苏联大百科全书选譯

数理邏輯

人民教育出版社

数理邏輯

黃順基譯

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部
北京宣武門內承恩寺7号
（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）
人民教育印刷厂印装 新华书店发行

統一书号 13010·789 开本 787×1092 $^{1}/_{32}$ 印张 $^{6}/_{16}$
字数 9,000 印数 0001—6000 定价（8）¥ 0.07
1960 年 5月第 1 版 1960 年 5月北京第 1 次印刷

3141
5/7112·4

数理邏輯

数理邏輯是研究数学証明的科学，数理邏輯可以看成是一般邏輯的一个特殊的分支。它是适应于数学的需要而发展起来的。

数学思維有它的特点，这是由数学抽象的特殊性质所規定的。抽象的过程在数学中走得很深远并且是通过好几个阶段完成的,这里,作为数学的特征的潜无穷和实无穷(見“数学”、“数学中的无穷”两篇)的抽象起着重要的作用，数学抽象体系的复杂性、它們互相联系的多样性以及它們的性質本身——这一切都在数学的邏輯系統化中,特別是在数学定理的証明中得到反映。

数学邏輯系統化的一个最流行的方法就是公理法(見“公理”一篇)。这一方法要求把所闡发的理論中的基本的、不加証明而采用的命题精确地陈述出来，——这些基本命题就是所謂公理，而这所闡发的理論以后所有内容都从它們合乎邏輯地推出来。如此发展的数学理論称为公理法的理論。这一数学理論結构的古典范例便是欧几里得几何的結构。这一結构在当时完成了几何发展中的一个重要阶段；正是它才刺激了人們后来对于数学理論的邏輯方面进行更深刻的研究。在罗伯切夫斯基的天才著作中，第一次明确地表示了根据欧几里得几何的其余公理不可能証明第五公設的信念。这一信念，因为有了与欧几里得几何根本不同的罗伯切夫斯基几何結构而証实了(見“罗伯切夫斯基几何”一篇)。在罗伯切夫斯基几何中，經过其創立者的精工細琢，是找不到任何矛盾的，这就加强了如下的信念：不管从这門新几何学的公理推論得多么深远，一般地是不能产生矛

盾的。后来德国数学家弗·克来因就証明了事实的确是如此，即証明了罗伯切夫斯基几何学无矛盾，也就是說欧几里得第五公設不能从欧几里得几何学的其他公理推演出来，这样就产生了并解决了在公理理論中的不可証明性(即"不可証性")及无矛盾性的历史上最先一些問題。

为了精确地提出这些問題，把它們作为数学問題来研究首先就要求証明的概念精确化。任何数学的証明都在于对于出发的命題連續施行这些或那些邏輯方法。但是邏輯的方法不是某种絕对的、一劳永逸地确定出来的东西。它們是在人的許多世紀的实踐过程中制定的："人底实踐重复了亿万次，于是在人底意識中得到各种邏輯的格，給予这些格以公理的意义"。(列宁：哲学笔記)可是在每一个历史阶段中人类的实踐是有局限性的，而它的規模則永远在增长，在某一阶段或某一領域中能滿意地反映人类思維实踐的邏輯方法在次一阶段或在其他領域中可能就不适用了。于是随着被考察对象的内容的变化研究的方法即邏輯的方法也就发生变化，这一点特别适用于具有高度抽象性的数学，这里如果把邏輯方法說成是全部已經固定的东西，說成是某些絕对的东西，是完全沒有意义的。反之，考察在数学中某些具体情况下应用的邏輯方法則是有意义的，把第一公理理論的邏輯方法加以确定，也就是把适用于这一个理論的証明概念加以所要求的精确化。

这一精确化对于数学发展的重要性特别在最近是更明显了。很多研究者在研究集合的理論(参看"集合論"一篇)时遭遇到一系列特殊困难的問題，其中历史上第一个困难問題是連續統的势的問題，这是德国数学家康托(1883)提出来的，直至最近还沒有找出有效的解决方法。其他也是同样不易解决的問題在苏联数学家成功地制定的所謂描述集合論中也遇到。逐渐明显

地看出这些問題的困难具有邏輯的性質，它們与所使用的邏輯方法以及公理的不完全明晰有关，而克服这种困难的唯一途徑就是把某些邏輯方法和公理加以精确化。于是就发現，要解决这些問題就需要建立一門新的数学科学——数理邏輯。所以数理邏輯对于数学具有重大意义。現在已經証明过去把解决这些問題的希望寄托在数理邏輯的身上是正确的。虽然这些問題还沒有完全解决，但是在連續統問題的方向上奥大利数学家歌得尔已經得到极为重要的結果，他在 1939 年証明了广义連續統假設与集合論公理之間的无矛盾性；而在描述集合論的一系列困难問題方面，苏联数学家 П. С. 諾維科夫在最近(1951)已經获得了重要的結果。

