

德·克·法捷耶夫 著
伊·斯·索明斯基

代 数 学

下 册

人 民 教 育 出 版 社

代 数 学

下 册

德·克·法捷耶夫 著
伊·斯·索明斯基

奚今吾 管承仲 译

人 民 教 育 出 版 社

这部书是苏联德·克·法捷耶夫和伊·斯·索明斯基为苏联中学教师作参考编的。全书分两册，上册合于我国初中教学代数的参考，下册合于高中教学代数的参考。在编制上和我們现在的教学大纲更接近。

*

Д. К. ФАДДЕЕВ и И. С. СОМИНСКИЙ

АЛГЕБРА

ЧАСТЬ II

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

УЧПЕДГИЗ * 1954

本书根据俄罗斯苏维埃联邦社会主义共和国教育部
教育出版社 1954 年列宁格勒版译出

*

代 数 学

下 册

德·克·法捷耶夫 著
〔苏联〕 伊·斯·索明斯基

奚今吾 管承仲 译

北京市书刊出版业营业许可出字第 2 号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

新 华 书 店 发 行

北京新华印刷厂印刷

统一书号：7012·277 字数：240 千

开本：850×1168公厘 1/32 印张：10 $\frac{3}{8}$

1956 年 11 月第一版

1957 年 3 月第一次印刷

北京：1—25,000 册

定价(6) 1.00 元

目 录

前 言	4
-----	---

第一章 幕, 方根和无理数	7
---------------	---

- § 1 正整数指数的幕的性质(7) § 2 若干项的和平方的平方(9)
- § 3 幕的一些性质(11) § 4 数的任意次方根(13) § 5 对于求任何正有理数的方根, 有理数集不够应用(16)
- § 6 方根的近似值(17) § 7 开方的问题和量度线段问题的关系(20) § 8 量度线段, 无理数和实数的定义(21)
- § 9 在数轴上表示实数, 实数的大小(26) § 10 实数的近似值(27) § 11 连续性, 实数集(30)
- § 12 实数的加法和减法(34) § 13 实数的乘法和除法(38)
- § 14 乘方和开方(40) § 15 积、分数和幕的开方(44) § 16 方根的乘法和除法(46)
- § 17 方根的乘方和开方(47) § 18 从根号下面提出有理因数以及把有理因数移到根号下面(49) § 19 同类根式和它们的加法(51)
- § 20 消去分母中的无理式(52)

第二章 二次方程和可以化成二次方程的方程	55
----------------------	----

- § 1 整代数方程和它的分类(55) § 2 不完全的二次方程(57)
- § 3 简化的二次方程(59) § 4 一般的二次方程(63) § 5 可以用二次方程来解的某些应用题(67)
- § 6 二次方程的根与系数的关系(70) § 7 二次三项式的因式分解(71) § 8 根据已知的根列出二次方程(73)
- § 9 例题和应用(74) § 10 根据系数和判别式讨论二次方程的根(76) § 11 双二次方程(78)
- § 12 引入新的未知数后可以化成二次方程的某些方程(79)
- § 13 倒数方程(81) § 14 双二次方程的第二种解法(83)
- § 15 方程的变换(85) § 16 分式方程(89) § 17 无理方程(93)

第三章 函数和它的图象	98
-------------	----

- § 1 函数关系(98) § 2 平面内的直角坐标制(101) § 3 函数的图象(103)
- § 4 正比例关系(108) § 5 线性函数(112) § 6 二元一次方程的几何意义(114)
- § 7 二次函数(115) § 8 二次

函数图象的讨论(121) §9 反比例关系(124)

第四章 高次方程组128

§1 两个二元方程的方程组,其中的一个是一次的,另一个是二次的(128) §2 可以用特殊方法来解的某些方程组(130) §3 不含一次项的两个二次方程的方程组(133) §4 解高次方程组的一些方法(135) §5 一元方程的图象解法(139) §6 两个二元方程的方程组的图象解法(142) §7 根据粗略的近似值,更精确地决定方程的解或者非线性方程的方程组的解(146)

