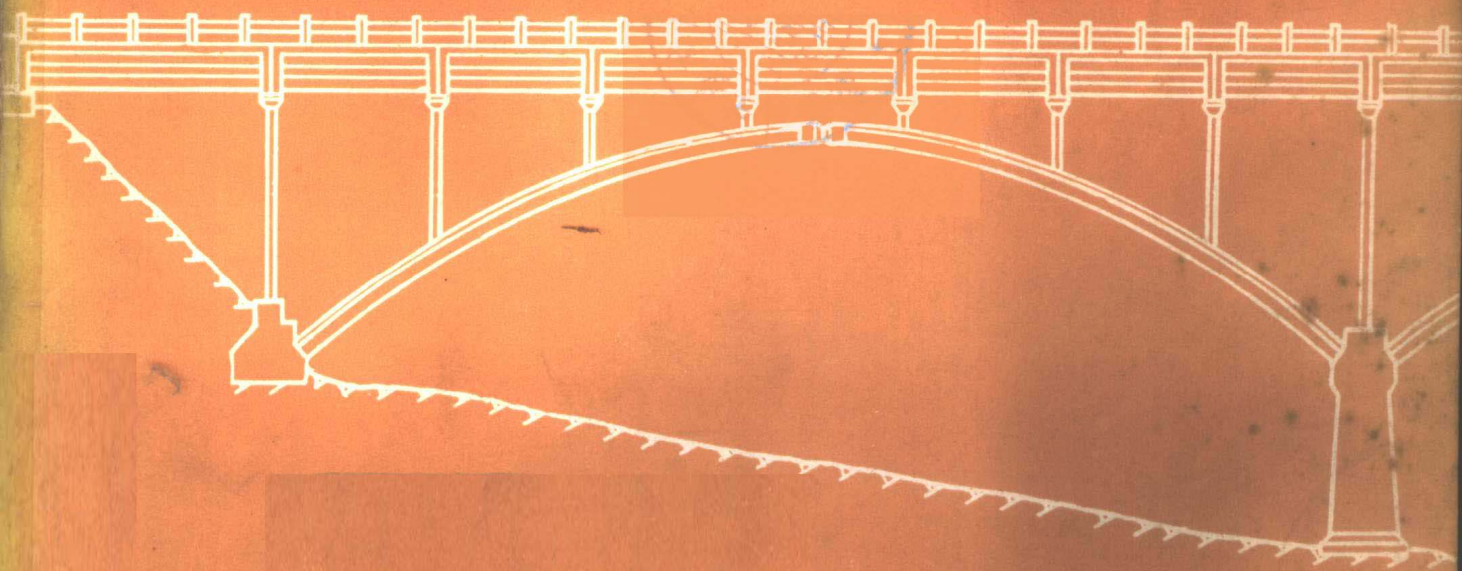


高等学校试用教材

结构力学

下 册

大连工学院 天津大学 编



人民教育出版社

高等学校试用教材

结 构 力 学

下 册

大连工学院 天津大学编

人 民 教 育 出 版 社

本书是根据一九七七年十一月教育部委托召开的高等学校工科基础课力学教材会议讨论的结构力学教材编写大纲编写的。

全书共十二章,分上、下两册出版。上册共七章,主要阐述静定结构的内力计算、弹性结构的位移计算、力法原理及其在计算超静定刚架和桁架中的应用、用位移法计算刚架和连续梁、力矩分配法、结构影响线的绘制及其应用。下册共五章,主要阐述杆系结构矩阵位移法、超静定拱的内力计算、柔性支座结构的计算、弹性地基上梁的计算、结构动力计算,有关能量法的问题在附录中阐述。

本书可作为高等学校工科水利类各专业结构力学课程的试用教材,也可供有关工程技术人员参考。

高等学校试用教材

结 构 力 学

下 册

大连工学院 天津大学编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 17 字数 380,000

1980年8月第1版 1981年2月 第1次印刷

印数 00,001—11,000

书号 15012·0267 定价 1.45 元

结构力学(下册)

