $\boldsymbol{r}(s)$ 之间某点的切向单位矢量正交。由 $\delta s\to 0$ 可见，$\boldsymbol{r}''(s)$ 与 $\boldsymbol{r}'(s)$ 正交。

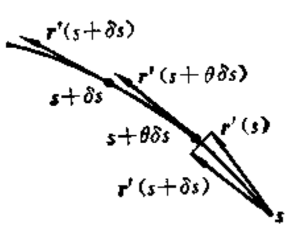

图 一

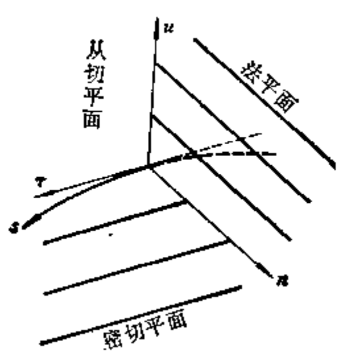

图 二

$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{r}''$ 张成的平面称为 $\boldsymbol{r}$ 点的**密切平面**。$\boldsymbol{r}''$ 所指的方向称为曲线在 $\boldsymbol{r}$ 点的主法线方向。以 $\boldsymbol{n}$ 表示主法线方向单位矢量②。$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''$ 与 $\boldsymbol{r}'$、$\boldsymbol{r}''$ 互相正交，其所指的方向称为曲线在 $\boldsymbol{r}$ 点的从法线方向。以 $\boldsymbol{u}$ 表示从法线方向单位矢量。主法线方向和从法线方向所在的平面称为曲线的**法平面**，而从法向与切向所在的平面则称为曲线的**从切平面**，如图二所示。

---

① 假定 $\boldsymbol{r}''(s)\neq 0$，这种点称为常点。$\boldsymbol{r}''=0$ 的点称为逗留点。

② 如逗留点为孤立点，且在该点前、后邻点上 $\boldsymbol{n}$ 的指向不相反，则可以根据 $\boldsymbol{n}(s)$ 的连续性判断该点的 $\boldsymbol{n}$。否则该点的 $\boldsymbol{n}$ 不确定。

可以取 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u}$ 为 $\boldsymbol{r}$ 点的局部坐标轴单位矢量，以研究曲线在 $\boldsymbol{r}$ 点附近的局部性质。这种局部坐标系称为 **Frenet 标架**。

现在从另一角度来研究 $\boldsymbol{r}''$ 的意义。

在 $\boldsymbol{r}(s)$ 点附近再取两点 $\boldsymbol{r}(s+\delta_1 s)$ 和 $\boldsymbol{r}(s-\delta_2 s)$。三点定出一个平面。两个矢径差

$$\boldsymbol{r}(s+\delta_1 s)-\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}'(s+\theta_1\delta_1 s)\delta_1 s,$$
$$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s-\delta_2 s)=\boldsymbol{r}'(s-\theta_2\delta_2 s)\delta_2 s$$

(其中 $0\leqslant\theta_1,\ \theta_2\leqslant 1$)都在这平面内。因此，$\boldsymbol{r}'(s+\theta_1\delta_1 s)-\boldsymbol{r}'(s-\theta_2\delta_2 s)=\boldsymbol{r}''(s_2+\theta\delta s)\delta s$ ($\delta s=\theta_1\delta_1 s+\theta_2\delta_2 s,\ s_2=s-\theta_2\delta_2 s,\ 0\leqslant\theta\leqslant 1$) 也在这平面内。于是，在 $\delta_1 s$ 和 $\delta_2 s$ 分别趋近于 0 时，这个平面就趋近于 $\boldsymbol{r}'(s)$ 和 $\boldsymbol{r}''(s)$ 所在的平面，即密切平面。

过 $\boldsymbol{r}(s)$、$\boldsymbol{r}(s+\delta_1 s)$、$\boldsymbol{r}(s-\delta_2 s)$ 三点作一个圆，它的圆心 $\boldsymbol{r}_0$ 也在三点所在的平面内。令圆半径为 R，圆上的任意点为 $\boldsymbol{u}$，应有 $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{r}_0)=R^2$。$\boldsymbol{u}$ 点当然可以和上列三点重合。故 $[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0]\cdot[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0]-R^2=0$，固定 R 和 $\boldsymbol{r}_0$ 将左边看作 s 的函数 $f(s)$，它应是连续的。使 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{r}(s)$、$\boldsymbol{r}(s+\delta_1 s)$、$\boldsymbol{r}(s-\delta_2 s)$ 重合得到 $f(s)=0$、$f(s+\delta_1 s)=0$、$f(s-\delta_2 s)=0$. 根据 Rolle 定理①，必有 $0\leqslant\theta_1,\theta_2\leqslant 1$，使 $f'(s+\theta_1\delta_1 s)=0$、$f'(s-\theta_2\delta_2 s)=0$。再根据这个定理，必有 $f''(s_2+\theta\delta s)=0$ ($\delta s=\theta_1\delta_1 s+\theta_2\delta_2 s,\ s_2=s-\theta_2\delta_2 s,\ 0\leqslant\theta\leqslant 1$)。令

$$f(s)=[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0]\cdot[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0]-R^2,$$

故

$$\boldsymbol{r}'(s+\theta_1\delta_1 s)\cdot[\boldsymbol{r}(s+\theta_1\delta_1 s)-\boldsymbol{r}_0]=0, \tag{a}$$
$$\boldsymbol{r}'(s-\theta_2\delta_2 s)\cdot[\boldsymbol{r}(s-\theta_2\delta_2 s)-\boldsymbol{r}_0]=0, \tag{b}$$
$$\boldsymbol{r}''(s_2+\theta\delta s)\cdot[\boldsymbol{r}(s_2+\theta\delta s)-\boldsymbol{r}_0]+\boldsymbol{r}'(s_2+\theta\delta s)\cdot\boldsymbol{r}'(s_2+\theta\delta s)=0. \tag{c}$$

