德·克·法捷耶夫
伊·斯·索明斯基 著

代数学

下册

人民教育出版社

代　数　学

下　册

德·克·法捷耶夫
伊·斯·索明斯基 著

奚今吾　管承仲 譯

人民教育出版社

这部书是苏联德·克·法捷耶夫和伊·斯·索明斯基为苏联中学教师作参考編的。全书分两册，上册合于我国初中教学代数的参考，下册合于高中教学代数的参考。在編制上和我們現在的教学大綱更接近。

*

Д. К. ФАДДЕЕВ и И. С. СОМИНСКИЙ

АЛГЕБРА

ЧАСТЬ II

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

УЧПЕДГИЗ * 1954

本书根据俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部

教育出版社 1954 年列宁格勒版譯出

*

代 数 学

下 册

〔苏联〕 德·克·法捷耶夫
伊·斯·索明斯基 著

奚今吾 管承仲 譯

北京市书刊出版业营业許可證出字第二号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

新 华 书 店 发 行

北京新华印刷厂印刷

統一书号：7012·277 字数：240 千

开本：850×1168公厘 1/32 印張：$10\frac{3}{8}$

1956 年 11 月第一版

1957 年 3 月第一次印刷

北京：1—25,000 册

定价 (6) 1.00 元

目　录

前　言

代数学下册，包括了十年制中学第八、九、十各年級所要学习的教材內容.

在研究无理数的概念的第一章里，我們大胆地抛弃了某种傳統的闡述方法．我們認为，必須从代数的需要(开方的运算)和几何的需要(綫段的度量)出发来闡述无理数的概念(这也是符合于大綱的)．闡述的方法必須使产生无理数概念的这两个根源之間有明显的联系.

我們在給无理数下定义的时候，把它看作和长度单位无公度的綫段的"长度"，也就是說，把无理数的概念和欧几里得的綫段长度的"比"看做是一个东西，如果这个比不是有理数，我們也把它叫做两个数的比.

无理数的这样的定义非常直观而又明确，照我們的看法，是完全符合于中学初等代数課程所应有的那种严密程度的．不但如此，如果不談关于几何公理不相矛盾的問題，根据这个定义和希尔伯特公理(包括連續性公理)还可以十分严整地依次講述无理数的理論.

无限小数就是无理数的一种确定的书写形式．用几何的方法可以說明求出正实数的任何次方根的可能性，这就是說，在指数函数的图象上，由已知縱坐标的点就可以量出它的横坐标.

在第二章里，除了大綱规定的那些教材，我們还叙述了某些类型的可以化为二次方程的四次方程，并且指出了采用輔助未知数的方法．这种方法在其他許多情况下也都适用．这一章还研究了方程同解的問題，并且解释了"一个方程是另一个方程的結果"这句話的意义.

在第三章里，我們講述了最簡单的函数关系的图象：直綫函数，二次函数和反比例关系的图象，同时又举出了一些比較复杂的图象的例子．这样就便于学生掌握这个課題，因为只講最簡单的图象的話，学生就会感覚非常枯燥，而且只举最簡单的例子也不可能培养学生認識到代数公式的图象的直观性，因而他們对于利用图象的目的还是不可能十分明确．

第四章講述了高次方程組．除了大綱規定的那些最簡单类型的方程組，我們还举出了一些比較复杂的例子，特别是通过这些例子說明了采用輔助未知数的方法．最后，在研究方程和方程組的图象解法的时候，我們用容易了解的方式闡述了牛頓的方法，把这种方法当作更精确地决定从图象求得的方程或者方程組的解的一种手段．

第五章講解了关于数列的极限的理論．为了增加这一章的直观性，我們应用了几何的証明方法．因为时間不够，所以这一章里的定理在中学課程里是不可能全部都講的．教师在講到这些定理的时候可以自己确定一下，哪些定理需要証明，而哪些不需要証明．