在公理理論中通过建立被允許的邏輯方法的途徑来把証明概念加以精确化，这在公理理論的发展上是一个极为重要的阶段。在这个阶段以后的公理理論，即是帶有已經建立的邏輯方法的公理理論称为演繹的理論。只是对于这种理論才能容許精确地陈述数学家所关心的公理理論中无矛盾性問題和可証明性問題。

在現代数理邏輯中用証明的形式化的方法（它的基本方法之一)来解决这些問題，这一方法的实質如下。

所发展的理論中的公理和定理的陈述都写成公式的形状，为了如此要使用特别的符号，即除了通常的数学符号之外还要用一些特殊的符号来表示数学中所常用的邏輯的联結詞“……与……”、“……或……”、“如果……則……”、“……非……”、“对任何的……”、“存在……”。所有由公理推出定理的邏輯方法对应地写成由已知的公式推出新公式的規則，这些規則是形式的，这就是說为了驗証使用这些法則的正确性，并不需要注意运用这些規則的公式的意义和結果所得到的公式的意义，而只須驗

証这些公式是由如此排列的这么一些符号构成的就行了。定理的証明反映在表示定理的公式的推演上，而推演本身也被看作是一系列的公式，在公式系列中最后一个公式就是所要推演的公式，而系列中每一个公式或者表示一条公理，或者是由一个或几个前面的公式利用推演規則而得出来的。公式叫做可推演的，是指可以作出它的推演。

如果推演規則与所用的邏輯方法的对照是合乎所要求的方式的，那末就可以在所討論的理論中借表示定理的公式的可推演性来判断这条定理的可証明性。判明某一公式的可推演性和不可推演性这是一个不須作更深远的抽象的問題，并且使用一些比較初等的方法有时就可以解决这种問題。

証明的形式化这一方法的观念属于德国数学家希尔柏特，但是树立这一观念之所以成为可能，必須感謝以前一些人在数理邏輯方面的研究，如英国邏輯学家布尔(1847)、俄国数学家П. С. 波里茨基(1884)、德国数学家舒略得尔(1890 至 1905)和弗勒格(1879、1884)、意大利数学家皮亚諾(1894)等。在数理邏輯发展的开始时期，它完全不是被看成数学証明的理論来研究的，而是看成"邏輯的代数"，作为把数学方法，基本上是代数方法，应用于邏輯来加以研究的。只是皮亚諾和弗勒格才克服了以前作者們的純粹代数处理的狹隘性，理解到数理邏輯对于数学的意义，并且开始把它应用到算术和集合論的奠基問題上去。目前数理邏輯在数学基础問題中是强有力的不可缺少的研究工具。在数理邏輯的研究工作中，有苏联数学家 И. И. 茹家特基、В. И. 格里汶科、А. Н. 哥洛莫哥洛夫、П. С. 諾維科夫和其他等人参加。苏联的数学家 А. И. 馬里茨夫和 А. А. 馬尔可夫把数理邏輯应用于一系列的具体的純粹数学的問題上。

証明形式化方法的应用通常是和分出被研究的演繹論的邏

輯部分相联系的，如果这个邏輯部分和任何理論一样也是以某种計算的形式构成的，即成为形式化了的形式公理和推論規則的系統，那末这一个邏輯部分就可以作为独立的整体来加以考察。

古典的和构造論的命題演算是邏輯演算中最簡单的演算，其中使用下列符号：1）所謂邏輯变項即是字母 $A, B, C, \cdots\cdots$，它們表示任意的“命題”(关于这个名詞的意义下面再解釋)，2）邏輯联結詞的符号 $\&, \vee, \supset, \neg$，各表示“……与……”，“……或……”，“如果……則……”、“……非……”，3）説明公式的結构的括号。

在这些演算中邏輯变項以及由它們通过下列运算而得出的式子都算做公式：1）把符号 $\neg$ 加于前此作好的公式之左。2）把两个已作好的式子連接写在一行，并把符号 $\&, \vee$ 或 $\supset$ 中之一放在二者之間，然后将全式加上括号，例如下列諸式都是公式：