但 $\boldsymbol{r}'(s_2+\theta\delta s)\cdot\boldsymbol{r}'(s_2+\theta\delta s)=1$。如使 $\delta_1 s$、$\delta_2 s$ 分别趋近于0，三点所在的平面就成为密切平面，圆就成为画在密切平面上、且与曲线在 $\boldsymbol{r}$ 点相切的圆，称为 $\boldsymbol{r}$ 点的**密切圆**。这时，上列各式成为 $\boldsymbol{r}'(s)\cdot[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0]=0$，$\boldsymbol{r}''(s)\cdot[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0]=-1$。但这时 $\boldsymbol{r}_0$ 是过 $\boldsymbol{r}(s)$，$\boldsymbol{r}(s+\delta_1 s)$、$\boldsymbol{r}(s-\delta_2 s)$ 三点的圆的圆心，在 $\delta_1 s\to 0$ 和 $\delta_2 s\to 0$ 时的极限，即密切圆的圆心，$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0$ 则是由密切圆心到 $\boldsymbol{r}(s)$ 点的半径。第(a)式表明，这半径与 $\boldsymbol{r}(s)$ 点切向矢量正交，即密切圆与曲线在 $\boldsymbol{r}(s)$ 点具有相同的切向②。由于 $\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{r}''(s)=0$，故第(c)式表明，$|\boldsymbol{r}''(s)|$ 与密切圆半径的长度互为倒数，而 $\boldsymbol{r}''(s)$ 由 $\boldsymbol{r}(s)$ 点指向 $\boldsymbol{r}_0$ 点。换言之，密切圆圆心是在主法线上，而 $\boldsymbol{r}''(s)$ 的长度等于密切圆半径 R 的倒数。以 $\boldsymbol{n}$ 表示主法线方向单位矢量，并称 R 为曲线在 $\boldsymbol{r}(s)$ 点的**曲率半径**，$|\boldsymbol{r}''(s)|=1/R(s)=k(s)\geqslant 0$ 为 $\boldsymbol{r}(s)$ 点的**曲率**，则 $\boldsymbol{r}''$ 应为**曲率矢量**，

$$\boldsymbol{r}''(s)=\frac{1}{R(s)}\boldsymbol{n}=k(s)\boldsymbol{n} \tag{1}$$

实际计算 $\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{r}''$ 时，一般需对 $\boldsymbol{r}$ 的分量分别求导数。例如，x-y 平面上的圆的方程为

$$x=a\cos s/a,\qquad y=a\sin s/a,\qquad z=0.$$

---

① 如果 $f(x)$ 是 c^1 阶函数，且 $f(a)=f(b)=0$，则必有 $a\leqslant x_0\leqslant b$，使 $f'(x_0)=0$。

② 由于从曲线上切点的邻点到密切圆心的距离与密切圆半径之差不大于曲线上切点邻点到密切圆的距离，所以这个差是 $(\delta s)^2$ 的量级。

于是，

$$x''=-\frac{1}{a}\cos s/a,\qquad y''=-\frac{1}{a}\sin s/a,\qquad z''=0$$

即 $\boldsymbol{r}''$ 的长度等于 $1/a$(曲率半径等于 a)，指向圆心。

式(1)表明，逗留点即是曲率为 0 的点。直线的曲率处处为 0，它的主法线方向是不确定的。显然曲率矢量 $\boldsymbol{r}''$ 和 Frenet 标架的存在都以 $\boldsymbol{r}(s)$至少是 C^2 阶函数、且 $\boldsymbol{r}''\neq 0$ 为前提。

曲率矢量 $\boldsymbol{r}''$ 反映曲线弯曲的程度和趋向。如果曲线是平面的，这一个参量已足够说明它的走向趋势了。如果不是平面曲线，它一边弯曲，一边还从密切面上翘起，其从法线方向也逐点改变。所以还需要有另一个参量来说明这种趋势。

由上述曲率矢量 $\boldsymbol{r}''$ 是正切方向单位矢量 $\boldsymbol{r}'$ 的导数。现在来研究从法线方向单位矢量$\boldsymbol{u}$的导数 $\boldsymbol{u}'$，称之为**挠率矢量**。

对 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}'=0$ 取导数，注意 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}''=0$，得到 $\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{r}'=0$。对 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=1$ 取导数，得到 $\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{u}=0$。所以 $\boldsymbol{u}'$ 与 $\boldsymbol{r}'$、$\boldsymbol{u}$ 都正交，它与 $\boldsymbol{n}$ 在同一条直线上。这一点可以由图三看出。图三表示了曲线向左下方挠曲的情形。这时，$\boldsymbol{u}'$ 的方向($\boldsymbol{u}(s+\delta s)-\boldsymbol{u}(s)$的方向的极限)与 $\boldsymbol{n}$ 的方向相反。令

$$\boldsymbol{u}'=-w\boldsymbol{n}\tag{2}$$

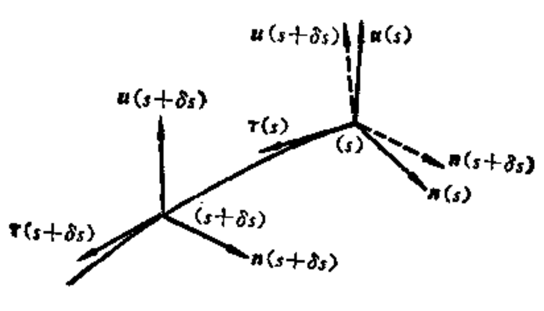

图 三

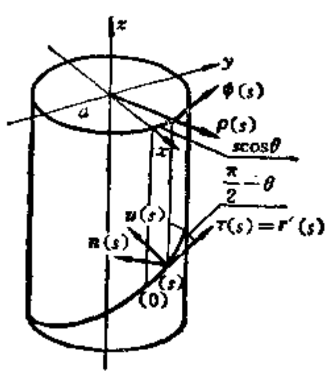

图 四

称w为挠率，它可为正或负。由于 $\boldsymbol{u}'$ 与w同时为 0，所以一条曲线是平面曲线的必要充分条件是 $w=0$，由 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{r}'$ 取导数，得到