目 录

第八章 矩阵位移法1	§ 11-3 弹簧地基假定下的基本方程及其解答.....126
§ 8-1 概述.....1	§ 11-4 用初参数法解弹簧地基上的梁.....133
§ 8-2 直接刚度法的基本概念.....1	§ 11-5 弹簧地基上半无限长梁的计算.....144
§ 8-3 杆元划分及杆端力、杆端位移的表示方法.....3	§ 11-6 弹簧地基上无限长梁的计算.....150
§ 8-4 杆元的刚度矩阵.....5	§ 11-7 半无限弹性体上梁的计算.....153
§ 8-5 结构坐标系与杆元坐标系——坐标转换矩阵.....11	§ 11-8 连杆法计算弹性地基上梁的基本概念.....155
§ 8-6 方程的建立及结构总刚度矩阵的形成.....17	§ 11-9 混合法方程的建立.....156
§ 8-7 矩阵位移法方程和支承条件的引入.....24	§ 11-10 混合法方程的解算.....164
§ 8-8 结构内力和支座反力的求解.....26	§ 11-11 对称性的利用.....166
§ 8-9 矩阵位移法的解题步骤.....27	§ 11-12 边荷载作用下弹性地基上梁的计算.....171
§ 8-10 不考虑杆元轴向变形时的刚架计算.....28	第十二章 结构动力计算174
§ 8-11 矩阵位移法解刚架、连续梁和桁架的例题.....30	§ 12-1 概述.....174
§ 8-12 矩阵位移法解平面结构框图.....38	§ 12-2 单自由度体系的自由振动(不计阻尼).....179
第九章 超静定拱42	§ 12-3 单自由度体系的强迫振动(不计阻尼).....187
§ 9-1 概述.....42	§ 12-4 阻尼对单自由度体系振动的影响.....199
§ 9-2 平面曲杆的位移计算.....43	§ 12-5 多自由度体系的自由振动.....209
§ 9-3 两铰拱的计算.....46	§ 12-6 用迭代法计算结构的基本频率和振型.....219
§ 9-4 无铰拱的计算.....51	§ 12-7 用能量法计算结构的固有频率.....222
§ 9-5 闭合结构的计算.....59	§ 12-8 简谐荷载作用下、多自由度体系强迫振动.....232
§ 9-6 数值解法.....65	§ 12-9 用振型分解法解多自由度体系的强迫振动.....236
§ 9-7 温度改变及支座移动时内力计算.....72	附录 能量法242
§ 9-8 弹性支座无铰拱的计算.....76	一、变形能法.....242
§ 9-9 柱比法概述.....84	二、最小势能法.....251
第十章 柔性支座结构的计算95	三、余能法.....256
§ 10-1 概述.....95	四、卡氏第二定理.....259
§ 10-2 力法解柔性支座连续梁.....97	参考书目266
§ 10-3 矩阵位移法计算柔性支座结构.....114	
第十一章 弹性地基上梁的计算123	
§ 11-1 概述.....123	
§ 11-2 关于计算地基反力的几种假定.....123	

第八章 矩阵位移法

§ 8-1 概 述

在应用经典的力法、位移法和混合法解结构问题时,若基本未知量数目较多,则需建立和求解多元代数方程组,用手工计算是极为冗繁和困难的。矩阵的应用和电子计算机的出现促使包括结构力学在内的许多领域发生了巨大变革,过去认为相当繁难的问题,现在可以较容易地解决了。矩阵这一数学工具较早曾应用到结构力学中,但当时所起的作用不大。电子计算机出现以后,通过矩阵这一工具将经典的位移法、力法、混合法与电子计算机的应用联系了起来,形成了矩阵位移法、矩阵力法、矩阵混合法,统称为矩阵解法,显示了矩阵这一数学工具的巨大优越性。结构的矩阵解法通常是指对杆系结构的解法,也可称为杆系结构的有限元法,至于通常所说的有限元法,则是指弹性理论和塑性理论等各种问题的解法。结构矩阵解法和有限元法目前已广泛地应用在航空、航天、造船、水利以及建筑等各个领域。

结构矩阵解法中的主要方法是矩阵位移法(刚度法)和矩阵力法(柔度法),两者都是以矩阵代数作为数学工具。在电算中,矩阵力法不如矩阵位移法简便,故采用不多。矩阵位移法又分为一般刚度法和直接刚度法,而后者更便于自动化计算,故得到广泛应用。因此,本章仅讲述直接刚度法。

§ 8-2 直接刚度法的基本概念

直接刚度法解结构问题的途径是:将结构离散为若干单元,对每一单元建立它的单元刚度矩阵,确定其单元的杆端力和杆端位移的关系。再将杆元刚度矩阵集合起来,建立结构的刚度矩阵,确定结构结点力与结点位移的关系。然后引入荷载列阵,列出刚度方程,解刚度方程得到结点的位移。当结点位移解出后,应用各单元刚度矩阵可求得各杆端内力,进而求出整个结构的内力。由于结构的刚度矩阵是将单元刚度矩阵按一定的规则进行集合,从而是直接形成的,故凡采用这样的方法形成结构刚度矩阵的解法即称为直接刚度法。

矩阵位移法与第五章的位移法一样,都是以结构结点位移(包括结点角位移和结点线位移)作为基本未知量。故分析结构时,首先须确定独立结点位移的个数,如忽略结点之间距离的改变量,则基本未知量数即如§ 5-2 所阐述。如不忽略结点之间距离的改变量,则平面刚架的每一个刚结点有三个基本未知量,即沿坐标轴 x 方向的线位移 u 、沿 y 方向的线位移 v 和结点在平面内的转角 θ 。平面桁架的每一个铰结点有两个基本未知量,即沿 x 方向的线位移 u 和沿 y 方向的线位移 v 。空间刚架的每一个刚结点有六个基本未知量,即沿 x 、 y 、 z 轴方向的三个线位移 u 、 v 、 w 和绕 x 、 y 、 z 轴的三个转角 θ_x 、 θ_y 、 θ_z ; 空间桁架的每一个铰结点有三个基本未知量,即沿 x 、 y 、 z 轴方向的三个线位移 u 、 v 、 w 。可见,在不忽略结点之间距离的改变量(即认为杆件变形后两个

端点之间的距离将发生变化)的前提下,各结点之间的线位移是彼此独立的,这就是说独立结点线位移将比第五章所述者增加很多。

若杆件的端点与支座(不论是什么支座)相联结,则对这个端点可以有两种不同的处理方式,一种是把它作为结点,另一种是不把它作为结点。前一种处理方式虽然将使结点位移数增多,但更便于电算,故采用较多。

