高等学校教材

概率论与数理统计

郭金吉 戴 沨 等编

化学工业出版社
教 材 出 版 中 心

概率论与数理统计

高 等 学 校 教 材

概率论与数理统计

郭金吉　戴　沨　徐明华　编
甘　泉　王　成　刘国庆

化 学 工 业 出 版 社
教 材 出 版 中 心
·北　京·

(京)新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/郭金吉等编．—北京：化学工业出版社，2003.1
高等学校教材
ISBN 7-5025-4280-9

Ⅰ．概… Ⅱ．郭… Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 100716 号

高等学校教材
概率论与数理统计
郭金吉　戴　沨　徐明华　甘　泉　王　成　刘国庆　编
责任编辑：唐旭华
责任校对：李　林
封面设计：潘　峰
*
化学工业出版社教材出版中心出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
发行电话：（010）64982530
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
北京市昌平振南印刷厂印刷
三河市宇新装订厂装订
开本 850 毫米×1168 毫米 1/32　印张 7　字数 180 千字
2003 年 1 月第 1 版　2003 年 1 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-4280-9/G・1145
定　价：12.00 元

前　　言

概率论与数理统计是工科大学生必修的重要基础课之一，其要求的内容既是基本的又是古典的. 面对 21 世纪培养创新人才的要求，本书内容应如何适应呢？这是我们编写本书遇到的第一个问题. 其二，在概率论与数理统计的教学中我们感到，初学者从表面上看似乎能理解概率统计的基本概念和方法，但却不会做题，做了也不知道做的对不对，更不会应用概率统计的理论和方法解决实际问题. 这除了是从确定性数学(如微积分、线性代数等)到随机性数学的不适应外，更关键的是用概率统计的方法解题(特别是应用题)，有一个通过分析将具体问题“翻译”成概率统计问题的过程，而初学者对此过程缺乏训练，也缺乏解决问题的方法. 这是我们在概率统计教学中必须面对和要解决的一个问题. 因此，在编写本书时，我们力求做到以下几点：

第一是在内容上，除了基本要求的内容外，还以“*”形式增加了一些在实际应用中常用的内容. 例如事件的概率增加了求概率的频率方法和主观方法；在数字特征中增加了偏度、峰度、中位数、众数、变异系数等，以适应不同专业的需求.

第二是在概念的引入上尽量通过具体实例或学生已有的知识引入概念，逐步培养学生从实际问题归纳、抽象数学问题即数学建模的能力. 在例题中，先分析题意，通过分析将具体例题归结为相应的概率统计问题，然后再计算. 通过这样的训练，使学生了解并逐渐掌握用概率统计的理论和方法解题（进一步地解决实际问题）的思想方法和步骤，以逐渐培养学生分析问题、解决问题的能力. 同时，在保证科学性的基础上，尽量做到通俗易懂，便于学生自学.

第三是注重应用，尽可能多地举一些概率统计在管理、经济、生产和日常生活中的例子. 通过这些例子，一方面使学生提高学习

兴趣，看到是怎样用概率统计的理论和方法解决实际问题的；另一方面通过解决实际问题，也可以激发学生的求知欲望，培养学生的创新和创造性思维能力.

第四是面对微机和许多数学软件的普及，我们将 MATLAB 引入概率统计教学. MATLAB 是集计算、可视化和编程等功能于一身的最流行的科学和工程计算软件之一. 我们在书中初步介绍了 MATLAB 的统计功能与应用，把计算机与概率统计教学有机地结合起来，以逐步实现教学的多样化.

第五是在数学符号的使用上，力求"统一"和国际标准化. 本书符号除按国家标准 GB 3102—93 外，兼用国际数学权威著作《数学大百科辞典》中的符号为标准. 对不在上述文献中的其他新符号，则选用较为流行者.

本书第 1、4 章由郭金吉、徐明华编写，第 2 章由戴沨编写，第 3 章由甘泉编写，第 5、7 章由刘国庆编写，第 6 章由王成编写. 最后由郭金吉、戴沨统稿.