第五章 数列148

§1 基本定义(148) §2 算术级数(153) §3 几何级数(157) §4 数列的几何概念(162) §5 数列的极限(162) §6 关于极限的定理(168) §7 数列的算术运算(172) §8 单调数列(180) §9 无穷几何级数的各项的和(182) §10 化循环小数成普通分数(186)

第六章 幂指数的概念的扩张188

§1 引言(188) §2 零指数和负数指数的幂的概念(188) §3 分数指数的幂的概念(190) §4 负分数指数的幂的概念(191) §5 以有理数为指数的幂的运算(192) §6 关于有理数指数的幂(198) §7 无理数指数的幂的概念(200) §8 以任何实数为指数的幂的某些性质(203)

第七章 指数函数与对数204

§1 指数函数的定义(204) §2 函数 a^x 的性质(205) §3 指数函数的图象(208) §4 对数的定义(211) §5 对数函数(212) §6 对数的性质(214) §7 关于对数的定理(215) §8 取式子的对数和由式子的对数求原式(217) §9 常用对数(219) §10 首数和尾数(221) §11 计算对数的概念(223) §12 补插法(225) §13 四位对数表的使用(226) §14 有负首数的对数的运算(226) §15 计算尺构造的概念(229) §16 某些超越方程的解法(232)

第八章 聯合和牛頓二項式定理234

§1 選排列(234) §2 全排列(238) §3 組合(239) §4 某些和以及它們的性質(242) §5 第一項相同,而第二項不同的若干個二項式的積(243) §6 二項式的自然數次冪(牛頓公式)(245) §7 牛頓展開式的性質(245)

第九章 復數248

§1 數的觀念的發展(248) §2 復數的定義(254) §3 復數的性質(256) §4 零的性質(258) §5 復數的幾何表示(259) §6 復數的三角函數式(260) §7 棣美弗公式(263) §8 求負數的平方根(263) §9 求復數的 n 次方根(264) §10 復數的某些應用(266)

第十章 不等式269

§1 不等式的基本性質(269) §2 不等式的證明(273) §3 同解不等式(281) §4 一元一次不等式和一元一次不等式組的解法(285) §5 討論方程的目的(289) §6 一元一次方程的討論(290) §7 兩個二元一次方程的方程組的討論(292) §8 二次三項式的討論(304) §9 一元二次不等式的解法(309)

第十一章 高次方程311

§1 一元 n 次方程(311) §2 x 的多項式除以 $x-a$ (312) §3 已知方程的根,列出 n 次方程(314) §4 代數的基本定理和它的某些推論(316) §5 韋達定理(321) §6 關於解高次方程(322) §7 計算以整數為系數的方程的有理數根(324) §8 三次、四次、六次的二項方程的解法(327) §9 三項方程的解法(330)

前 言

代数学下册,包括了十年制中学第八、九、十各年級所要学习的教材内容.

在研究无理数的概念的第一章里,我們大胆地抛弃了某种傳統的闡述方法. 我們认为,必須从代数的需要(开方的运算)和几何的需要(綫段的度量)出发来闡述无理数的概念(这也是符合于大綱的). 闡述的方法必須使产生无理数概念的这两个根源之間有明显的联系.

我們在給无理数下定义的时候,把它看作和长度单位无公度的綫段的“长度”,也就是說,把无理数的概念和欧几里得的綫段长度的“比”看做是一个东西,如果这个比不是有理数,我們也把它叫做两个数的比.

无理数的这样的定义非常直觀而又明确,照我們的看法,是完全符合于中学初等代数課程所应有的那种严密程度的. 不但如此,如果不談关于几何公理不相矛盾的問題,根据这个定义和希尔伯特公理(包括連續性公理)还可以十分严整地依次講述无理数的理論.

无限小數就是无理数的一种确定的书写形式. 用几何的方法可以說明求出正实数的任何次方根的可能性,这就是說,在指数函数的图象上,由已知縱坐标的点就可以量出它的横坐标.

在第二章里,除了大綱规定的那些教材,我們还叙述了某些类型的可以化为二次方程的四次方程,并且指出了采用輔助未知数的方法. 这种方法在其他許多情况下也都适用. 这一章还研究了方程同解的問題,并且解釋了“一个方程是另一个方程的結果”这句话的意义.