$$\boldsymbol{n}'=w\boldsymbol{u}-k\boldsymbol{r}'\tag{3}$$

(1)、(2)、(3)三式给出三个单位矢量 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{u}$ 的导数与三个单位矢量的关系，称为 **Frenet-Serret 公式**①。在计算曲率 k 和挠率 w 时，一般必须先写出三个单位矢量各分量的表达式，再求导数，且应用上列三式。例如，如图四所示，圆柱右螺旋的方程可以写作

$$x=a\cos\frac{s\cos\theta}{a},\qquad y=a\sin\frac{s\cos\theta}{a},\qquad z=s\sin\theta$$

① 由此三式可见，可用$\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{u}$ 的齐次线性函数表示 $\boldsymbol{\tau}'$、$\boldsymbol{n}'$、$\boldsymbol{u}'$，其系数矩阵是反对称的。

于是，

$$x'=-\cos\theta\cdot\sin\frac{s\cos\theta}{a},$$

$$y'=\cos\theta\cdot\cos\frac{s\cos\theta}{a},$$

$$z'=\sin\theta$$

$$x''=-\frac{\cos^2\theta}{a}\cdot\cos\frac{s\cos\theta}{a},$$

$$y''=-\frac{\cos^2\theta}{a}\cdot\sin\frac{s\cos\theta}{a},$$

$$z''=0$$

由此可见

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\phi}\cos\theta+\boldsymbol{z}\sin\theta,\qquad k=\frac{\cos^2\theta}{a}$$

$$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{x}\cos\frac{s\cos\theta}{a}-\boldsymbol{y}\sin\frac{s\cos\theta}{a}=-\boldsymbol{\rho}$$

这里 $\boldsymbol{\rho}$、$\boldsymbol{\phi}$ 是极坐标单位矢量。由此，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}&=\boldsymbol{z}\cos\theta-\boldsymbol{\phi}\sin\theta\\&=\boldsymbol{x}\sin\theta\cdot\sin\frac{s\cos\theta}{a}-\boldsymbol{y}\sin\theta\cdot\cos\frac{s\cos\theta}{a}+\boldsymbol{z}\cos\theta\end{aligned}$$

因而

$$\boldsymbol{n}'=-\boldsymbol{\rho}'=-\frac{\cos\theta}{a}\left(-\boldsymbol{x}\sin\frac{s\cos\theta}{a}+\boldsymbol{y}\cos\frac{s\cos\theta}{a}\right)=-\frac{\cos\theta}{a}\boldsymbol{\phi}$$

$$\boldsymbol{u}'=-\sin\theta\boldsymbol{\phi}'=\frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{a}\left(\boldsymbol{x}\cos\frac{s\cos\theta}{a}+\boldsymbol{y}\sin\frac{s\cos\theta}{a}\right)=\frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{a}\boldsymbol{\rho}$$

上列两式都给出 $w=\sin2\theta/2a$。

设曲线是 C^n 阶的。可以应用 Taylor 级数展开式得到用 $\boldsymbol{r}(s)$ 点的导数为系数的多项式近似式

$$\boldsymbol{r}(s+\delta s)=\boldsymbol{r}(s)+\boldsymbol{r}'(s)\delta s+\cdots+\frac{1}{m!}\boldsymbol{r}^{(m)}(s)(\delta s)^m+O[(\delta s)^{m+1}]\tag{4}$$

如曲线是 C^n 阶的，在 $m<n$ 时此式也成立①。

应用 Frenet-Serret 公式，上式成为

$$\left.\begin{aligned}x_1(s+\delta s)&=x_1(s)+\delta s-\frac{1}{6R^2(s)}(\delta s)^3+\cdots\\x_2(s+\delta s)&=x_2(s)+\frac{1}{2R(s)}(\delta s)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{R(s)}\right)'(\delta s)^3+\cdots\\x_3(s+\delta s)&=x_3(s)+\frac{w(s)}{6R(s)}(\delta s)^3+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

① 如 $\boldsymbol{r}(s)$ 是有限阶连续可导的，可以连用若干次中值定理．当然，m 必须少于 $\boldsymbol{r}(s)$ 的阶数．

式中三个坐标轴的方向如图五所示。x_1 沿着正切方向，x_2 沿着主法线方向，x_3 沿着从法线方向。$x_3(s+\delta s)-x_3(s)$ 是 $\boldsymbol{r}(s+\delta s)$ 点到 $\boldsymbol{r}(s)$ 点密切平面的距离，它至多是 $(\delta s)^3$ 的数量级(这正是称为“密切”的原因)，$x_2(s+\delta s)-x_2(s)$ 是 $\boldsymbol{r}(s+\delta s)$ 点到 $\boldsymbol{r}(s)$ 点从切平面的距离，它至多是 $(\delta s)^2$ 的量级。$x_1(s+\delta s)-x_1(s)$ 是 $\boldsymbol{r}(s+\delta s)$ 点到 $\boldsymbol{r}(s)$ 点法平面的距离，它总是 δs 的量级。