本书得到南京工业大学教学改革基金资助，也是江苏石油化工学院重点课程建设项目，特此致谢.

由于我们水平有限，不尽如人意之处肯定存在，望读者批评指正.

编者

2002 年 9 月

目　　录

1　随机事件及其概率 …… 1

1.1　随机事件、频率与概率 …… 1

1.1.1　随机事件 …… 1

1.1.2　事件的关系及运算 …… 3

1.1.3　频率、概率 …… 5

1.2　概率的直接计算 …… 9

1.2.1　古典概型 …… 9

1.2.2　几何概型 …… 14

*1.2.3　统计概型——频率方法 …… 15

*1.2.4　经验概型——主观方法 …… 16

1.3　乘法公式 …… 19

1.3.1　条件概率 …… 19

1.3.2　乘法公式 …… 20

1.3.3　全概率公式和贝叶斯公式 …… 22

1.4　独立性 …… 26

1.5　独立试验概型 …… 29

习题1 …… 31

2　随机变量及其分布 …… 35

2.1　随机变量的概念 …… 35

2.2　离散型随机变量的概率分布 …… 36

2.2.1　离散型随机变量的概率分布 …… 36

2.2.2　几种常见的离散型分布 …… 38

2.3　连续型随机变量及其分布 …… 43

2.3.1　连续型随机变量的概率密度函数 …… 43

2.3.2　几种常见的连续型分布 …… 45

2.4　分布函数 …… 48

2.4.1　分布函数定义 …… 48

2.4.2 分布函数的性质 …… 49
2.4.3 正态分布的计算与 3σ 准则 …… 52
2.5 随机变量函数的分布 …… 54
2.5.1 离散型随机变量函数的分布 …… 54
2.5.2 连续型随机变量函数的分布 …… 56
习题 2 …… 58
3 多维随机变量及其分布 …… 61
3.1 二维随机变量及其分布 …… 61
3.1.1 联合分布 …… 61
3.1.2 二维离散型随机变量 …… 62
3.1.3 二维连续型随机变量 …… 63
3.1.4 边缘分布 …… 66
* 3.1.5 条件分布 …… 69
3.2 随机变量的独立性 …… 72
3.3 二维随机变量函数的分布 …… 74
3.3.1 和的分布 …… 74
3.3.2 最大值、最小值的分布 …… 80
3.3.3 一般函数 $\zeta=g(\xi,\eta)$的分布 …… 82
3.3.4 关于随机变量函数的独立性的一些结论 …… 83
习题 3 …… 84
4 随机变量的数字特征 …… 87
4.1 数学期望 …… 87
4.1.1 数学期望的概念 …… 87
4.1.2 随机变量函数的数学期望 …… 92
4.1.3 数学期望的性质 …… 95
4.2 方差 …… 97
4.2.1 方差的概念 …… 97
4.2.2 方差的性质 …… 100
4.3 协方差和相关系数 …… 101
4.4 随机变量的其他数字特征 …… 104
4.4.1 矩 …… 104
* 4.4.2 偏度 …… 105
* 4.4.3 峰度 …… 106

* 4.4.4 中位数 …… 106
* 4.4.5 众数 …… 107
* 4.4.6 变异系数 …… 107
4.4.7 协方差矩阵 …… 108
习题 4 …… 109
5 大数定律与中心极限定理 …… 112
5.1 契比晓夫(Chebyshev)不等式 …… 112
5.1.1 问题的提出 …… 112
5.1.2 契比晓夫(Chebyshev)不等式 …… 113
5.2 大数定律 …… 115
5.3 中心极限定理 …… 117
习题 5 …… 121
6 数理统计初步 …… 123
6.1 样本与统计量 …… 123
6.1.1 总体与样本 …… 123
6.1.2 样本分布函数 …… 124
6.1.3 样本矩 …… 125
6.1.4 统计量 …… 125
6.2 抽样分布 …… 126
6.2.1 样本均值的分布 …… 126
6.2.2 χ^2 分布 …… 126
6.2.3 t 分布 …… 127
6.2.4 F 分布 …… 129
6.3 参数估计 …… 130
6.3.1 点估计 …… 130
6.3.2 估计量的评选标准 …… 137
6.3.3 区间估计 …… 142
6.4 正态总体参数的假设检验 …… 146
6.4.1 假设检验的基本概念 …… 146
6.4.2 两类错误 …… 149
6.4.3 双侧(边)检验、单侧(边)检验 …… 150
6.4.4 单个正态总体参数的假设检验 …… 150
6.4.5 关于两个正态总体参数的假设检验 …… 156