在第六章里，关于以有理数为指数的冪的运算的那些定理，几乎都是用小号字排印的．我們認为，其中的大部分定理在講的时候都可以不加証明．§6 和 §8 的定理，是学习指数函数的时候需要用的定理．

第七章(§2)所講的指数函数的第六种性質具有特殊的意义，这种性質表明了对数的存在的定理．§9 的第 6 項証明了，有理数的对数一般都是无理数．这一項和 §11“关于計算对数的概念”，最好用課外作业的方式来学习．

关于对数尺的构造的那一节，目的只是講授必要的初步知識．

关于联合与牛頓二項式的理論，是在証明一切有关的定理的同时讲述的.

在課堂上讲解复数的理論的时候，最难处理的是把复数引进数学中的合理性的問題．在这里不能指出十年級学生所能解答的这一些实际問題，通过这类問題的研究可以說明引进复数是合理的，說明必須用相应的方法来規定复数的运算．因此，我們仅仅闡述了引进复数的实际意义，并且仅仅从数学上的需要出发来論証引进复数的合理性．稍后一些我們指出，引进复数就便于解答某些数学問題．在数学史上，复数的概念正是由于数学本身的需要而形成的，至于复数在机械学和物理学等等方面解决实际問題的应用，那是很久以后的事情.

第十章对于两个二元一次方程的方程組的理論作了两种叙述．其中的第二种讲法是用小号字排印的．它比第一种讲法簡短，但是比較偏于形式．教师可以在这两种讲法里，任意选用一种.

第十一章包括大綱的最后一段所指出的全部問題的叙述，还包括代数的基本定理以及从这个定理得到的某些推論．在这一章里，我們用比較一般的以整数为系数的方程的有理数根的定理来代替以整数为系数的方程的整数根的問題.

第一到四章是德·克·法捷耶夫写的，第五到十一章是伊·斯·索明斯基写的．全部課文都經两个作者共同詳細地討論过.

第一章　冪，方根和无理数

§1　正整数指数的冪的性質

我們已經知道，每一个都等于 a 的 n 个因数的积叫做数目 a 的以正整数 n 为指数的冪 a^n.

例如，
$$2^3=2\cdot2\cdot2=8;$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{32}.$$

数目 a 叫做冪的底．指数 2 的冪叫做平方，指数 3 的冪叫做立方。

在冪的运算中必須遵照下面用定理的形式所叙述的法則.

定理 1．底数相同的两个冪的积，等于同一个底数以这两个冪的指数的和为指数的冪.

簡短地說：同一个底数的冪相乘，是把指数相加.

例如，
$$a^{13}\cdot a^{28}=a^{41}.$$

这个定理可以写成下面公式的形式：
$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

証明．a^m 是 m 个都等于 a 的因数的积，a^n 是 n 个都等于 a 的因数的积.

因此，$a^m\cdot a^n$ 就是 $m+n$ 个都等于 a 的因数的积，也就是等于 a^{m+n}.

用字母写出来：$a^m=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdots\cdot a}_{m个}$, $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdots\cdot a}_{n个}$.

因此，
$$a^m\cdot a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdots a}_{m个}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdots\cdot a}_{n个}=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdots\cdot a}_{m+n个}=a^{m+n}.$$

同底数的冪相乘的时候指数相加的法則对于无論多少个冪相乘仍然正确．就是說，下面的定理是正确的．

定理 2． **底数相同的任意个冪的积等于同一个底数以相乘冪的指数的和为指数的冪．**

証明．

$$a^{n_1}\cdot a^{n_2}\cdots\cdots a^{n_k}=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n_1\text{个}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n_2\text{个}}\cdots\cdots\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n_k\text{个}}$$

$$=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n_1+n_2+\cdots\cdots+n_k\text{个}}=a^{n_1+n_2+\cdots\cdots+n_k}.$$

例如，　$a^3\cdot a^5\cdot a^7\cdot a=a^{3+5+7+1}=a^{16}$.