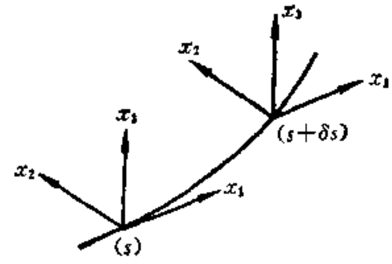

图 五

对于平面曲线，因 $w=0$，所以 x_3 是常数。

公式(5)称为 **Bouquet 公式**。

§3 曲面的局部性质

需要用两个参变数来表示一个曲面上的点的位置。例如曲线坐标系 (u_1, u_2, u_3) 中，坐标面 $u_3=u_0$ 上点的坐标是 (u_1, u_2, u_0)。所以 (u_1, u_2) 就是一对参变数。因此，在曲面上如使 u_1 取定值，就得到一条画在这曲面上的曲线，这曲线的参变数就是 u_2。所以称这曲线为一条 **u_2 曲线**，相当于曲线坐标系的 u_2 坐标轴。同样有 u_1 曲线相当于 u_1 坐标轴。于是，曲面上点的位置矢径为 $\boldsymbol{r}(u_1, u_2)$。在曲面上以 $\dot{\boldsymbol{r}}_{1,2}$ 来表示 $\boldsymbol{r}(u_1, u_2)$ 对 u_1 和 u_2 的偏导数 $\partial \boldsymbol{r}/\partial u_1$ 和 $\partial \boldsymbol{r}/\partial u_2$，它们显然与曲面是相切的，但它们未必是单位矢量。$u_1$ 曲线族与 u_2 曲线族构成曲面的参变曲线网。为使 u_1 曲线和 u_2 曲线成为曲面的正交线网①，必要且只要 $\dot{\boldsymbol{r}}_1\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_2$ 处处为 0，$\dot{\boldsymbol{r}}_1$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_2$ 所张的平面就是 $\boldsymbol{r}(s)$ 点上曲面的切平面，$\boldsymbol{r}(s)$ 点上曲面的任何切线都应在这平面内。因此，$\boldsymbol{r}(s)$ 点的任意切向矢量都应是 $\dot{\boldsymbol{r}}_1$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_2$ 的线性组合。$\dot{\boldsymbol{r}}_1\times\dot{\boldsymbol{r}}_2$ 当然是在曲面上 $\boldsymbol{r}(s)$ 点的法线上，设其正方向单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{n}$ 必然与 $\boldsymbol{r}(s)$ 点的切平面正交，同时在 u_1 曲线和 u_2 曲线的法平面上，但它不见得与 u_1 曲线或 u_2 曲线的主法线方向在一条直线上。

例如 $\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u)$（$\boldsymbol{l}$ 是单位矢量，方向随 u 改变）曲面，$\dot{\boldsymbol{r}}_v=\boldsymbol{l}(u)$ 不随 v 改变，v 曲线是包含 $\boldsymbol{l}(u)$ 的直线。当 v 恒定时，$\boldsymbol{r}(u,v)$ 的轨迹即 u 曲线是曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u)$。这种参变曲线网之中有一族为直线(未必平行)的曲面称为**直纹面**②，每条直线称为一条**母线**。最简单的直纹面是平面，其次是柱面和锥面。直纹面上每点的切平面并不见得包含通过该点的母线。如果 (u,v) 点的切平面包含通过该点的母线(v 曲线)，则在该母线上任何点的法线方向都应互相平行，即 $(\dot{\boldsymbol{r}}_u\times\dot{\boldsymbol{r}}_v)_{(u,v_1)}\times(\dot{\boldsymbol{r}}_u\times\dot{\boldsymbol{r}}_v)_{(u,v_2)}=0$ 对任何 $v_{1,2}$ 都成立。将此式展开成为

$$\{(\boldsymbol{a}'+v_1\boldsymbol{l}')\cdot\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{l}\}(\boldsymbol{a}+v_2\boldsymbol{l}')-\{(\boldsymbol{a}'+v_1\boldsymbol{l}')\times\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{a}'+v_2\boldsymbol{l}')\}\boldsymbol{l}=0$$

---

① 微分几何中证明：对于一张曲面，总能求得一对参变数 u_1、u_2，使其 $\boldsymbol{r}(u_1,u_2)$ 表示式满足 $\dot{\boldsymbol{r}}_1\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_2=0$（例如，苏步青等：《微分几何》，人民教育出版社，1979，第二章 § 2.2.）

② 显然，$\boldsymbol{a}(u)$ 不是唯一的，例如还可以写作

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v_0\boldsymbol{l}(u)+v'\boldsymbol{l}(u)\quad(v'=v-v_0)$$

公式第一项自动为 0,第二项{ }内展开后,去掉自动为 0 的项,成为$(v_1-v_2)\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{l}=0$,因为$v_1-v_2$是任意的,所以有 $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{l}=0$。此条件不但是母线上各点的法向都互相平行的必要条件,也是其充分条件。一个直纹面,如果任一点的切平面都包含通过该点的母线,就称为一个**可展面**。显然,一个直纹面是可展面的必要且充分条件是 $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{l}=0$,但并不是任何直纹面都是可展面。例如,使一条斜直线上的一点沿一个圆周滑动,而保持直线与圆周之间的夹角不变,且与以此圆周为横截线的圆柱在此圆周上相切,就构成一个单叶双面旋转面,如图六(a)所示。取 v 为从圆周上接触点起算沿斜直线的长度($-\infty<v<\infty$),ϕ 为圆周上接触点在圆周上的方位角,令圆柱半径为 a,斜直线与圆周的夹角为 θ,则 $\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{\rho}(\phi)$,$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{\phi}(\phi)\cos\theta+\boldsymbol{z}\sin\theta$。它显然不是可展面。