确定位移未知量之后就要将结构离散化,也就是分割,把结构分割为若干个单元。这一概念在第五章中已经建立,即把整体分为若干局部。一般,以一个直杆作为一个单元(杆元)。然后将结构视为若干个分离的杆元的集合,即用结点将杆元集合起来。

图 8-1a, 示一平面刚架, 结点 O 承受着荷载 P 和 M 。假设杆的轴向长度不变, A 、 B 、 C 三端为固定支座, 则结点 O 不会产生线位移, 仅产生转角 θ_o 。由于荷载的作用, 结构的每个杆元将产生内力和变形。用刚度法分析此结构, 首先将结构离散为 OA 、 OB 、 OC 三个杆元, 如图 8-1b 所示。每个杆元的端点一般应有杆端力和杆端位移, 但在支座处的杆端位移将受到限制, 如本例中的固定支座 A 、 B 、 C 处的杆端位移 u 、 v 、 θ 应为零。图 8-1b 中 X 、 Y 分别表示沿 x 、 y 轴方向的杆端力, 而 M 表示杆端弯矩(杆端力和杆端弯矩可统称为杆端力), 括号内的 u 、 v 、 θ 分别表示沿与各杆端力相应的杆端位移。

图 8-1c 表示结点 O 所受的力, 这个结点在荷载和各杆端对结点的作用力的共同作用下保

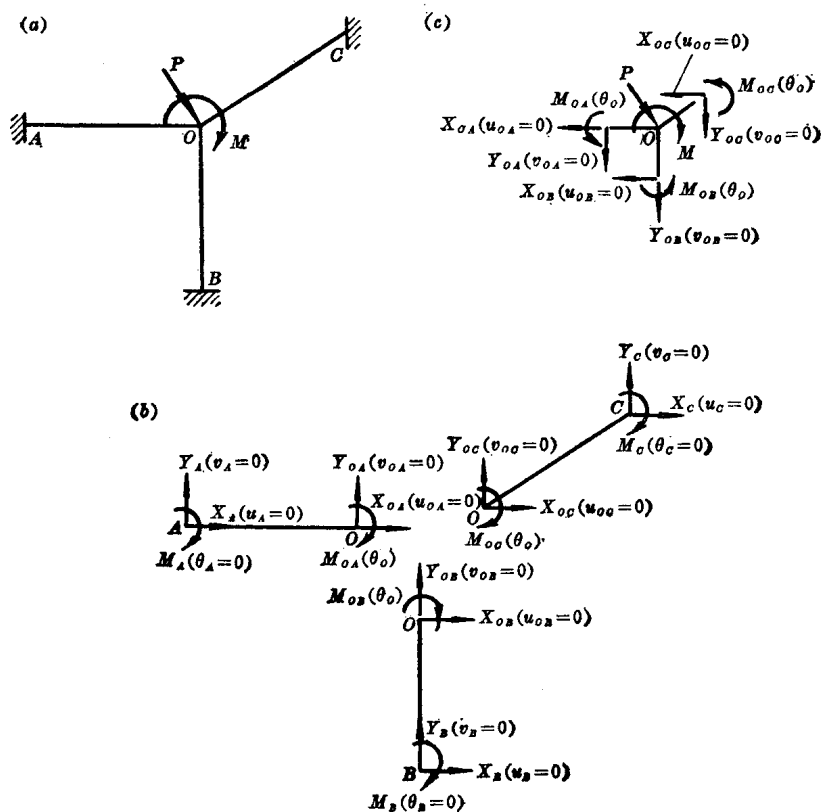


图 8-1

持平衡。就是说通过结点 O 的平衡条件, 可以建立起荷载和杆端力的关系。这个结构通过结点 O , 把三个杆元联结集合起来, 根据位移协调条件, 结点 O 的转角 θ_o 就是 AO 、 BO 、 CO 三杆元 O 端的杆端转角。如果, 每个杆元的杆端力和杆端位移的关系能够找到, 那么将这个关系代入上述平衡条件, 就可建立起荷载与结点位移 θ_o 的关系。

用刚度法分析结构必须: 1. 确定结点位移数。2. 把结构分割成许多单元(即离散化)。3. 建立结点力(与杆端力等值但反向)和结点荷载之间的关系方程, $\Sigma X=0$ 、 $\Sigma Y=0$ 、 $\Sigma M=0$ (即满足静力平衡关系)。4. 将离散的杆元集合起来(即满足几何关系)。5. 建立各杆元的杆端力和杆端位移之间的关系(即满足物理关系)。6. 建立结点荷载和结点位移的关系方程。对每一个结点都可建立起一组结点荷载与结点位移的关系。这样, 对整个结构各个结点建立起来的全部方程, 就构成了矩阵位移法的基本方程。亦称刚度方程。

由以上所建立的基本方程, 可解出各结点的全部位移, 然后利用杆端力和杆端位移的关系解出杆端力, 从而求出各杆的内力。

由于本章所用的杆端力和杆端位移之间的关系式是在杆件上没有荷载的条件下推导出来的, 所以用本章方法求解的问题, 其荷载必须是作用在结点上的集中力和集中力偶, 即结点荷载。

若荷载不是作用在结点上, 而是作用在杆上, 这时就需要将其转换为等效的结点荷载。图 8-2a 为一连续梁, 连续梁上结点 B 、 C 之间有荷载, 此种荷载叫做结间荷载。对结间荷载转换为结点荷载的方法是: 第一步在 B 、 C 结点加约束装置, 使其不能发生任何位移, 然后施加结间荷载, 如图 8-2b 所示。这时, BC 杆的 B 端和 C 端均产生