定理 3． **冪的乘方的結果等于同一个底数以冪的指数与乘方的指数的积为指数的冪；**就是，

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

簡短地說：冪的乘方是把指数相乘．

例如，　$(a^5)^3=a^{15}$.

証明．$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdots\cdots a^m}_{n\text{个}}=a^{\overbrace{m+m+\cdots\cdots+m}^{n\text{个}}}=a^{mn}.$

定理 4． **若干个因数的积的冪等于各个因数以同一个指数为指数的冪的积，**就是，

$$(ab)^n=a^n\cdot b^n,\ (abc)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n,\text{等等}.$$

証明．我們对于三个因数的积来加以証明．

$$(abc)^n=\underbrace{abc\cdot abc\cdots\cdots abc}_{n\text{个}}$$

$$=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n\text{个}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdots\cdots b}_{n\text{个}}\cdot\underbrace{c\cdot c\cdots\cdots c}_{n\text{个}}$$

$$=a^nb^nc^n.$$

定理 5. 一个分数的冪等于，分子和分母分别为原分数的分子和分母以同一个指数为指数的冪的分数；就是，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

証明.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ 个}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdots\cdot a}^{n\text{ 个}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdots\cdot b}_{n\text{ 个}}}=\frac{a^n}{b^n}.$$

練　　习

化簡代数式:

1. $\left(\frac{a^2}{b}\right)^3\cdot\left(\frac{b^2}{a}\right)^4$.　2. $(a^{m-n})^{m+n}$，其中 $m>n$.　3. $a\cdot(a^2)^2\cdot(a^3)^3$.

§2　若干項的和的平方

积、商和冪的乘方的法則都很簡单.

和的乘方的情形就不同了.

就是說，若干項的和的冪的公式是复杂的，这个公式随着冪的指数以及項数的增加而变得更复杂.

实际上，

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

我們直接用乘法很容易驗証，

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc,\text{ 等等.}$$

我們只研究任意几項的和的平方的公式.

定理　任意几項的和的平方，等于这些項的平方的和，加上一切可能的每两項的积的 2 倍的和.

証明.

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n).$$

依照多項式乘以多項式的法則，我們应当把第一个因式的每一項乘以第二个因式的每一項并且把所得的积相加．在第一个因式的各項乘以第二个因式里和它相同的項的时候，我們就得到所有的項的平方．在两个不同的項相乘的时候，每一个积都要得到两次．例如，a_1a_2 这个积在第一个因式的 a_1 乘以第二个因式的 a_2 的时候以及在第一个因式的 a_2 乘以第二个因式的 a_1 的时候都会得到．对于其他的任何一对項也是这样.

因而:

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2+2a_1a_2+2a_1a_3 \\ +\cdots\cdots+2a_2a_3+\cdots\cdots+2a_{n-1}a_n.$$

在使用这个公式的时候，首先应該写出所有的項的平方，然后添写一切可能的每两項的积的 2 倍．为了不至于遺漏这些积的任何一个，应該照这样的顺序来写：首先是第一項乘以其余各項的一切可能的积的 2 倍，其次是第二項乘以第一項以外的其余各項的积的 2 倍，然后是第三項乘以前两項以外的其余各項的积的 2 倍，等等.

例如，

$$(x^3-x^2+2x+3)^2=x^6+x^4+4x^2+9-2x^5+4x^4+6x^3 \\ -4x^3-6x^2+12x \\ =x^6-2x^5+5x^4+2x^3-2x^2+12x+9.$$

練　习

完成平方:

1. $(x^3+2x^2-3x-4)^2$.　2. $\left(a^m+1+\frac{1}{a^m}\right)^2$.　3. $\left(\frac{a^2}{b^2}-1-\frac{b}{a}\right)^2$.

§3 幂的一些性质

很明显，数目 0 的任意次幂都等于零，正数的任意次幂都是正的.

負数的乘方的法則由下面的定理規定.