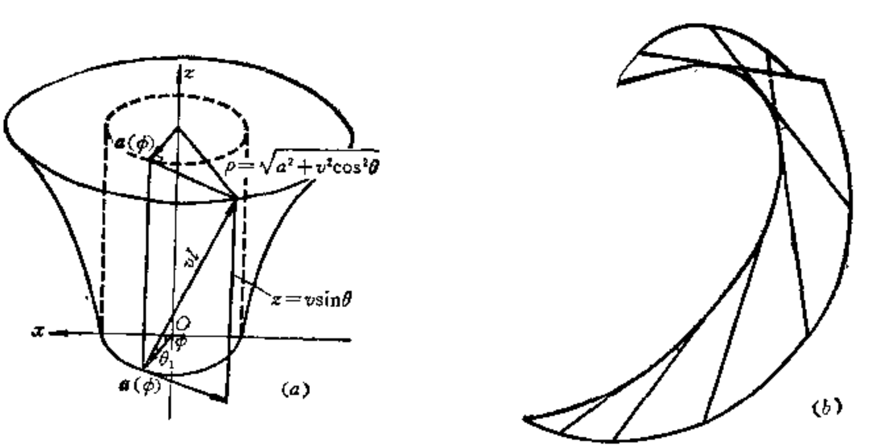

图 六

一个直纹面,如果 $\boldsymbol{l}(u)$恰好平行于 $\boldsymbol{a}'(u)$,则 $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{l}=0$,它就是一个**可展面**。这种面上,每条母线都是曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)$的切线(图六(b)),所以这种面称为**切线面**。微分几何中证明,只有柱面($\boldsymbol{l}'=0$)、锥面(取锥顶为 $\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}'=0$)和切线面是可展面①。

可展面的法向矢量 $\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{a}'+v\boldsymbol{l}')\times\boldsymbol{l}$ 的指向只取决于 u,而与 v 无关②。它的切平面构成一个以 u 为参数的平面族。每一个 u 对应一个曲面法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$,因而确定一个切平面。反过来说,一个以 u 为变数的单位矢量连续函数③$\boldsymbol{n}(u)$($\boldsymbol{n}'\neq0$)与一个标量连续函数 $p(u)$可以确定一个以 u 为参数的平面族 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}(u)=p(u)$,每一个 u 值确定一个平面。如果这个平面族中的每个平面都与同一个可展面相切于一条直线(可展面在这条直线上的法向与这个平面的法向吻合),这个可展面就称为这个平面族的**包络面**。微分几何中证明④,一个单参数平面族具有包络面的充分且必要条件是:$\boldsymbol{n}(u)$和 $p(u)$至少是 C^2 级函数,$\boldsymbol{n}'(u)\neq0$(平面族不是平行平面)且各平面不相交于同一条直线。

① 例如,苏步青等:《微分几何》,71—73 页.

② v 可能影响 $\boldsymbol{N}$ 的长度,但与其指向无关.

③ $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦都是 u 的函数.

④ 例如,吴大任:《微分几何讲义》,第五章§8人民教育出版社 1979.

由上述可见，直纹面的 v 曲线都是直线，有 $\dot{r}_v=\boldsymbol{l}(u)$，其主法线方向不确定。$u$ 曲线是曲线，有 $\dot{r}_u=\boldsymbol{a}'(u)+v\boldsymbol{l}'(u)$，其主法线方向则由 $\ddot{r}_{uu}=\boldsymbol{a}''(u)+v\boldsymbol{l}''(u)$ 来决定，与直纹面的法线方向 $(\boldsymbol{a}'(u)+v\boldsymbol{l}'(u))\times\boldsymbol{l}(u)$ 未必一致。由于 $\boldsymbol{l}(u)\cdot\boldsymbol{l}'(u)=0$，所以，如果 $\boldsymbol{a}'(u)\cdot\boldsymbol{l}(u)\neq 0$，$u$、$v$ 曲线网也并不正交。

如果 u_1、u_2 限定为一个参变数 τ 的函数 $u_1(\tau)$、$u_2(\tau)$，则 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_1(\tau),u_2(\tau))$ 是画在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_1,u_2)$ 面上的一条曲线。参变数为 τ 和 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 两点之间的距离矢量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\dot{r}_1\mathrm{d}u_1+\dot{r}_2\mathrm{d}u_2$ $(\mathrm{d}u_{1,2}=\dot{u}_{1,2}\mathrm{d}\tau)$。于是线元 $\mathrm{d}s$ 的平方等于 $\mathrm{d}s^2=\sum\limits_{i,j=1}^{2}\dot{r}_i\cdot\dot{r}_j\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j$。无论参变数 (u_1,u_2) 进行什么变换，它都应是正实数，所以这是一个正定微分二次型，称为**第一基本微分型**，常写作①

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j=1}^{2}g_{ij}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j=[\mathrm{d}u_i]^T\cdot[g_{ij}]\cdot[\mathrm{d}u_j] \tag{6}$$

$$(g_{ij}=g_{ji}=\dot{r}_i\cdot\dot{r}_j)$$

$\mathrm{d}u_1$、$\mathrm{d}u_2$ 是曲面上 (u_1,u_2)、$(u_1+\mathrm{d}u_1,\ u_2+\mathrm{d}u_2)$ 两点的参变量之差。如两点位置已定，$\mathrm{d}u_1$、$\mathrm{d}u_2$ 就已定，无需求得两点所在的曲线的参变方程，亦即不必求得 $u_{1,2}$ 与曲线的参变量 τ 的函数关系。当曲面参变数转换为 $u_i(v_1,\ v_2)$ 时，第一基本微分型的系数矩阵 $[g_{ij}^{(u)}]$ 转换为 $[g_{ij}^{(v)}]$ $(g_{ij}^{(u)}=(\partial\boldsymbol{r}/\partial u_i)\cdot(\partial\boldsymbol{r}/\partial u_j)$，$g_{ij}^{(v)}$ 例推)，有下列关系：

$$[\mathrm{d}u_i]=T_{uv}\cdot[\mathrm{d}v_i],\qquad T_{uv}=[\partial u_i/\partial v_j]$$

$$[g_{ij}^{(v)}]=T_{uv}^T\cdot[g_{ij}^{(u)}]\cdot T_{uv} \tag{7}$$

$[g_{ij}]$ 的逆矩阵写作 $[G^{ij}]$。根据二者相乘为 I，可知 $\sum\limits_{j=1}^{2}g_{ij}G^{jk}=\delta_{ik}$，因而 $\sum\limits_{i,j=1}^{2}g_{ij}G^{ji}=2$。如果 $u_{1,2}$ 曲线网是正交的，$g_{ij}=0(i\neq j)$，$[g_{ij}]$、$[G^{ij}]$ 都是对角矩阵。