* 6.5 分布的假设检验 …… 160
6.5.1 离散型总体的 χ^2 检验 …… 161
6.5.2 连续型总体的 χ^2 检验 …… 164
习题 6 …… 166
7 概率统计与 MATLAB …… 172
7.1 MATLAB 工具箱中的概率分布与数字特征 …… 172
7.1.1 概率密度函数的计算 …… 172
7.1.2 分布函数的计算 …… 174
7.1.3 逆概率分布的计算 …… 175
7.1.4 求随机变量的数字特征 …… 175
7.2 参数估计 …… 176
7.2.1 数据的录入、保存和调用 …… 176
7.2.2 几种常见分布的参数估计 …… 178
7.3 假设检验 …… 181
7.3.1 正态总体参数的假设检验 …… 181
7.3.2 分布的假设检验 …… 182
附录 …… 184
附录 1 标准正态分布函数表 …… 184
附录 2 泊松分布表 …… 185
附录 3 t 分布表 …… 187
附录 4 χ^2 分布表 …… 189
附录 5 F 分布表 …… 192
习题参考答案 …… 203

1 随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律的一门数学学科，是最富有生命力的一门学科，它广泛应用于自然科学、社会科学、工程技术、工农业生产和军事技术中，并且正广泛地与其他学科互相渗透和结合，成为近代经济理论、管理科学等学科的应用、研究中的重要工具，也是科学家和工程师、经济师们最常用的工具.

本书由两大部分组成：第一部分（第1章～第5章）为概率论；第二部分（第6、7章）为数理统计初步和MATLAB的统计功能及其应用.

1.1 随机事件、频率与概率

1.1.1 随机事件

随机事件是本课程中最基本的概念之一，为此，我们先介绍随机事件的有关概念.

在日常生活和工作中，人们常常遇到两类现象：一类是在一定条件下必然发生或必然不发生的现象. 例如在一个标准大气压下水到100℃必然沸腾；同性电荷互相排斥. 这类现象称为确定性现象. 我们学过的微积分、微分方程和线性代数就是研究这一类确定性规律的. 另一类是在一定条件下可能发生也可能不发生的现象，即其结果带有偶然性，我们无法事先确知其结果，即使在同样条件下重复试验（或观测），其结果也未必相同，而有各种可能结果且这些结果有一定规律可循，这类现象称为随机现象. 例如在同样条件下掷一枚均匀硬币，其结果不是正面向上就是反面向上. 我们虽然无法预言单独掷一次的结果如何，但我们发现抛掷次数足够多时出现正面和反面的次数差不多. 从一批灯泡中任取一只，其使用寿

命不尽相同，但其寿命介于某一范围的可能性大小确是客观存在的量．概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律的一门数学学科．