定理 1. 負数的偶数指数冪等于它的絕对值的同次冪而帶正号. 負数的奇数指数冪等于它的絕对值的同次冪而帶負号.

例如，$(-3)^4=81$, $(-3)^3=-27$.

証明. 設 $-a$ 是一个負数，而 a 就是它的絕对值，

$$(-a)^n=[(-1)\cdot a]^n=(-1)^n\cdot a^n.$$

但是，

$(-1)^2=1$, $(-1)^3=-1$, $(-1)^4=1$, $(-1)^5=-1$, 等等，

就是，在指数 n 是偶数的时候，$(-1)^n=1$；而在 n 是奇数的时候，$(-1)^n=-1$.

因而，

在 n 是偶数的时候，$(-a)^n=a^n$；在 n 是奇数的时候，$(-a)^n=-a^n$；

这就是所要求証明的.

应該注意的是，任何有理数的偶次冪都不能是負数，因为，正数的偶次冪是正的，負数的偶次冪也是正的，而零的冪总等于零.

我們还来証明，确定冪的重要性質的两个定理.

定理2. 两个正数的相同指数的冪中，底数大的一个較大.

換句話說，已知指数的正数的冪随着底数的增大而增大. 我們首先証明下面关于正数相乘的两个預备定理*.

預备定理 1. 如果 $a>b$，幷且 c 是正数，那末 $ac>bc$.

---

* 在証明中应用的輔助定理叫做預备定理.

换句話說，就是不等式 $a>b$ 的两边可以乘以任意正数 c.

事实上，如果 $a>b$，那末 $a-b$ 是一个正数；而 $(a-b)c$ 是两个正数的积，所以也是一个正数．但是

$$(a-b)c=ac-bc.$$

由于已經确定差 $ac-bc$ 是正的，我們就得到結論 $ac>bc$.

預备定理 2. 如果 a、b、c、d 是四个正数，并且 $a>b$、$c>d$，那末 $ac>bd$.

实际上，由預备定理 1，$ac>bc$．同理，因为 $c>d$ 并且 b 是正数，所以 $bc>bd$.

因而，$ac>bd$.

現在我們回到定理的証明.

設 a 和 b 是正数，并且 $a>b$.

假定 $c=a$，$d=b$．則 $c>d$，并且由預备定理 2，$ac>bd$；但是，

$$ac=a^2,\quad bd=b^2.$$

因而，$a^2>b^2$.

現在假定 $c=a^2$，$d=b^2$．我們已經确定 $c>d$．由預备定理 2，$ac>bd$；但是，

$$ac=a\cdot a^2=a^3,\quad bd=b\cdot b^2=b^3.$$

因而，$a^3>b^3$.

現在假定 $c=a^3$，$d=b^3$．我們已經确定 $c>d$．由預备定理 2，$ac>bd$；但是，

$$ac=a\cdot a^3=a^4,\quad bd=b\cdot b^3=b^4.$$

因而，$a^4>b^4$.

假定 $c=a^4$，$d=b^4$ 并且应用預备定理 2，我們用同样的推理，就得到

$$a^5>b^5.$$

再应用一次同样的推理；我們就得到 $a^6>b^6$，等等．用这样的推理，我們可以达到指数 n 的任何一个值.

定理就証明了.

在数学中常常利用"从 $n-1$ 到 n"的一次推理来代替类似于上面所用的一連串同样的推理.

这种推理对于我們的定理是象下面这样的：

假定这定理对于指数 $n-1$ 是正确的，而要在这个前提下对于指数 n 来証明它．假定 $c=a^{n-1}$，$d=b^{n-1}$．根据我們所作的对于指数 $n-1$ 定理已經証明的假定，我們推得 $c>d$，由預备定理 2 就得 $ac>bd$；但是

$$ac=a\cdot a^{n-1}=a^n,\quad bd=b\cdot b^{n-1}=b^n.$$

因而，$a^n > b^n$.