如在曲面的某点上有 $g_{11}g_{22}-g_{12}^2=0$（在参变曲线网正交时，$\dot{r}_{1,2}$ 中至少有一个为 0），$[G^{ij}]$ 就不存在。这种点称为**奇点**。没有奇点的曲面称为**正则曲面**。以下假定所讨论的曲面都是正则的，而且 $\boldsymbol{r}(u,u_2)$ 至少是 C^3 阶的。

在曲面上的一点 (u_1,u_2) 上，切向单位矢量 $\boldsymbol{u}_{1,2}=\boldsymbol{r}_{1,2}/|\dot{r}_{1,2}|$ 和法向单位矢量② $\boldsymbol{n}=\dot{r}_1\times\dot{r}_2/|\dot{r}_1\times\dot{r}_2|$ 构成该点局部坐标系的一阶标架，如图七所示。为表示曲面的局部性质，又与曲线的 Frenet-Serret 公式相对应，需有 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{1,2}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}$ 的表达式，与式(4)、(5)相对应，需要有曲面

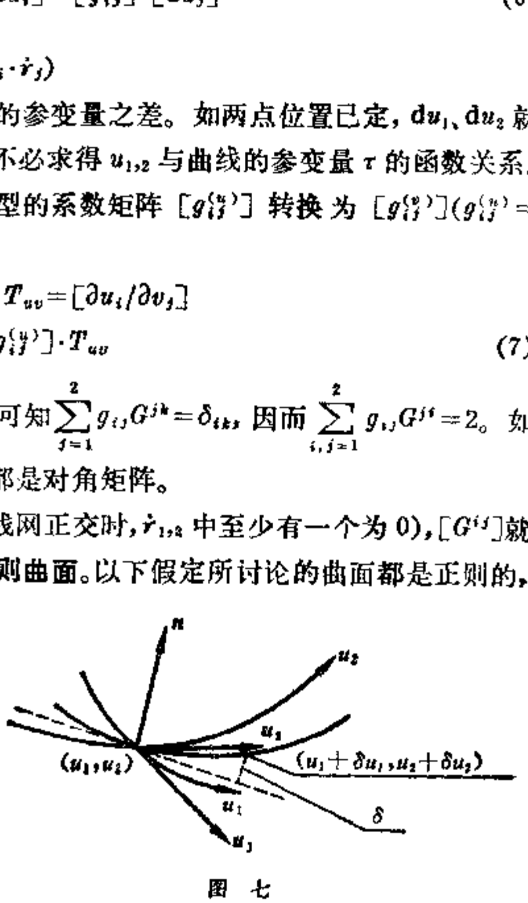

图 七

① 当需要指明参变数为 (u_1,u_2) 时，在 g_{ij} 上加肩标 (u)。一般微分几何书上都采用张量符号，$\mathrm{d}u_{1,2}$ 写作 $\mathrm{d}u^{1,2}$，$[g_{ij}]^{-1}$ 写作 $[g^{ij}]$。指标在肩上者为反变张量，指标在足下者为协变张量。这里不研究一般的微分几何问题，所以回避了张量符号。又由式(6)可见，g_{ii} 就是曲面上沿 u_i 曲线的长度因子 g_{u_i} 的平方。因此，单位矢量为 $\boldsymbol{u}_i=\dot{r}_i/\sqrt{g_{ii}}$，而 u_i 曲线上的线元则为 $\sqrt{g_{ii}}\mathrm{d}u_i$。

② 与曲线的主法向不同，$\boldsymbol{n}$ 的指向还取决于对 u_1 和 u_2 两参变数次序的规定，不是曲面的构造自然决定的。

在(u_1,u_2)邻域内的近似表达式；与曲线的曲率、挠率相对应，需要有能表示曲面弯曲情形的参量。

曲面上(u_1,u_2)的邻点$(u_1+\delta u_1,\ u_2+\delta u_2)$到$(u_1,\ u_2)$点切平面的距离$\delta$等于两点的距离矢量$\delta\boldsymbol{r}$在$\boldsymbol{n}$方向的投影。将$\delta\boldsymbol{r}$按Taylor级数展开：

$$\delta\boldsymbol{r}=\dot{\boldsymbol{r}}_1(u_1,u_2)\delta u_1+\dot{\boldsymbol{r}}_2(u_1,u_2)\delta u_2+\frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{r}}_{11}\delta u_1^2+2\ddot{\boldsymbol{r}}_{12}\delta u_1\delta u_2+\ddot{\boldsymbol{r}}_{22}\delta u_2^2)+O(\delta u_i^3)$$

注意$\dot{\boldsymbol{r}}_{1,2}$与$\boldsymbol{n}$正交，得到

$$\delta=\delta\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{r}}_{11}\cdot\boldsymbol{n}\delta u_1^2+2\ddot{\boldsymbol{r}}_{12}\cdot\boldsymbol{n}\delta u_1\delta u_2+\ddot{\boldsymbol{r}}_{22}\cdot\boldsymbol{n}\delta u_2^2)+O(\delta u_i^3)$$

使$\delta u_i\to 0$，2δ成为**第二基本微分型**。令$\mathrm{II}=2\delta$，则

$$\mathrm{II}=2\delta=\sum_{i,j=1}^{2}\Omega_{ij}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j\qquad(\Omega_{ij}=\Omega_{ji}=\ddot{\boldsymbol{r}}_{ij}\cdot\boldsymbol{n})\tag{8a}$$