1. $(A\supset(B\supset A))$。
2. $((A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C)))$。
3. $((A\&B)\supset A)$。
4. $((A\&B)\supset B)$。
5. $(A\supset(B\supset(A\&B)))$。
6. $((A\supset C)\supset((B\supset C)\supset((A\vee B)\supset C)))$。
7. $(A\supset(A\vee B))$。
8. $(B\supset(A\vee B))$。
9. $(\neg A\supset(A\supset B))$。
10. $((A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A))$。
11. $(A\vee\neg A)$。

在古典的和构造論的两种命題演算中使用相同的推演規則，即：

代入規則。通过用任意一个公式替换某一个邏輯变項的方法从一个公式推出一个新的公式。

推出結論的規則。由公式$\mathfrak{A}$和$(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$推演出公式$\mathfrak{B}$。

这些規則反映了平常的推理方法：即由一般过渡到特殊以及由已証明的前提推出結論。

两种命題演算的不同，在于公理的选擇。在古典命題演算中公式1—11全部取作公理，而在构造論的命題演算中则只是这些公式中的前10个被取作公理，表示排中律(見下面)的第11条公式在构造論的演算中是不可能推演的。为了說明在命題演算中公式的可推演的概念，我們在构造論演算中推演出表示矛盾律的公式$\urcorner(A\&\urcorner A)$。

应用代入規則于公理3和公理4，把其中的变項B代換成公式$\urcorner A$，这就得出公式

$$((A\&\urcorner A)\supset A). \tag{1}$$

$$((A\&\urcorner A)\supset\urcorner A). \tag{2}$$

然后在公理10中以公式$(A\&\urcorner A)$代替A，得到

$$(((A\&\urcorner A)\supset B)\supset(((A\&\urcorner A)\supset\urcorner B)\supset T(A\&\urcorner A))). \tag{3}$$

再在公式(3)中以公式A代替变項B，得到

$$(((A\&\urcorner A)\supset A)\supset(((A\&\urcorner A)\supset\urcorner A)\supset\urcorner(A\&\urcorner A))). \tag{4}$$

把推出結論的規則应用于公式(1)和公式(4)，则得

$$(((A\&\urcorner A)\supset\urcorner A)\supset\urcorner(A\&\urcorner A)). \tag{5}$$

然后再把推出結論的規則应用于公式(2)和公式(5)，则得

$$\urcorner(A\&\urcorner A).$$

因此这一公式在构造論的命題演算中是可推演的。

两种命題演算的形式上的不同，反映了在其解释中的深刻的不同，这就是关于邏輯变項的意义不同，亦即对"命題"这一名詞的理解本身的不同。在一般公認的古典命題演算的解释中这一名詞大致理解为亚理士多得意义下的"判断"(参看"判断"一篇)，这里假定一个命題必然或是眞的或是假的，在公式中以任意的命題，亦即判断，代替邏輯变項，則得出这些判断的某一邏輯組合，这种組合也被看成是一种判断。这一判断的眞或假完全根据下列对邏輯联結詞所下的定义由代替邏輯变項的那些判断的眞或假来决定。

形狀如$(P\&Q)$的判断，称为判断P与Q的絜合，当P和Q两个判断都是眞时，它便是眞的，而当P和Q两个判断中那怕有一个是假时，它便是假的。形狀如$(P\vee Q)$的判断，称为判断P和Q的析取，当P和Q两个判断当中至少有一个是眞时，它便是眞的，而当P和Q两个判断都是假时，它便是假的。形狀如$(P\supset Q)$的判断，称为判断P和判断Q的蘊涵，当P眞而Q假时，它便是假的，而在其他情形下，它都是眞的。形狀如$\neg P$的判断，称为判断P的否定，当P是假时，它便是眞的，而当P是眞时，它便是假的。

必須指出，按照上述定义，蘊涵的意义和日常使用的联系詞"如果……則……"的意义并不完全一致，可是这个联系詞在数学中却一向就是按照蘊涵的这一定义来使用的。当数学家証明形狀如"如果P則Q"的定理时(其中P和Q是某些数学判断)，他先假定P是眞的，然后証明Q是眞的，如果后来証明了P是假的，或者沒有P是眞的假定而証明了Q是眞的时，他仍然認为这个定理是眞的，只有当証实了P眞而同时Q假时，他才認为这个定理是被推翻了，这一切与蘊涵$(P\supset Q)$的定义完全符合。

还必須指出，数理邏輯中对于析取所采用的是相容的解释：

按照定义，当P和Q两个判断都是眞时，析取判断($P\vee Q$)也还是眞的。

公式$\mathfrak{A}$称为古典地一般成立是指在$\mathfrak{A}$中以任何判断替換邏輯变項时結果所得的一切判断都是眞的。例如公式(11)就是古典地一般成立的，它的一般成立无非是表示成如下形式的排中律："如果两个判断当中的一个判断是另一个判断的否定，那末其中至少有一个是眞的，这个規律表示了判断的一个基本性質：或者是眞的或者是假的。这一規律的通常表述形式(包括矛盾律在內)可以参看"排中律"这一篇。