了固端剪力和固端弯矩。第二步, 在 B 、 C 结点没有约束装置情况下施加与上述固端剪力和固端弯矩大小相等方向相反的力和力矩, 如图 8-2c 所示。图 8-2b 与图 8-2c 叠加的结果应完全等于图 8-2a 的情况。图 8-2b 中的结点 B 、 C 由于设置了约束装置, 故在结间荷载作用下不会产生位移。因此, 图 8-2c 中结点 B 、 C 产生的位移就是图 8-2a 中这两个结点的实际位移。求结点位移时我们就可以用图 8-2c 中结点受到的力来代替结间荷载, 这样的力就称为等效结点荷载。如果在 AB 、 CD 段梁上也有结间荷载, 则等效结点荷载应为

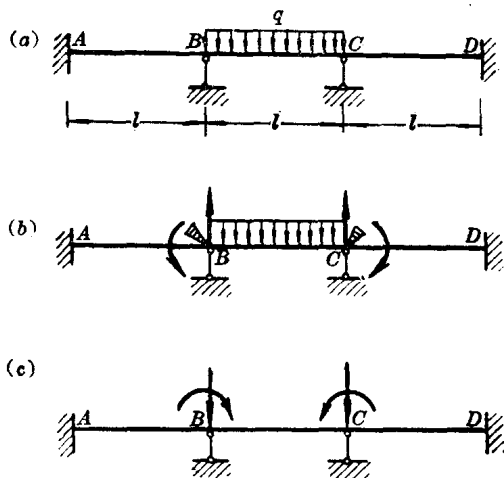


图 8-2

汇交在每一结点的固端剪力的代数和以及固端弯矩的代数和, 但方向相反。

§ 8-3 杆元划分及杆端力、杆端位移的表示方法

在本章中所研究的杆元, 均为等截面直杆, 若结构上的荷载都是结点荷载, 则结构中的每一根等截面直杆就是一个杆元。当有若干个集中力或集中力偶作用在某一杆上时, 一般可按上节

所述方法,将荷载变为等效结点荷载;但也可以将力的作用点作为结点,即将杆件分为数段,这样荷载即构成结点荷载。后一种作法增加了结点数,即增加了基本未知量的数目。在阶形杆中,取具有相同 EI 值的一段作为一个杆元。如图 8-3a 为一铰接刚架或称排架, AB 、 CD 柱均为变截面柱,柱子下部 AE 、 CF 段断面大一些,柱子上部 EB 、 FD 段断面小一些,故分别取 AE 、 EB 、 CF 、 FD 为杆元。图 8-3b, AB 为一两端固定的梁,中间部分截面较小,两边部分截面较大,故分别取 AC 、 CD 、 DB 为杆元。

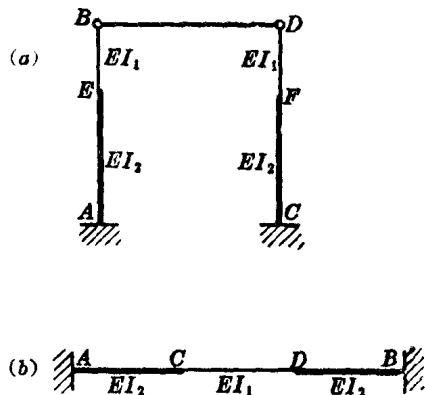


图 8-3

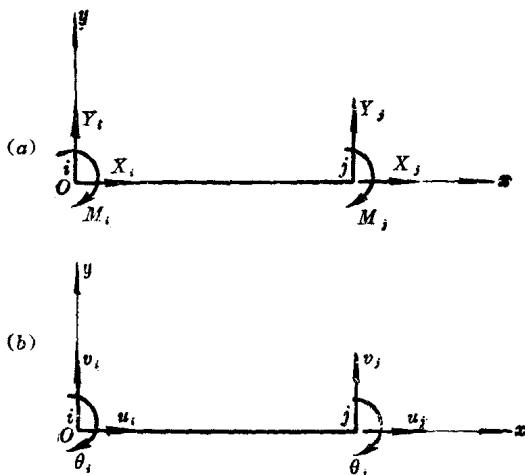


图 8-4

在荷载作用下,一个杆元的两端有杆端力和相应的杆端位移。需要注意的是在本章中杆端力与杆端位移的表示符号及正方向的规定与第五章不同。

在平面结构中,当以杆元的轴线为坐标轴的 x 轴时,杆元的杆端力和杆端位移的正方向如图 8-4 所示。

杆端力 X 表示杆端轴向力,其指向以和 x 轴的正向相同时为正。杆端力 Y 表示杆端横向力, Y 的指向以和 y 轴正向相同时为正。 M 表示杆端弯矩,以顺时针向为正。

杆端位移 u 和杆端力 X 相对应, u 的指向以和 x 轴正向相同时为正。杆端位移 v 和杆端力 Y 相对应, v 的指向以和 y 轴正向相同时为正。位移 θ (杆端转角)和杆端力 M 相对应, θ 角以顺时针向为正。