注意，随机现象是与一定的条件相联系的．概率统计所研究的随机现象是指在一定条件下能够重复实现（称为随机试验，简称试验）的随机现象．

进行一次试验，总有一定的目的，根据这个目的，试验有多种不同结果．我们称试验的每一个可能结果为随机事件，简称事件．事件用英文大写字母 A，B，C，…表示．例如，抛掷一枚硬币，“出现正面”、“出现反面”都是随机事件；掷一颗骰子，观察出现的点数，“出现 1 点”、“出现 2 点”、…、“出现 6 点”（分别记为 A_1，A_2，…，A_6）都是随机事件，“出现偶数点”、“出现奇数点”（分别记为 B_1，B_2）也是随机事件．仔细分析一下，前者（A_1，A_2，…，A_6）是不能再细分的，而后者（B_1，B_2）可以分解，如 B_1（“出现偶数点”）是由 A_2，A_4，A_6 复合而成，B_2 是由 A_1，A_3，A_5 复合而成．

我们把不能再分的事件称为基本事件，而可分解的事件称为复合事件．例如，掷一颗骰子，A_1，A_2，…，A_6 为基本事件，B_1，B_2 为复合事件．

但要注意，一个事件是否不能再分是相对的，而非绝对的，即是相对于试验目的而言．如掷一颗骰子，若目的是观察出现的点数，则 A_1，A_2，…，A_6 为基本事件；若只关心奇偶点，则 B_1，B_2 为基本事件．再如，测量人的身高，若目的是确定应购全票、半票还是免票，则基本事件只有三个：C_1（全票，身高 $>1.4\mathrm{m}$），C_2（半票，$1.4\mathrm{m}\geqslant$ 身高 $\geqslant 1.2\mathrm{m}$），C_3（免票，身高 $<1.2\mathrm{m}$）；若测量的目的是身高的高度值（单位：m），则 $[m_1, m_2]$ 中任一实数都是一个基本事件（其中 m_1，m_2 分别表示人身高的最小、最大值），而 C_1，C_2，C_3 则是复合事件．

在一次试验中，称所有基本事件的集合为试验的样本空间，记为 Ω．这时又可将基本事件称为样本空间的样本点．如掷一颗骰

子，观察出现的点数，则样本空间 $\Omega=\{A_i \mid i=1, 2, \cdots, 6\}$，其中 A_i 表示出现 i 点事件.

为今后研究方便，将在一定条件下必然发生或必然不发生的现象分别称为必然事件与不可能事件，分别记为 Ω 和 Φ.

1.1.2 事件的关系及运算

为研究随机现象的统计规律，我们不仅要研究随机事件本身，还需要研究事件的关系及运算.

① **包含**：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称 A 包含于 B（如图 1.1.1 (a)），记为

$$B \supset A \quad \text{或} \quad A \subset B$$

例 1.1.1 一批产品有合格品与不合格品. 从这批产品中任取 3 件，用 A_1 表示至少有一件合格品，A_2 表示有一件合格品，则

$$A_2 \subset A_1.$$

例 1.1.2 某动物生长过程中，A 表示活到 4 岁，B 表示活到 6 岁，则 B 发生时 A 一定发生，故

$$B \subset A$$

② **相等**：若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 和事件 B 相等，记为

$$A=B$$

③ **和**：称“事件 A 与 B 中至少有一个发生”事件为 A 与 B 的和事件，记为

$$A \cup B \text{（如图 1.1.1 (b)）}.$$

例 1.1.3 在例 1.1.1 的条件下，令 A_3 表示任取 3 件产品有 2 件是合格品，A_4 表示任取 3 件产品均为合格品，则 $A_3 \cup A_4$ 表示任取 3 件产品至少有 2 件是合格品事件.

类似可定义 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

④ **积**：称“事件 A 与 B 同时发生”事件为 A 与 B 的积事件，记为

$$A\cap B \text{ 或 } AB\text{（如图 1.1.1（c））}.$$

例 1.1.4 在例 1.1.2 中 $A\cap B=AB=B$.

例 1.1.5 在例 1.1.1 的条件下，A_5 表示任取 3 件产品最多有一件合格品，则 A_1A_5 是任取 3 件产品只有一件是合格品事件.

类似可定义 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件，记为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i.$$

⑤ **差**：称"事件 A 发生而 B 不发生"事件为 A 与 B 的差，记为

$$A-B\text{（如图 1.1.1（d））}.$$

例 1.1.6 在例 1.1.1 的条件下，令 A_6 表示任取 3 件产品至少有二件合格品，则 A_1-A_6 是任取 3 件产品只有一件是合格品事件.