它可为正、负或0。由$\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{n}=0$对$u_j$求导，可得

$$\Omega_{ij}=\ddot{\boldsymbol{r}}_{ij}\cdot\boldsymbol{n}=-\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{n}}_j=-\dot{\boldsymbol{r}}_j\cdot\dot{\boldsymbol{n}}_i\tag{8b}$$

根据式(8b)，式(8a)又可以写作

$$\mathrm{II}=2\delta=-\sum_{i,j=1}^{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{n}}_j\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j=-\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}\tag{8c}$$

$\dot{\boldsymbol{r}}_{1,2}$和$\boldsymbol{n}$都是$u_1$、$u_2$的函数，其一阶微分应为$\mathrm{d}u_{1,2}$的一次齐式，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\dot{\boldsymbol{n}}_1\mathrm{d}u_1+\dot{\boldsymbol{n}}_2\mathrm{d}u_2,\qquad \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}_i=\ddot{\boldsymbol{r}}_{i1}\mathrm{d}u_1+\ddot{\boldsymbol{r}}_{i2}\mathrm{d}u_2\tag{9}$$

由于$\boldsymbol{n}$是单位矢量，$\dot{\boldsymbol{n}}_{1,2}$必在切平面上，应能写成$\dot{\boldsymbol{r}}_{1,2}$的一次齐式，故可设

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=-\sum_{j=1}^{2}\omega_1^j\dot{\boldsymbol{r}}_j\mathrm{d}u_1-\sum_{j=1}^{2}\omega_2^j\dot{\boldsymbol{r}}_j\mathrm{d}u_2$$

两个$\mathrm{d}\boldsymbol{n}$表达式同时取与$\dot{\boldsymbol{r}}_i$的标量积，分别使$\mathrm{d}u_1$、$\mathrm{d}u_2$的系数相等，得到

$$\Omega_{ik}=\sum_j\omega_k^j g_{ij}\qquad(i,k=1,2)$$

两边同乘以G^{il}并对i求和，注意$g_{ij}=g_{ji}$和$\sum\limits_i g_{ji}G^{il}=\delta_{jl}$，得到

$$\omega_k^j=\sum_i\Omega_{ik}G^{ij}$$

于是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\sum_k\dot{\boldsymbol{n}}_k\mathrm{d}u_k,\qquad \dot{\boldsymbol{n}}_k=-\sum_{i,j}\Omega_{ik}G^{ij}\dot{\boldsymbol{r}}_j\tag{10a}$$

如果$\dot{\boldsymbol{r}}_1\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_2=0$，则

$$\dot{\boldsymbol{n}}_k=-\sum_j(\Omega_{jk}/g_{jj})\dot{\boldsymbol{r}}_j\tag{10b}$$

$\dot{r}_{1,2}$ 不是单位矢量，$\ddot{r}_{ik}$ 需用 $\dot{r}_1$、$\dot{r}_2$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的齐式来表示

$$\mathrm{d}\dot{r}_i=\left(\sum_j \Gamma^j_{i1}\dot{r}_j+b_{i1}\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}u_1+\left(\sum_j \Gamma^j_{i2}\dot{r}_j+b_{i2}\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}u_2 \tag{11a}$$

两个 $\mathrm{d}\dot{r}_i$ 表达式同时与 $\boldsymbol{n}$ 作标量积，使 $\mathrm{d}u_{1,2}$ 的系数分别相等，得到

$$b_{ik}=\Omega_{ik} \tag{11b}$$

$$\ddot{r}_{ik}=\sum_j \Gamma^j_{ik}\dot{r}_j+\Omega_{ik}\boldsymbol{n} \tag{11c}$$

$\dot{r}_i\cdot\dot{r}_j=g_{ij}$ 两边对 u_k 取导数，把 $\ddot{r}_{ik}=\sum_l \Gamma^l_{ik}\dot{r}_l+\Omega_{ik}\boldsymbol{n}$ 代入，得到

$$\sum_l(\Gamma^l_{ik}g_{jl}+\Gamma^l_{jk}g_{il})=\partial g_{ij}/\partial u_k(i,j,k=1,2)$$

根据 $\ddot{r}_{ik}=\ddot{r}_{ki}$，$\Omega_{ik}=\Omega_{ki}$ 可知，$\Gamma^l_{ik}=\Gamma^l_{ki}$。$\Gamma^l_{ik}$ 的独立元素共有六个，但可以利用的关系只有

$$\sum_k g_{kl}G^{km}=\delta_{lm}.$$

先将上式 i、k 和 j、k 分别对换，得到

$$\sum_l(\Gamma^l_{ik}g_{jl}+\Gamma^l_{ij}g_{kl})=\partial g_{jk}/\partial u_i,\qquad \sum_l(\Gamma^l_{ij}g_{kl}+\Gamma^l_{jk}g_{il})=\partial g_{ik}/\partial u_j$$

将这二式相加，减去 $\sum_l(\Gamma^l_{ik}g_{jl}+\Gamma^l_{jk}g_{il})=\partial g_{ij}/\partial u_k$，得到

$$2\sum_l \Gamma^l_{ij}g_{kl}=(\partial g_{ik}/\partial u_j)+(\partial g_{jk}/\partial u_i)-(\partial g_{ij}/\partial u_k)$$

两边同乘 G^{km} 再对 k 求和，得到

$$\Gamma^m_{ij}=\frac{1}{2}\sum_k G^{km}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right)$$

或把 (j,k,m) 置换为 (k,l,j)，以与(11a)一致，而成为

$$\Gamma^j_{ik}=\frac{1}{2}\sum_l G^{lj}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u_k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_l}\right) \tag{11d}$$