某杆件 ij 的杆端力和杆端位移,可用列矩阵(列向量)表示,杆件结点的排列顺序为自左至右(或自下至上)即自 i 至 j 。在每一结点处杆端力按 X 、 Y 、 M 的顺序排列,杆端位移按 u 、 v 、 θ 的顺序排列。

ij 杆的杆端力的列矩阵为

$$S^d = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (8-1)$$

式中: $\mathbf{S}^d$ ——杆端力向量, 上标“d”表示杆件单元;

X_i, Y_i, M_i ——杆元 i 端的杆端力;

X_j, Y_j, M_j ——杆元 j 端的杆端力。

i, j 杆的杆端位移的列矩阵为

$$\Delta^d = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (8-2)$$

式中: Δ^d ——杆端位移向量;

u_i, v_i, θ_i ——杆元 i 端的杆端位移;

u_j, v_j, θ_j ——杆元 j 端的杆端位移。

式(8-1)、式(8-2)还可以写成以下更简单的形式。

$$\mathbf{S}^d = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_i \\ \mathbf{S}_j \end{Bmatrix} \quad (8-3)$$

式中

$$\mathbf{S}_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S}_j = \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \\ M_j \end{Bmatrix}$$

$$\Delta^d = \begin{Bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_j \end{Bmatrix} \quad (8-4)$$

式中:

$$\Delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}, \quad \Delta_j = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

§ 8-4 杆元的刚度矩阵

为建立结构的结点力与结点位移的关系, 首先要分析每一杆元的杆端力与杆端位移的关系。

我们所研究的杆件是在线弹性范围内, 即作用于杆元上的力与位移的关系是服从虎克定律的。设一弹簧在荷载 P 作用下伸长 Δ , 由虎克定律得出以下关系:

$$P = k \cdot \Delta \quad (8-5)$$

荷载 P 与伸长量 Δ 成正比关系。 k 为一系数, 其物理意义是使弹簧产生单位伸长时所需要的作用力, 通常把 k 称为弹簧的刚度系数。

式(8-5)也可写为

$$P = \frac{1}{\delta} \cdot \Delta \quad (8-6)$$

或

$$\Delta = \delta \cdot P \quad (8-6a)$$

比较式(8-5)与式(8-6)可以看出 $\delta = \frac{1}{k}$ 。 δ 称为柔度系数, 其意义是在单位力作用下沿力作用方向所产生的位移。

对一杆元, 当杆端仅有轴向力作用时, 则与以上弹簧相似, 这时杆元的刚度系数, 是表示沿杆轴方向产生单位位移时所需施加的相应的作用力, 也符合式(8-5)的关系。当杆元两端不仅有轴向力和轴向位移而且还有其他的杆端力和杆端位移, 则杆端力和杆端位移的关系就要复杂一些。对于一个杆元列出杆端力与杆端位移的关系式, 将该式中各项的系数写成矩阵形式, 就叫做杆元的刚度矩阵。

现将平面结构的杆元刚度矩阵列举如下

一、杆元两端为刚性联结

图 8-5 所示杆元 ij 发生位移, i 端线位移为 u_i, v_i 、转角为 θ_i ; j 端线位移为 u_j, v_j 、转角为 θ_j 。 i 端相应的杆端力为 X_i, Y_i, M_i ; j 端相应的杆端力为 X_j, Y_j, M_j 。杆长为 l 。用 S^d 和 Δ^d 表示杆端力和杆端位移, 即

$$S^d = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{Bmatrix}, \quad \Delta^d = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

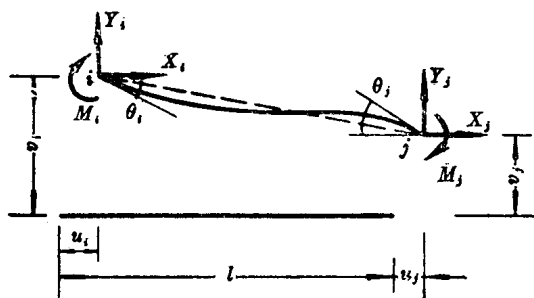


图 8-5

上二式即(8-1)及(8-2)式。

图 8-5 杆元 ij , 可视为两种情形的叠加, 一种情形是杆端只有弯矩和横向力; 另一种情形是只有轴向力。根据叠加原理, 这两种情形叠加后即相当于原来的状态。

对第一种情形可应用第五章位移法解刚架中的转角位移方程式(5-3), 现用下标 ij 代替原方程中的下标 AB , 可得到

$$\begin{aligned} M_{ij} &= 2i(2\theta_i + \theta_j - 3\varphi_{ij}) + M_{ij}^c \\ M_{ji} &= 2i(2\theta_j + \theta_i - 3\varphi_{ji}) + M_{ji}^c \end{aligned} \quad (8-7)$$

此转角位移方程, 就是杆端力与杆端位移的关系方程。式中 M_{ij}^c 和 M_{ji}^c 为荷载作用所产生的固端弯矩。现杆元上无荷载作用, 故无此项。用 $\frac{v_i - v_j}{l}$ 代替上式中的 φ_{ij} , 并将 M_{ij}, M_{ji} 写为 M_i, M_j , 则有

$$\begin{aligned} M_i &= 2i \left(2\theta_i + \theta_j - 3 \frac{v_i - v_j}{l} \right) \\ &= \frac{4EI}{l} \theta_i + \frac{2EI}{l} \theta_j - \frac{6EI}{l^2} v_i + \frac{6EI}{l^2} v_j \\ M_j &= 2i \left(2\theta_j + \theta_i - 3 \frac{v_i - v_j}{l} \right) \end{aligned} \quad (8-8)$$

$$= \frac{2EI}{l} \theta_i + \frac{4EI}{l} \theta_j - \frac{6EI}{l^2} v_i + \frac{6EI}{l^2} v_j$$