不难驗証，上述的公理 1—10 全部都是古典地一般成立的，并且把两个推演規則应用于古典地一般成立的公式时，仍只能得出古典地一般成立的公式，由此可見，古典命題演算中全部可推演的公式都是古典地一般成立的，反之，可以証明逆命題也成立：卽每一个古典地一般成立的公式，在古典命題演算中一定是可推演的，这个命題演算的完全性就在于此。

在构造論命題演算的現代解釋中，卽 1932 年 A. H. 哥洛莫哥洛夫所提出且与数学中的构造論的观点有关的解釋，都是以对邏輯变項的完全另一种解釋为基础的。按照这种观点，数学的断語是与构造問題的解决相联系的：数学肯定的証明便意味着和它相关的結构問題的解决。例如，任何一个証明具有某种性質的数存在的算术定理，都和构造出具有这种性質的数有关，只有已指出这种构造方法时才能認为这个定理已經証明了。

与此相对应，哥洛莫哥洛夫把輯邏变項定义为应該进行考察的数学問題，他把两个問題P和Q的緊合($P\&Q$)定义为："解决P与Q两个問題"；两个問題的析取($P\vee Q$)定义为："至少解决P与Q两个問題中的一个"，两个問題的蘊涵($P\supset Q$)定义为："假定問題P已解决，求解决問題Q"，更精确地說，蘊涵

$(P\supset Q)$可以定义为如下的問題：即如果已知問題P的解求指出能解問題Q的一般方法。至于問題P的否定$\neg P$，柯洛莫哥洛夫定义为：'通过发現"P已解决"这假定是錯的来証明解問題P的不可能。'

根据这样的定义，則$(P\vee\neg P)$便是問題："解問題P，或証明它不可解"。

在問題的蘊涵的定义中有一个略为有些含糊的名詞"一般方法"这个名詞后来在遞归函数(埃尔伯朗，歌德尔)和正規算法(A. A 馬尔可夫)的概念中得到精确化，这就使得构造論命題演算的解釋得到应有的明确性。这些概念的制定以及与之有关的在数理邏輯中广泛地被应用的数学工具的制定，乃是数理邏輯发展的現代阶段的特征。

以問題代替公式$\mathfrak{A}$中的变項便可得到一个新的問題。如果用这样的方法由$\mathfrak{A}$所得到的每一問題都是可解的，我們便說公式$\mathfrak{A}$是**构造地一般成立**，或者更精确地說，用这样的方法所得的問題一旦形成，便能找到解这个問題的一般方法(依精确化的意义)，构造論中一般成立这一概念，比古典地一般成立这一概念在本質上狭隘的多，例如，在古典命題演算中表示排中律的古典地一般成立的公式(11)(見前)便不是构造地一般成立的，因为即使在算术中也不可能有一个解决所有形状如$(P\vee\neg P)$的問題的一般方法，亦即能解算术問題P或証明其不可解性的一般方法。美国数学家A車尔治在1936年証明了这样的一般方法(根据这个名詞的現代理解)实际上是不可能的。

另一方面，公理1—10是构造地一般成立的公式，且两个推演規則在应用到构造地一般成立公式时只能得出构造地一般成立的公式。所以在构造論的命題演算当中，只有构造地一般成立的公式是可推演的。直到現在，还沒有能知道逆命題是否眞，

也就是，在每一个构造地一般成立的公式在这个演算中都是可推演的这个意义下，构造論命題演算是否完全的。

現时在建立演繹的数学理論时应用最广的是古典的謂詞演算，这乃是亚里士多得关于判断的古典理論的发展及精确化，并且与集合論的抽象系統完全相适应。古典命題演算系把判断形式化为变項，但不深入其結构，古典的謂詞演算則在判断中分辨出主詞和宾詞(参看“邏輯”一篇)，并考虑到全称判断和特称判断的結构，除了命題演算中所用的全部符号之外这里还采用了符号∀和∃，它們分别表示“对所有的……”和“存在有……”。