在第三章里，我們講述了最简单的函数关系的图象：直线函数，二次函数和反比例关系的图象，同时又举出了一些比较复杂的图象的例子。这样就便于学生掌握这个课题，因为只讲最简单的图象的话，学生就会感觉非常枯燥，而且只举最简单的例子也不可能培养学生认识到代数公式的图象的直观性，因而他们对于利用图象的目的还是不可能十分明确。

第四章讲述了高次方程组。除了大纲规定的那些最简单类型的方程组，我们还举出了一些比较复杂的例子，特别是通过这些例子说明了采用辅助未知数的方法。最后，在研究方程和方程组的图象解法的时候，我们用容易了解的方式阐述了牛顿的方法，把这种方法当作更精确地决定从图象求得的方程或者方程组的解的一种手段。

第五章讲解了关于数列的极限的理论。为了增加这一章的直观性，我们应用了几何的证明方法。因为时间不够，所以这一章里的定理在中学课程里是不可能全部都讲的。教师在讲到这些定理的时候可以自己确定一下，哪些定理需要证明，而哪些不需要证明。

在第六章里，关于以有理数为指数的幂的运算的那些定理，几乎都是用小号字排印的。我们认为，其中的大部分定理在讲的时候都可以不加证明。§6和§8的定理，是学习指数函数的时候需要用的定理。

第七章(§2)所讲的指数函数的第六种性质具有特殊的意义，这种性质表明了对数的存在的定理。§9的第6项证明了，有理数的对数一般都是无理数。这一项和§11“关于计算对数的概念”，最好用课外作业的方式来学习。

关于对数尺的构造的那一节，目的只是讲授必要的初步知识。

关于联合与牛頓二項式的理論，是在証明一切有关的定理的同时講述的。

在課堂上讲解复数的理論的时候，最难处理的是把复数引进数学中的合理性的問題。在这里不能指出十年級学生所能解答的这一些实际問題，通过这类問題的研究可以說明引进复数是合理的，說明必須用相应的方法来規定复数的运算。因此，我們仅仅闡述了引进复数的实际意义，并且仅仅从数学上的需要出发来論証引进复数的合理性。稍后一些我們指出，引进复数就便于解答某些数学問題。在数学史上，复数的概念正是由于数学本身的需要而形成的，至于复数在机械学和物理学等方面解决实际問題的应用，那是很久以后的事情。

第十章对于两个二元一次方程的方程組的理論作了两种叙述。其中的第二种講法是用小号字排印的。它比第一种講法簡短，但是比較偏于形式。教师可以在这两种講法里，任意选用一种。

第十一章包括大綱的最后一段所指出的全部問題的叙述，还包括代数的基本定理以及从这个定理得到的某些推論。在这一章里，我們用比較一般的以整数为系数的方程的有理数根的定理来代替以整数为系数的方程的整数根的問題。

第一到四章是德·克·法捷耶夫写的，第五到十一章是伊·斯·索明斯基写的。全部課文都經两个作者共同詳細地討論过。

第一章 冪, 方根和無理數

§ 1 正整數指數的冪的性質

我們已經知道, 每一個都等於 a 的 n 個因數的積叫做數目 a 的以正整數 n 為指數的冪 a^n .

例如, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$;

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32}.$$

數目 a 叫做冪的底. 指數 2 的冪叫做平方, 指數 3 的冪叫做立方.

在冪的運算中必須遵照下面用定理的形式所敘述的法則.

定理 1. 底數相同的兩個冪的積, 等於同一個底數以這兩個冪的指數的和為指數的冪.

簡短地說: 同一個底數的冪相乘, 是把指數相加.

例如, $a^{13} \cdot a^{28} = a^{41}$.

這個定理可以寫成下面公式的形式:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

證明. a^m 是 m 個都等於 a 的因數的積, a^n 是 n 個都等於 a 的因數的積.

因此, $a^m \cdot a^n$ 就是 $m+n$ 個都等於 a 的因數的積, 也就是等於 a^{m+n} .