⑥ **互斥**（或互不相容）：若事件 A 与 B 不可能同时发生，即

$$AB=\Phi.$$

则称 A 与 B 为互斥事件或互不相容事件（如图 1.1.1（e））.

例 1.1.7 在例 1.1.1 的条件下，令 A_7 表示任取 3 件产品全是不合格品，则 A_2 与 A_7 互斥，A_1 与 A_7 互斥.

若 A，B 互斥，则记

$$A\cup B=A+B.$$

若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中任意两个事件都互斥，即

$$A_iA_j=\Phi,(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **两两互斥（或两两互不相容）.**

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则记

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\sum_{i=1}^{n}A_i.$$

⑦ **对立事件（或逆事件）**：若 $A\cap B=\Omega$，$AB=\Phi$ 则称 A 与 B 是对立的（或互逆的），并称 B 是 A 的对立事件（或逆事件），记为

$$B=\overline{A}\text{（如图 1.1.1（f））}.$$

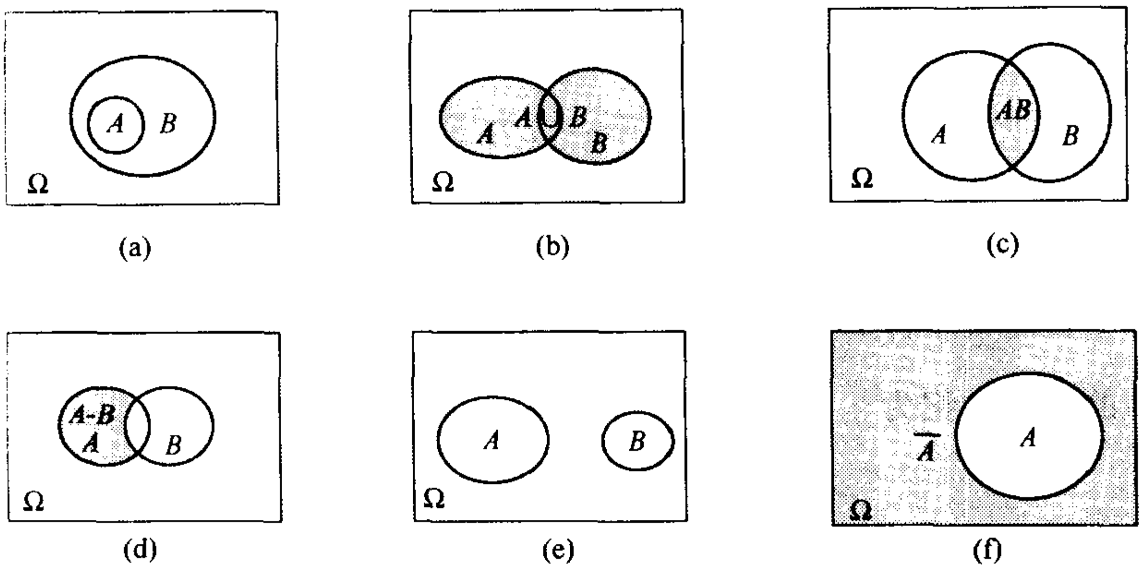

图 1.1.1

例 1.1.8 在例 1.1.1 的条件下，A_1 与 A_7 互逆，且 $A_1=\overline{A_7}$ 或 $A_7=\overline{A_1}$.

由以上事件的运算定义可知，事件的运算与集合的运算完全类似，因此事件也有类似集合运算的**性质**：

① $\overline{\overline{A}}=A$，$A+\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\Phi$.

② $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上两式可推广至 n 个事件情况：$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

③ $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$.

一般地，
$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)B=\bigcup_{i=1}^{n}(A_iB).$$

例 1.1.9 将 $A\cup B$ 分成互斥事件之和.