构造論的謂詞演算对古典謂詞演算的关系正如构造論的命題演算对古典命題演算的关系一样，这两种謂詞演算之間最重大的分歧点是由于在两种演算中对特称判断或者存在判断的解釋不同所致。当构造的謂詞演算中这种判断被解釋成肯定有可能作出一定的构造，并且只有当指出这种的构造时才算做是建立了，而在古典的謂詞演算中存在判断通常是脱离了构造的可能性来解釋的，被看成純粹关于存在的肯定。对于古典的謂詞演算的存在判断的更滿意的解釋，——这种解釋以一定的方式把古典謂詞演算与构造論謂詞演算联結起来，是由A. H. 哥尔莫哥洛夫在1925年发现的。

在数学中邏輯演算是与正在展开的演繹理論的特殊公理相結合而应用的。例如，結合謂詞演算(古典的或者构造論的)与皮亚諾公理(参看“算术”一篇)就可以建立自然数的理論，同样也可以建立集合論。这种演算对应于不同的公理选擇，可能有不同的变体。

我們說一种演算是无矛盾的，是指其中不能同时推演出任何公式$\mathfrak{A}$及其否定公式$\neg\mathfrak{A}$来。建立在数学中所运用的演算的无矛盾性这一問題是数理邏輯中的一个主要問題。目前这个問

题只是在非常有限的规模内解决了，有不同的演算的“完全性”概念被使用着。如果所考虑的是数学中某种内容确定的范围，且認为演算对于这一个范圍是完全的，是指其中每个表示这一圍范内眞的命题的公式是可推演的。演算的另一个“完全性”概念，是与下列要求相联系着的：即要求对于演算中陈述的任何命题給予証明或給予駁斥。与这些概念相联系具有头等意义的是歌德尔定理，这一定理断定对于一非常寬广的演算类来說完全性要求和无矛盾性要求是不相容的。根据歌德尔定理这一类中任何一个无矛盾的演算对于算术来說都不是完全的：对于这一类演算中任何一个都可以构造出眞的算术命题。这种命题在这种演算中可以形式化，但是不可推演。从唯物辯証法的观点看来，这一定理是完全自然的。这一定理并不降低数理邏輯作为数学中一个强有力的組織工具的价值，但却从根本上消除了对于这一門科学的形而上学的期望：即期望数理邏輯成为某种能把数学全部包罗在一个演繹理論的框架内的某种东西。許多資产阶級学者其中包括希尔柏特［証明形式化的方法的作者也是数学中形式主义（参看“形式主义”一篇）的奠基者］都宣揚这种期望。数学中的形式主义是这样一种倾向，它企图把数学这門科学归結为根据一劳永逸地建立起来的規則所进行的公式的运算，歌德尔的結果給予这一傾向以致命的打击，根据歌德尔定理，甚至数学中象自然数的算术那样較初等的部分也不能完全包容在一个演繹理論中。

数理邏輯与自动机构造的理論特别是与“数学机械”的理論有着深刻的原則性的联系。苏联学者 B. И. 謝士塔可夫在三十年代就曾发現古典命题演算在継电器接触系統方面有重要的应用，这种継电接触系統在自动机的机构中正被广泛地应用了。

謝士塔可夫研究两极的継电器接触系統时曾注意到所有这

样的系統在下列意义上与古典命题演算的某一个公式$\mathfrak{A}$同型，如果这一系統受理n个綫路，那么$\mathfrak{A}$也含包同样多个邏輯变項。并且，如果以P_i表示判断“第i个綫路工作正常”，那末为了綫路是閉的必須而且只須以判断$P_1,\cdots\cdots,P_n$分别代替$\mathfrak{A}$中相应的邏輯变項时得出的結果是眞的。构造这种描述系統的“工作条件”的同型公式在所設π一系統的情形下特别簡单，这是由不分支的同一接触点的基本电路中借并联与串联而得出的，这一点与下列事实相联系：即綫路的并联和串联分别与析取判断和絜合判断同型。事实上为了由两个綫路π_1和π_2并联（串联）而得到的綫路是閉的必須而且只須π_1是閉的或者（和）綫路π_2是閉的。

命题演算在継电器接触系統中的应用为解决現代技术的一系列重要問題打开了有效的通路，因为邏輯联結詞的同型在构造現代电子計算机中也起着本質的作用。所以数理邏輯对于这一部門也有价值（参看“継电器計算机”一篇）。

无論过去和現在資产阶級的学者們都企图利用数理邏輯来論証其反动的唯心主义立場，反动的哲学家罗素、卡那普等所作的这些尝試都是以歪曲数理邏輯的本質，把数理邏輯的某一部分加以伪科学的、形而上学的絕对化为基础的。

篇　名：Математическая логика

原著者　А. А. Марков

譯　者：黃顺基

譯自苏联大百科全书第25卷338至341頁