在小变形条件下, 可以忽略 X_i, X_j 对杆元任一点的力矩, 这样, 从静力平衡条件得到。

$$\begin{aligned} Y_i &= -\frac{M_i + M_j}{l} \\ Y_j &= +\frac{M_i + M_j}{l} \end{aligned} \quad (8-9)$$

将式(8-8)代入式(8-9)又得

$$\begin{aligned} Y_i &= -\frac{6EI}{l^2} \theta_i - \frac{6EI}{l^2} \theta_j + \frac{12EI}{l^3} v_i - \frac{12EI}{l^3} v_j \\ Y_j &= \frac{6EI}{l^2} \theta_i + \frac{6EI}{l^2} \theta_j - \frac{12EI}{l^3} v_i + \frac{12EI}{l^3} v_j \end{aligned} \quad (8-10)$$

(8-8)、(8-10)二式中的各系数如 $\frac{4EI}{l}, \frac{2EI}{l}, -\frac{6EI}{l^2}, \frac{6EI}{l^2}, \frac{12EI}{l^3}, -\frac{12EI}{l^3}$ 等分别表示杆件某端产生单位位移(角位移或横向线位移)时, 在自己这一端或另端所需施加的力矩或横向力, 这些系数就是表 5-2 中所列的形常数, 但使用表 5-2 时须注意横向力 Y 及横向位移 v 的正负号必须遵循本章的规定。

式(8-8)和式(8-10)合在一起, 写成矩阵形式即为

$$\begin{Bmatrix} Y_i \\ M_i \\ Y_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (8-11)$$

对第二种情形, 根据虎克定律得到

$$X_i = -X_j = \frac{EA}{l} (u_i - u_j)$$

即

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{EA}{l} u_i - \frac{EA}{l} u_j \\ X_j &= -\frac{EA}{l} u_i + \frac{EA}{l} u_j \end{aligned} \quad (8-12)$$

式(8-12)写成矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (8-13)$$

综合第一、二两种情形, 得杆元 ij 的杆端力与杆端位移的关系如下:

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (8-14)$$

或简写为:

$$S^d = k^d \Delta^d \quad (8-15)$$

式中 k^d 为杆元 ij 的刚度矩阵, 它是平面结构中最一般情形的杆元刚度矩阵, 即

$$k^d = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (8-16)$$

在实际计算中, 结点力和结点位移都要进行编号, 这是一项重要的工作。如 i 结点之力 X_i, Y_i, M_i 分别编号为 1、2、3; j 结点之力 X_j, Y_j, M_j 分别编号为 4、5、6。与力相应之位移采用和力同样的编号。刚度矩阵中第 m 行第 n 列元素写作 k_{mn} , 它是 (8-14) 式中与第 m 号力及第 n 号位移相对应的系数, 它的物理意义是: 在编号为 n 的单位位移发生时 (其他位移为零), 需要施加的编号为 m 的作用力。 k_{mn} 称为刚度系数。

二、杆元两端仅有轴向力作用

这时杆元 ij 两端的杆端弯矩和横向力均为零, 例如桁架中的杆元, 其杆元刚度矩阵就是 (8-13) 式, 从式 (8-16) 的刚度矩阵中去掉与杆端力矩和横向力相对应的行, 并去掉与杆端转角、横向位移所对应的列, 也可得到同样的结果, 即

$$k^d = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

这个刚度矩阵也可改写为

$$k^d = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-17)$$

式(8-17)是将式(8-16)中与杆端弯矩对应的行以及与杆端转角对应的列去掉, 并将其中与横向力对应的行以及与横向位移对应的列的系数写为零而得出的。这样将矩阵从 2×2 阶扩充到 4×4 阶, 以后要用到这种形式的矩阵。若利用式(8-17)形式的杆元刚度矩阵, 则杆端力应改写为 X_i, Y_i 和 X_j, Y_j , 杆端位移应改写为 u_i, v_i 和 u_j, v_j 。

三、杆元一端为刚性联结, 另一端为铰结

图 8-6 所示的杆元 ij , i 端为刚性联结, j 端为铰结。设 i 端水平方向位移为 u_i , 横向位移为 v_i , j 端水平方向位移为 u_j , 横向位移为 v_j 。仍然分为两种情形考虑, 即无轴向力作用的情形和仅承受轴向力

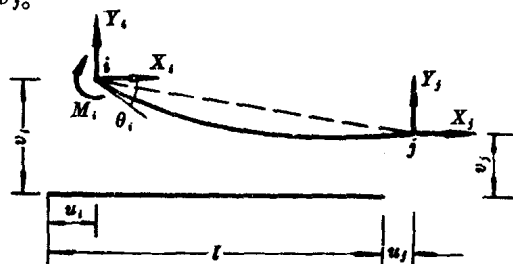


图 8-6

对第一种情形, 应用转角位移方程式(5-4), 将 AB 用 ij 代替, M_{AB} 写为 M_i , M_{BA} 写为 M_j , 用 $\frac{v_i - v_j}{l}$ 代替 φ_{AB} 并取消 M_{AB}^G 项, 得

$$\begin{aligned} M_i &= 3i \left(\theta_i - \frac{v_i - v_j}{l} \right) \\ M_j &= 0 \end{aligned} \quad (8-18)$$