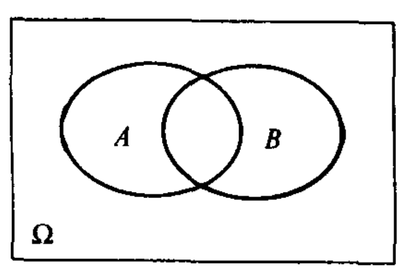

图 1.1.2

解 如图 1.1.2 所示，有

$$\begin{aligned}A\cup B&=(A-B)+AB+(B-A)\\&=A\overline{B}+AB+\overline{A}B\\&=A+\overline{A}B=B+A\overline{B}.\end{aligned}$$

1.1.3 频率、概率

为了研究随机现象的客观规律，仅知道试验的各种可能结

果——事件是远远不够的，还必须对各事件发生的可能性大小进行定量描述．我们把随机事件 A 发生的可能性大小这个量称为事件 A 发生的概率，简称为 A 的概率，记为 $P(A)$，并规定 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$，即概率度量随机事件发生的可能性大小．但“概率”是否存在呢？为了讨论这个问题，我们引进频率：

设随机事件 A 在 n 次试验中出现了 m 次，则称 $\frac{m}{n}$ 为随机事件 A 的频率，记为

$$f_n(A)=\frac{m}{n}.$$

为了说明“概率”客观存在，在概率论的发展史上，许多学者都做过试验，我们看下面的例子．

例 1.1.10 掷一枚硬币，抛掷前虽然我们不能预言各次抛掷的结果，但是当进行多次抛掷之后，人们发现“出现正面”和“出现反面”的频率差不多，差不多都等于 $\frac{1}{2}$．历史上许多学者都做过这方面的试验，如下表

试验者	n	m	$f_n(A)$
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5080
皮尔逊(Pearson)	12000	6019	0.5016
皮尔逊(Pearson)	24000	12012	0.5005

从表中可以看到，不管什么人抛，当试验次数充分大时，随机事件 A：“出现正面”的频率总是在一个确定的数 $P(A)=\frac{1}{2}$ 附近摆动，并逐渐稳定于 $\frac{1}{2}$．

由例 1.1.10 可以看出，对随机试验的一个事件 A，在 n 次试验中出现的频率 $f_n(A)$，当试验的次数 n 逐渐增大时，它总是在一个常数附近摆动，并逐渐稳定于这个常数．我们称此为频率的稳定性．由频率的稳定性知，随机事件 A 发生的可能性大小——概率 $P(A)$ 是客观存在的，同时也提供了我们研究概率的方法．

由频率的定义，频率具有以下性质：

① $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

② $f_n(\Omega)=1$，$f_n(\Phi)=0$.

③ 频率的可加性：若事件 A，B 互斥，即 A，B 不同时发生，则

$$f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B).$$

这是因为由于 A，B 不能同时发生，故在 n 次试验中 $A+B$ 发生的次数 $m=m_A+m_B$，其中 m_A，m_B 分别表示 n 次试验中事件 A，B 出现的次数，因此上式成立. 称此性质为频率的可加性.

由频率的稳定性，可以得到概率以下三个公理：

① 对任一事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

② $P(\Omega)=1$，$P(\Phi)=0$；

③ 概率的可加性　若事件 A，B 互斥，即 $AB=\Phi$，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$此公式称为互斥事件的加法公式.

③可推广至下列结果：

③* 设 A_1，A_2，…，A_n，…为可列多个互斥事件（即任意两个事件均互斥），则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i.$$

此公式称为概率的可列可加性.

我们称条件①②③*为概率的公理化定义.

由上述三个公理,我们可以得到概率的一些性质：

性质 1.1.1(有限可加性)

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

利用互斥情况下的加法公式和数学归纳法易证.

性质 1.1.2　对任一事件 A 有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证　因为 $A\overline{A}=\Phi$，$A+\overline{A}=\Omega$，