用字母寫出來: $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ 個}}, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ 個}}.$

因此,

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ 個}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ 個}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ 個}} = a^{m+n}.$$

同底数的幂相乘的时候指数相加的法则对于无论多少个幂相乘仍然正确。就是说，下面的定理是正确的。

定理 2. 底数相同的任意个幂的积等于同一个底数以相乘幂的指数的和为指数的幂。

证明。

$$\begin{aligned} a^{n_1} \cdot a^{n_2} \cdots a^{n_k} &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n_1 \uparrow} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n_2 \uparrow} \cdots \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n_k \uparrow} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n_1 + n_2 + \cdots + n_k \uparrow} = a^{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \end{aligned}$$

例如, $a^3 \cdot a^5 \cdot a^7 \cdot a = a^{3+5+7+1} = a^{16}$.

定理 3. 幂的乘方的结果等于同一个底数以幂的指数与乘方的指数的积为指数的幂; 就是,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

简短地说: 幂的乘方是把指数相乘。

例如, $(a^5)^3 = a^{15}$.

证明. $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \uparrow} = \underbrace{a^{m+m+\cdots+m}}_{n \uparrow} = a^{mn}.$

定理 4. 若干个因数的积的幂等于各个因数以同一个指数为指数的幂的积, 就是,

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n, \quad (abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n, \text{ 等等.}$$

证明. 我们对于三个因数的积来加以证明。

$$\begin{aligned} (abc)^n &= \underbrace{abc \cdot abc \cdots abc}_{n \uparrow} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \uparrow} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \uparrow} \cdot \underbrace{c \cdot c \cdots c}_{n \uparrow} \\ &= a^n b^n c^n. \end{aligned}$$

定理 5. 一个分数的幂等于, 分子和分母分别为原分数的分子和分母以同一个指数为指数的幂的分数; 就是,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

証明.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ 个}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ 个}}}{\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ 个}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

練 习

化簡代数式:

1. $\left(\frac{a^2}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^2}{a}\right)^4$. 2. $(a^{m-n})^{m+n}$, 其中 $m > n$. 3. $a \cdot (a^2)^2 \cdot (a^3)^3$.

§ 2 若干項的和的平方

积、商和幂的乘方的法則都很簡單.

和的乘方的情形就不同了.

就是說, 若干項的和的幂的公式是复杂的, 这个公式随着幂的指数以及項数的增加而变得更复杂.

实际上,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

我們直接用乘法很容易驗證,

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc, \text{ 等等.}$$

我們只研究任意几項的和的平方的公式.

定理 任意几項的和的平方, 等于这些項的平方的和, 加上一切可能的每兩項的积的 2 倍的和.

証明.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

依照多項式乘以多項式的法則, 我們应当把第一个因式的每一項乘以第二个因式的每一項并且把所得的积相加. 在第一个因式的各項乘以第二个因式里和它相同的項的时候, 我們就得到所有的項的平方. 在两个不同的項相乘的时候, 每一个积都要得到两次. 例如, $a_1 a_2$ 这个积在第一个因式的 a_1 乘以第二个因式的 a_2 的时候以及在第一个因式的 a_2 乘以第二个因式的 a_1 的时候都会得到. 对于其他的任何一对項也是这样.

因而:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 \\ &\quad + \cdots + 2a_2 a_3 + \cdots + 2a_{n-1} a_n.\end{aligned}$$

在使用这个公式的时候, 首先應該写出所有的項的平方, 然后添写一切可能的每兩項的积的 2 倍. 为了不至于遺漏这些积的任何一个, 應該照这样的順序来写: 首先是第一項乘以其余各項的一切可能的积的 2 倍, 其次是第二項乘以第一項以外的其余各項的积的 2 倍, 然后是第三項乘以前兩項以外的其余各項的积的 2 倍, 等等.

例如,

$$\begin{aligned}(x^3 - x^2 + 2x + 3)^2 &= x^6 + x^4 + 4x^2 + 9 - 2x^5 + 4x^4 + 6x^3 \\ &\quad - 4x^3 - 6x^2 + 12x \\ &= x^6 - 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 12x + 9.\end{aligned}$$

練習

完成平方:

1. $(x^3 + 2x^2 - 3x - 4)^2$. 2. $\left(a^m + 1 + \frac{1}{a^m}\right)^2$. 3. $\left(\frac{a^2}{b^2} - 1 - \frac{b}{a}\right)^2$.