忽略 X_i, X_j 对杆元各点的力矩, 则由平衡条件知

$$\begin{aligned} Y_i &= -\frac{M_i}{l} \\ Y_j &= \frac{M_i}{l} \end{aligned} \quad (8-19)$$

将式(8-18)代入式(8-19)得

$$\begin{aligned} Y_i &= -\frac{3i}{l} \left(\theta_i - \frac{v_i - v_j}{l} \right) \\ &= -\frac{3EI}{l^2} \theta_i + \frac{3EI}{l^3} v_i - \frac{3EI}{l^3} v_j \\ Y_j &= \frac{3EI}{l^2} \theta_i - \frac{3EI}{l^3} v_i + \frac{3EI}{l^3} v_j \end{aligned} \quad (8-20)$$

对第二种情形, 根据虎克定律, 知

$$X_i = \frac{EA}{l} (u_i - u_j) = \frac{EA}{l} u_i - \frac{EA}{l} u_j \quad (8-21)$$

$$X_j = -\frac{EA}{l}u_i + \frac{EA}{l}u_j$$

综合以上两种情形, 得到杆端力与杆端位移的关系

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (8-22)$$

则杆元 ij 的刚度矩阵为

$$k^d = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & & \\ & \frac{3EI}{l^3} & & & \\ & & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & \\ & & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l} & \\ -\frac{EA}{l} & & & & \frac{EA}{l} \\ & & & & & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{对} \\ \\ \\ \text{称} \end{matrix} \quad (8-23)$$

式(8-22)亦可写成与式(8-15)相同的形式, 即

$$S^d = k^d \Delta^d$$

从数学观点看, 杆元刚度矩阵是奇异矩阵, 其矩阵元素组成的行列式的值为零, 不存在逆矩阵。

对任意杆元 ij , 式(8-15)亦可写成如下的形式:

$$\begin{Bmatrix} S_i \\ S_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{ii} & \bar{k}_{ij} \\ \bar{k}_{ji} & \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_j \end{Bmatrix} \quad (8-24)$$

式中: S_i ——杆元 ij 的 i 端力向量;

S_j ——杆元 ij 的 j 端力向量;

Δ_i ——杆元 ij 的 i 端位移向量;

Δ_j ——杆元 ij 的 j 端位移向量;

$\bar{k}_{ii}$ 、 $\bar{k}_{ij}$ 、 $\bar{k}_{ji}$ 、 $\bar{k}_{jj}$ ——杆元刚度矩阵的子矩阵。杆元刚度矩阵的子矩阵, 代表了杆元的一组刚度系数, 与前面所讲的刚度系数 k_{mn} 不同的是, 这里的 $\bar{k}_{ij}$ 指的是杆元 ij 的 j 端分别产生轴

向、横向、转动三个方向的单位位移时,在 i 端需要施加的轴向力、横向力和力矩,但这些力是以集合起来的形式即矩阵的形式表示的。

下面举例来说明子矩阵的确定。

例如杆元两端为刚性联结时,杆端力与杆端位移的关系式,即式(8-14)改写为式(8-24)时,应有如下关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \end{Bmatrix}, & \mathbf{S}_j &= \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \\ M_j \end{Bmatrix} \\ \Delta_i &= \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}, & \Delta_j &= \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{k}}_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{2EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{ji} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{2EI}{l} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{k}}_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

可以看出式(8-24)更为简明。

若杆端约束方式不同因而需考虑的杆端力不同,则写出的杆端力向量、杆端位移向量以及杆元刚度矩阵的子矩阵也将不同。

杆元的刚度矩阵表示杆件两端位移及杆端力的关系。根据反力互等定理知杆元刚度矩阵中的元素 k_{mn} 和 k_{nm} 是相等的。即

$$k_{mn} = k_{nm} \quad (m \neq n)$$

从式(8-14)、(8-22)中所示的刚度矩阵均可以看出这种关系。由此可知,任何杆元刚度矩阵都是对称方阵。

§ 8-5 结构坐标系与杆元坐标系——坐标转换矩阵

刚度法将结构离散为若干杆元,建立杆元刚度矩阵,而后再集合起来,按结点的平衡条件,建立整个结构的刚度矩阵。

以上推导杆元刚度矩阵时,都是以杆轴为一个坐标轴,另一坐标轴与之垂直,这样的坐标系称杆元坐标系或局部坐标系。对于一个结构而言,需要规定一个统一的坐标系,称结构坐标系或整体坐标系。结构中各杆元的方向可能不完全相同,但在计算时必须把各杆元的力和位移的

方向都统一到结构坐标系上来,即必须进行从杆元坐标系变换到结构坐标系的工作。

为方便起见以下用带“'”的力和位移表示杆元坐标系的力和位移,不带“'”的力和位移表示结构坐标系的力和位移。

图 8-7a、b 中 xOy 是结构坐标系的坐标轴系。 $x'O'y'$ 是杆元坐标系的坐标轴系。杆元 ij 的轴线与 x 轴成 α 角。从 $x'O'y'$ 坐标系转到 xOy 坐标系以顺时针方向为正。从图 8-7a 中看出杆元坐标系中的杆端力 $S'_{ix}, S'_{iy}, S'_{jx}, S'_{jy}$ 转换到结构坐标系后,即转换为 $S_{ix}, S_{iy}, S_{jx}, S_{jy}$ 。从图 8-7b 中看出杆元坐标系中的杆端位移 $\Delta'_{ix}, \Delta'_{iy}, \Delta'_{jx}, \Delta'_{jy}$ 转换到结构坐标系后,即转换为 $\Delta_{ix}, \Delta_{iy}, \Delta_{jx}, \Delta_{jy}$ 。