如果 $\dot{r}_1\cdot\dot{r}_2=0$，则

$$\Gamma^i_{ii}=\frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial u_i},\qquad \Gamma^j_{ii}=-\frac{1}{2g_{jj}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial u_j},$$

$$\Gamma^i_{ik}=\Gamma^i_{ki}=\frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial u_k} \tag{11e}$$

式(10a, b)和(11a—e)是与 Frenet 公式相对应的基本公式。式(11a—d)称为 **Gauss 公式**，Γ^j_{ik} 称为**联络系数**。式(10a, b)称为 **Weingarten 公式**。

在 $\boldsymbol{r}(u_1,u_2)$ 的邻域内，Taylor 级数展开式为

$$\boldsymbol{r}(u_1+\delta u_1,u_2+\delta u_2)=\boldsymbol{r}(u_1,\ u_2)+\sum_i\dot{r}_i\delta u_i+\frac{1}{2}\sum_{i,k}\ddot{r}_{ik}\delta u_i\delta u_k+O(\delta u_i^3)$$

将(11a—c)代入，成为

$$\boldsymbol{r}(u_1+\delta u_1, u_2+\delta u_2)=\boldsymbol{r}(u_1,u_2)+\left(\delta u_1+\frac{1}{2}\sum_{i,k}\Gamma^1_{ik}\delta u_i\delta u_k+O(\delta u_i^3)\right)\dot{\boldsymbol{r}}_1$$

$$+\left(\delta u_2-\frac{1}{2}\sum_{i,k}\Gamma^2_{ik}\delta u_i\delta u_k+O(\delta u_i^3)\right)\dot{\boldsymbol{r}}_2+\left(\frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_{ik}\delta u_i\delta u_k+O(\delta u_i^3)\right)\boldsymbol{n}$$

取局部坐标，以 $\boldsymbol{r}(u_1,u_2)$ 为原点，令

$$\boldsymbol{r}(u_1+\delta u_1, u_2+\delta u_2)-\boldsymbol{r}(u_1,u_2)=x_1\boldsymbol{u}_1+x_2\boldsymbol{u}_2+x_3\boldsymbol{n} \tag{12a}$$

注 意 $\boldsymbol{u}_j=\dot{\boldsymbol{r}}_j/\sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}_j\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_j}=\dot{\boldsymbol{r}}_j/\sqrt{g_{jj}}\quad(j=1,2)$，有

$$x_j=\sqrt{g_{jj}}\left(\delta u_j+\frac{1}{2}\sum_{i,k}\Gamma^j_{ik}\delta u_i\delta u_k+O(\delta u_i^3)\right)\quad(j=1,2) \tag{12b}$$

$$x_3=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_{ik}\delta u_i\delta u_k+O(\delta u_i^3) \tag{12c}$$

如只取二阶小量(限制 $x_{1,2}$ 有足够的小)，则有

$$x_3\simeq\frac{1}{2}\frac{\Omega_{11}}{g_{11}}x_1^2+\frac{1}{2}\frac{\Omega_{22}}{g_{22}}x_2^2+\frac{\Omega_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}x_1x_2 \tag{13}$$

由于 $\boldsymbol{n}$ 的指向与 u_1、u_2 的次序规定有关，$x_1=0$ 和 $x_2=0$ 的曲线①从切平面上翘起的方向也未必相同，所以三个 Ω_{ik} 不仅未必都是正的，而且未必同号。但在 $x_2=0$ 曲线的两边(x_1 异号)，x_3 是同号的。即两边向切平面的同侧翘起。如不向同侧翘起，Ω_{11} 必为 0，因而 $\dot{\boldsymbol{r}}_1=0$。前已指出，这种奇点不在此处讨论范围之内。$x_1=0$ 曲线亦同。

§4　曲面的曲率

曲面的近似方程式(13)与第二基本微分型式(8a) 其实是一个式子。因为 x_3 即是 $\boldsymbol{r}(u_1,u_2)$ 的邻点到该点切平面的距离，其来源也相同。

$x_1=0$ 或 $x_2=0$ 是包含法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 的平面，所以截线 $x_3=\frac{1}{2}\frac{\Omega_{ii}}{g_{ii}}x_i^2$ 是平面曲线，其主法线方向与 $\boldsymbol{n}$ 在同一条直线上。根据式(1)可以推得，这曲线的曲率矢量为 $\boldsymbol{n}\Omega_{ii}/g_{ii}$。在 $\Omega_{ii}>0$ 时，$\boldsymbol{n}$ 与曲线的主法线方向相合，$\Omega_{ii}<0$ 时则相反。$-\Omega_{ii}/g_{ii}$ 称为曲面在 $\boldsymbol{r}(u_1,u_2)$ 点 $\boldsymbol{x}_i$ 方向(即 $\boldsymbol{u}_i$ 方向)的**法曲率**，它可为正、为负，视 Ω_{ii} 的符号而定。为使 $\boldsymbol{n}$ 指向凸曲面的外法向时，法曲率为正，故加负号。图七表明，x_i^2 值固定时，法曲率越小，$-x_3$ 越小。图八中曲面 a 比 b 的法曲率

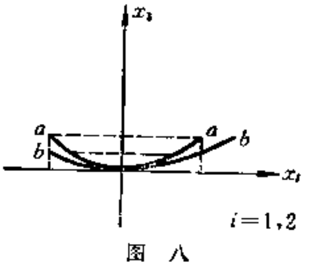

图　八

① 注意，$x_2=0$ 的曲线是 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{n}$ 所张的平面在曲面上的割痕($\boldsymbol{r}(u_1,u_2)$ 点邻近一段)，未必与 u_1 曲线相合．但与 u_1 曲线在 $\boldsymbol{r}(u_1,u_2)$ 点相切．由(12b)可以看出。$x_1=0$ 的曲线例推．