§ 3 幂的一些性質

很明显, 数 0 的任意次幂都等于零, 正数的任意次幂都是正的.

負数的乘方的法則由下面的定理規定.

定理 1. 負数的偶数指数幂等于它的绝对值的同次幂而带正号. 負数的奇数指数幂等于它的绝对值的同次幂而带負号.

例如, $(-3)^4 = 81$, $(-3)^3 = -27$.

証明. 設 $-a$ 是一个負数, 而 a 就是它的绝对值,

$$(-a)^n = [(-1) \cdot a]^n = (-1)^n \cdot a^n.$$

但是,

$(-1)^2 = 1$, $(-1)^3 = -1$, $(-1)^4 = 1$, $(-1)^5 = -1$, 等等,

就是, 在指数 n 是偶数的时候, $(-1)^n = 1$; 而在 n 是奇数的时候, $(-1)^n = -1$.

因而,

在 n 是偶数的时候, $(-a)^n = a^n$; 在 n 是奇数的时候, $(-a)^n = -a^n$;

这就是所要求証明的.

应该注意的是, 任何有理数的偶次幂都不能是負数, 因为, 正数的偶次幂是正的, 負数的偶次幂也是正的, 而零的幂总等于零.

我們还来証明, 确定幂的重要性質的两个定理.

定理 2. 两个正数的相同指数的幂中, 底数大的一个較大.

換句話說, 已知指数的正数的幂随着底数的增大而增大. 我們首先証明下面关于正数相乘的两个预备定理*.

预备定理 1. 如果 $a > b$, 并且 c 是正数, 那末 $ac > bc$.

* 在証明中应用的輔助定理叫做预备定理.

換句話說，就是不等式 $a > b$ 的兩邊可以乘以任意正數 c 。

事實上，如果 $a > b$ ，那末 $a - b$ 是一個正數；而 $(a - b)c$ 是兩個正數的積，所以也是一個正數。但是

$$(a - b)c = ac - bc.$$

由於已經確定差 $ac - bc$ 是正的，我們就得到結論 $ac > bc$ 。

預備定理 2. 如果 a, b, c, d 是四個正數，並且 $a > b, c > d$ ，那末 $ac > bd$ 。

實際上，由預備定理 1, $ac > bc$ 。同理，因為 $c > d$ 並且 b 是正數，所以 $bc > bd$ 。

因而， $ac > bd$ 。

現在我們回到定理的證明。

設 a 和 b 是正數，並且 $a > b$ 。

假定 $c = a, d = b$ 。則 $c > d$ ，並且由預備定理 2, $ac > bd$ ；但是，

$$ac = a^2, \quad bd = b^2.$$

因而， $a^2 > b^2$ 。

現在假定 $c = a^2, d = b^2$ 。我們已經確定 $c > d$ 。由預備定理 2, $ac > bd$ ；但是，

$$ac = a \cdot a^2 = a^3, \quad bd = b \cdot b^2 = b^3.$$

因而， $a^3 > b^3$ 。

現在假定 $c = a^3, d = b^3$ 。我們已經確定 $c > d$ 。由預備定理 2, $ac > bd$ ；但是，

$$ac = a \cdot a^3 = a^4, \quad bd = b \cdot b^3 = b^4.$$

因而， $a^4 > b^4$ 。

假定 $c = a^4, d = b^4$ 並且應用預備定理 2，我們用同樣的推理，就得到

$$a^5 > b^5.$$

再應用一次同樣的推理；我們就得到 $a^6 > b^6$ ，等等。用這樣的推理，我們可以达到指數 n 的任何一個值。

定理就證明了。

在數學中常常利用“從 $n-1$ 到 n ”的一次推理來代替類似於上面所用的一連串同樣的推理。

這種推理對於我們的定理是象下面這樣的：

假定這定理對於指數 $n-1$ 是正確的，而要在这个前提下對於指數 n 來證明它。假定 $c = a^{n-1}, d = b^{n-1}$ 。根據我們所作的對於指數 $n-1$ 定理已經證明的假定，我們推得 $c > d$ ，由預備定理 2 就得 $ac > bd$ ；但是

$$ac = a \cdot a^{n-1} = a^n, \quad bd = b \cdot b^{n-1} = b^n.$$

因而, $a^n > b^n$.