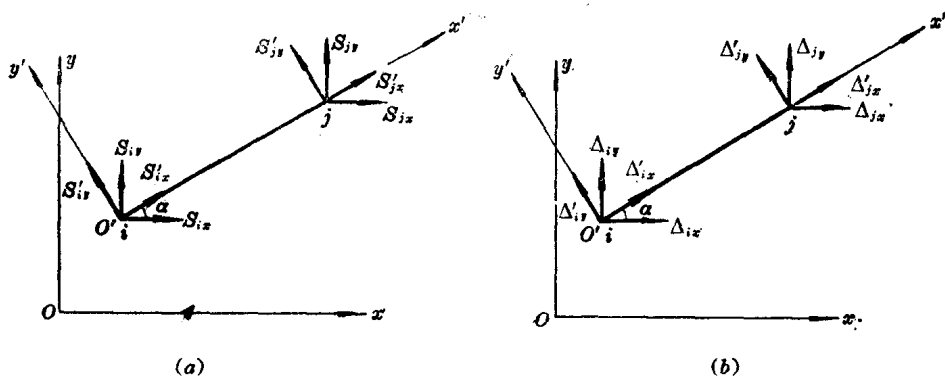


图 8-7

在图 8-7a 中,将结构坐标系的力 $S_{ix}, S_{iy}, S_{jx}, S_{jy}$ 向杆元坐标系 x' 轴和 y' 轴投影,就可以得到下列关系:

$$\begin{aligned} S'_{ix} &= S_{ix} \cos \alpha + S_{iy} \sin \alpha \\ S'_{jx} &= S_{jx} \cos \alpha + S_{jy} \sin \alpha \\ S'_{iy} &= -S_{ix} \sin \alpha + S_{iy} \cos \alpha \\ S'_{jy} &= -S_{jx} \sin \alpha + S_{jy} \cos \alpha \end{aligned} \quad (8-25)$$

若 ij 杆元还有杆端力矩 M'_i, M'_j 作用,则从杆元坐标系变换到结构坐标系时杆端力矩只改写为 M_i, M_j , 而不变其数值和方向,即

$$\begin{aligned} M'_i &= M_i \\ M'_j &= M_j \end{aligned}$$

将以上关系依照结点按 i, j 的顺序,杆端力按 S_x, S_y, M 的顺序,写成矩阵形式,就是

$$\begin{Bmatrix} S'_{ix} \\ S'_{iy} \\ M'_i \\ S'_{jx} \\ S'_{jy} \\ M'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{ix} \\ S_{iy} \\ M_i \\ S_{jx} \\ S_{jy} \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (8-26)$$

或缩写为

$$\begin{Bmatrix} S'_i \\ S'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{T} & 0 \\ 0 & \overline{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i \\ S_j \end{Bmatrix} \quad (8-26a)$$

式中:

$$\begin{aligned} S'_i &= \begin{Bmatrix} S'_{ix} \\ S'_{iy} \\ M'_i \end{Bmatrix}, & S'_j &= \begin{Bmatrix} S'_{jx} \\ S'_{jy} \\ M'_j \end{Bmatrix} \\ S_i &= \begin{Bmatrix} S_{ix} \\ S_{iy} \\ M_i \end{Bmatrix}, & S_j &= \begin{Bmatrix} S_{jx} \\ S_{jy} \\ M_j \end{Bmatrix} \\ \overline{T} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8-27)$$

令 $\cos\alpha = \lambda$; $\sin\alpha = \mu$, 则(8-27)式可改写为

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-27a)$$

式(8-26a)表明了杆端力在杆元坐标系和结构坐标系之间的关系。 $\overline{T}$ 称为转换子矩阵。

同理, 两坐标系的位移变换的关系是

$$\begin{aligned} \Delta'_{ix} &= \Delta_{ix}\cos\alpha + \Delta_{iy}\sin\alpha \\ \Delta'_{iy} &= -\Delta_{ix}\sin\alpha + \Delta_{iy}\cos\alpha \\ \Delta'_{jx} &= \Delta_{jx}\cos\alpha + \Delta_{jy}\sin\alpha \\ \Delta'_{jy} &= -\Delta_{jx}\sin\alpha + \Delta_{jy}\cos\alpha \end{aligned}$$

杆端角位移的变换关系是

$$\begin{aligned} \theta'_i &= \theta_i \\ \theta'_j &= \theta_j \end{aligned}$$

将以上写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \Delta'_{ix} \\ \Delta'_{iy} \\ \theta'_i \\ \Delta'_{jx} \\ \Delta'_{jy} \\ \theta'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & & & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ & & 0 & & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{ix} \\ \Delta_{iy} \\ \theta_i \\ \Delta_{jx} \\ \Delta_{jy} \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (8-28)$$

或缩写为

$$\begin{Bmatrix} \Delta'_i \\ \Delta'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{T} & 0 \\ 0 & \overline{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_j \end{Bmatrix} \quad (8-28a)$$