这样一来，我們就証明了：如果这定理对于指数 $n-1$ 是正确的，那末它对于指数 n 也是正确的. 但是我們知道，对于指数 2 这定理是正确的，我們已經証明过了. 因而，它对于指数 3 也是正确的. 既然它对于指数 3 是正确的，那末它对于指数 4 也是正确的，等等. 用这样的推理，我們可以达到任何一个指数.

“从 $n-1$ 到 n”的証明又叫做数学归納法的証明. 这个方法，我們将来要屡次用到.

定理 3. 在冪的正底数无限增大的时候，冪也无限增大.

例如，只要 $a>10$，a^2 就变得大于 100；只要 $a>1000$，a^2 就变得大于 1000000；而一般的，只要 a 取得充分地大，a^2 就可以变得大于任何所給的数.

証明. 假定 $a>1$，那末对于任何大于 1 的 n，都得到 $a^n>a$；因而当 a 无限增大的时候，数目 a^n 也无限增大而且比 a 增大得更快.

定理就証明了.

練　习

1. 計算 $(-2)^6$，$(-3)^5$.　2. 計算数列：

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2;$$

和

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3.$$

这两列中哪一列的数增加得快些？

3. x 的值怎样，$x^3>1000$？ $x^3>1000000000$？

§4　数的任意次方根

n 次冪等于 a 的数叫做数目 a 的 n 次方根.

例如，因为 $3^3=27$，所以 3 是 27 的三次方根；因为 $2^4=16$，所以 2 是 16 的四次方根；等等.

数目 a 的 n 次方根用 $\sqrt[n]{a}$ 表示. 二次方根又叫做平方根，三次方根又叫做立方根. 数目 a 的平方根用 $\sqrt{a}$ 表示，不必写出指数 2.

符号 $\sqrt[m]{}$ 通常叫做根号，有时叫做 m 次根号. 根式这个名称

是指最后的运算是开方的代数式.

即如,式子$\sqrt{5+a}$可以叫做平方根式,$\frac{2}{3-\sqrt[3]{5}}$的分母中,含有立方根式$\sqrt[3]{5}$,等等.

我們注意到数目 2 和 -2 同样地可以算作数目 4 的平方根,因此,数目 4 的平方根有两个值 2 和 -2.

一个数的任何次方根可以有多少个値呢?下面的定理就回答这个問題.

定理 1. 一个正数的任何次方根不能有多于一个的正值.

即如,$\sqrt[3]{8}=2$,并且沒有别的正数的立方会等于 8.

实际上,設 $x^3=8$. 由 §3 定理 2,如果 $x<2$,那末$x^3<8$. 由同一个定理,如果 $x>2$,那末 $x^3>8$. 所以只剩下一个可能性$x=2$.

用同样的方法,就可以給出这个定理一般形式的証明.

假設正数 a 的 n 次方根有两个正値 x 和 y,則 $x^n=a$, $y^n=a$.

我們来証明 $x=y$. 为了这个目的,我們作相反的假定,x 和 y 不相等. 则 $x>y$ 或者 $y>x$. 如果$x>y$,那末由 §3 定理 2,$x^n>y^n$,这和 $x^n=y^n=a$ 相矛盾. 如果 $y>x$,那末 $y^n>x^n$,同样和等式 $x^n=y^n=a$相矛盾.

因而,$x=y$,这就是所要求証明的.

定理 2. 0 的任何次方根具有唯一的值,等于 0.

証明. $0^n=0$. 一切异于零的数,在任何次乘方的时候都給出异于 0 的結果. 因此,0 是$\sqrt[n]{0}$的唯一的值.

定理 3. 一个正数的奇数次方根不能有多于一个的值,并且这个值只能是正的.

証明. 因为一切負数在奇数次乘方的时候都給出負的結果,所以正数的奇数次方根不能是負的. 零也不能是一个正数的方根的值. 由定理 1,方根的正值并不能多于一个.

定理 4. 一个負数的奇数次方根不能有多于一个的值,并且这个值只能是負的.