这样一来, 我们就证明了: 如果这定理对于指数 $n-1$ 是正确的, 那末它对于指数 n 也是正确的. 但是我们知道, 对于指数 2 这定理是正确的, 我们已经证明过了. 因而, 它对于指数 3 也是正确的. 既然它对于指数 3 是正确的, 那末它对于指数 4 也是正确的, 等等. 用这样的推理, 我们可以达到任何一个指数.

“从 $n-1$ 到 n ”的证明又叫做数学归纳法的证明. 这个方法, 我们将来要屡次用到.

定理 3. 在幂的正底数无限增大的时候, 幂也无限增大.

例如, 只要 $a > 10$, a^2 就变得大于 100; 只要 $a > 1000$, a^2 就变得大于 1000000; 而一般的, 只要 a 取得充分地大, a^2 就可以变得大于任何所给的数.

证明. 假定 $a > 1$, 那末对于任何大于 1 的 n , 都得到 $a^n > a$; 因而当 a 无限增大的时候, 数目 a^n 也无限增大而且比 a 增大得更快.

定理就证明了.

练 习

1. 计算 $(-2)^5, (-3)^5$. 2. 计算数列:

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3,$$

和

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3.$$

这两列中哪一列的数增加得快些?

3. x 的值怎样, $x^3 > 1000$? $x^3 > 1000000000$?

§ 4 数的任意次方根

n 次幂等于 a 的数叫做数目 a 的 n 次方根.

例如, 因为 $3^3 = 27$, 所以 3 是 27 的三次方根; 因为 $2^4 = 16$, 所以 2 是 16 的四次方根; 等等.

数目 a 的 n 次方根用 $\sqrt[n]{a}$ 表示. 二次方根又叫做平方根, 三次方根又叫做立方根. 数目 a 的平方根用 $\sqrt{a}$ 表示, 不必写出指数 2.

符号 $\sqrt[n]{}$ 通常叫做根号, 有时叫做 m 次根号. 根式这个名称

是指最后的运算是开方的代数式.

例如,式子 $\sqrt{5+a}$ 可以叫做平方根式, $\frac{2}{3-\sqrt[3]{5}}$ 的分母中,含有立方根式 $\sqrt[3]{5}$,等等.

我們注意到数目2和-2同样地可以算作数目4的平方根,因此,数目4的平方根有两个值2和-2.

一个数的任何次方根可以有多少个值呢?下面的定理就回答这个问题.

定理 1. 一个正数的任何次方根不能有多于一个的正值.

例如, $\sqrt[3]{8}=2$,并且沒有别的正数的立方会等于8.

实际上,設 $x^3=8$. 由§3定理2,如果 $x<2$,那末 $x^3<8$. 由同一个定理,如果 $x>2$,那末 $x^3>8$. 所以只剩下一个可能性 $x=2$.

用同样的方法,就可以給出这个定理一般形式的証明.

假設正数 a 的 n 次方根有两个正值 x 和 y ,則 $x^n=a$, $y^n=a$.

我們来証明 $x=y$. 为了这个目的,我們作相反的假定, x 和 y 不相等. 則 $x>y$ 或者 $y>x$. 如果 $x>y$,那末由§3定理2, $x^n>y^n$,这和 $x^n=y^n=a$ 相矛盾. 如果 $y>x$,那末 $y^n>x^n$,同样和等式 $x^n=y^n=a$ 相矛盾.

因而, $x=y$,这就是所要求証明的.

定理 2. 0的任何次方根具有唯一的值,等于0.

証明. $0^n=0$. 一切异于零的数,在任何次乘方的时候都給出异于0的結果. 因此,0是 $\sqrt[n]{0}$ 的唯一的值.

定理 3. 一个正数的奇数次方根不能有多于一个的值,并且这个值只能是正的.

証明. 因为一切負数在奇数次乘方的时候都給出負的結果,所以正数的奇数次方根不能是負的. 零也不能是一个正数的方根的值. 由定理1,方根的正值并不能多于一个.

定理 4. 一个負数的奇数次方根不能有多于一个的值,并且这个值只能是負的.