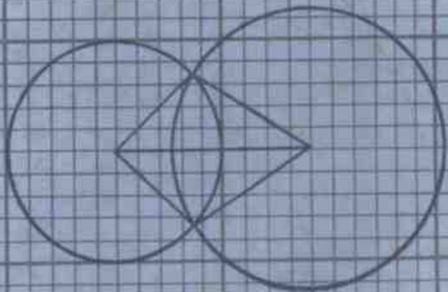
初級中學課本

平面幾何



人民教育出版社

初級中學課本 **平面幾何**　　　　書號：2309

編　　者：余元慶　奚今吾　管承仲　呂學禮

校訂者：劉　　薰　　宇

繪圖者：于　　金　　陵

北京市書刊出版業營業許可證出字第二號

出版者：人　民　教　育　出　版　社

北京景山東街

發行者：新　　華　　書　　店

印刷者：北　京　新　華　印　刷　廠

開本：787×1092 1/32　1955年3月第一版

印張：$6\frac{7}{8}$ 插頁：4　1956年3月第一版北京第九次印刷

字數：138千　280,101—430,100冊

定價(2)六角五分

出版者的話

本書是根據中華人民共和國教育部編訂的中學數學教學大綱(修訂草案)編寫的,供初中二年級和三年級平面幾何教學之用.

本書取材於蘇聯A.П.吉西略夫所編的幾何課本第一冊、H.A.格拉哥列夫所編的初等幾何學(平面部分)和H.雷布金所編的幾何習題彙編第一冊.

得到北京市第三女子中學、前北京師範大學附屬女子中學、北京師範大學附屬中學三個學校的行政領導和數學教師的大力支持和贊助,本書的初稿曾經在這三個學校裏試教過一遍. 在試教過程中,擔任試教的諸位教師對本書提供了很多寶貴的具體的意見. 此外,經過書面徵求意見和座談會方式,全國各地的數學教師,特別是北京市的幾位數學教師,也提供了許多寶貴的意見.

根據各位教師所提出的意見將初稿修改後,還請中國科學院數學研究所華羅庚所長和關肇直先生審讀. 又在北京師範大學傅種孫副校長領導下,由北京師範大學數學系程廷熙、魏庚人、鍾善基、梁紹鴻、白尚恕、傅若男、常鍾璋等先生集體審讀,提出許多寶貴意見.

[illegible],書中仍會存有缺點和問題. 希望教師們和同

學們在使用中，如果發現了什麼缺點和問題，隨時告訴我們，以便做進一步的修正。

對於所有給本書提出意見的各位先生，在這裏致以衷心的感謝。

人民教育出版社

一九五六年三月

目 錄

第一章　緒論

I　基本概念

1. 幾何學　我們觀察周圍的各種物體，可以看到它們的外形和性質往往各不相同。

物體是根據它們的外形、重量和組成它們的物質的性質等來互相區別的。在區別各種物體的時候，最容易看到的，首先是每一個物體各具有它自己的形狀和大小。爲了滿足生活上的需要，我們常常製造一些物體；在製造這些物體的時候，我們必須使它們的形狀和大小適合於它們的用途。例如，船身應當具有的形狀，是使它能在水面上更好地保持平穩的狀態和更容易衝破水浪的阻力。

其次，每一個物體對於其他物體來說，都佔有一個確定的位置。在實際生活中，我們常常要用適當的方法把物體放置在所需要的位置上。例如，在工廠中正確地安裝機床和在農村中恰當地裝設水車等都是很重要的。

因此，研究物體的形狀和大小以及它們相互的位置，就構成了人類知識的一個領域。

研究物體的形狀、大小和相互位置的科學叫做**幾何學**。

幾何學和其他一切科學一樣，也是由人類生活的實際需要產生的。原始時代的人，就已經有區別周圍的物體的形狀和大小的需要，並且要注意到它們分佈的位置。例如，他們要熟記居住的地方、打獵的地方等等。因此他們就漸漸學會

怎樣判定各個物體之間的距離和各個地區的大小。

隨着人類社會生活的發展，對於物體的形狀、大小和相互位置的研究更有需要，從而也就要求人類具有更加豐富的幾何知識。

在古代的埃及，由於尼羅河每年的泛濫，沖壞了耕地的疆界，在泛濫以後，需要修復它們。這樣，對於測量地面上的某些距離和面積就有了需要。爲了完成這些工作，必須掌握適當的法則以便計算距離、面積和繪製土地的圖樣等等。這些法則曾經被研究出來並且被記錄下來。

希臘人在和埃及人通商中，也學到了這些法則。他們逐步加以補充，使這些法則發展成爲一門完整的科學。他們把這一門科學稱爲'幾何學'，這個名詞的原義就是'測量土地的技術'。

希臘的數學家歐几里得（約紀元前 330—275）特別詳細地研究了這一門科學，編寫出了一本書，叫做'幾何原本'。這本書對於幾何學的發展和幾何學的教學，都起了巨大的作用。後來的人學習幾何學，根據的就是這本書。直到現在，人們還根據它來編寫幾何學的課本。

我國對於幾何學的研究具有幾千年的歷史，並且有很多的偉大成就。在黑陶文化時期（約紀元前 1,000 年），陶器花紋就有菱形、正方形和圓內接正方形等幾何圖案。在墨翟（紀元前 480—390）所著的書裏，就提到許多幾何學方面的知識。在古代算書'九章算術'中，載有計算各種形狀的土地面積和物體體積的方法。在另一本古代算書'周髀算經'中，已講到

關於直角三角形各邊間的關係的問題。

2. 幾何圖形 當我們只研究一個物體的形狀和大小而不研究它的其他性質的時候，我們就把這個物體叫做**幾何體**，或者簡稱爲**體**。如果兩個物體的形狀和大小都相同，而只是製造它們的材料不同，那末它們的物理性質雖然不一樣，但它們却還是完全相等的幾何體。例如，一個橡皮球和一個同樣大小的木球，它們的物理性質雖然不同，但它們却是完全相等的幾何體。

任何物體都是用它的**面**來和鄰接的其他物體分開的。例如，把物體和鄰接它的空氣分開的就是這個物體的面。我們可以離開物體本身而單獨想像它的面。在這樣想像的時候，我們把幾何的面看做是沒有厚度的。當然，這樣的面實際上並不能單獨存在，我們只是在想像中來體會它。在自然界中只能找到它的大概的形像，例如，極薄的一張紙或者一個肥皂泡的薄膜。

物體的面有時相交（即相遇）。例如，煙囱的面和屋頂的面，正方體的相鄰的兩個面等等。當面和面相交的時候就得到了**綫**。例如，煙囱的面和屋頂的面相交的地方就是綫，正方體的棱（兩個面相交的地方）也是綫。我們可以離開幾何的面而單獨想像綫。我們把幾何的綫看做是沒有厚度和寬度的。這樣的綫實際上也不能單獨存在，我們只是在想像中來體會它。在自然界中也只能找到它的大概的形像，例如，一條絲綫或者用鉛筆的尖端在紙上畫的一條痕跡。

兩條綫有時也會相交。當綫和綫相交的時候就得到了

點。例如，正方體相鄰的兩條棱就在它的頂相交，正方體的頂就是點。我們也可以離開幾何的綫而單獨想像點。我們把幾何的點看做是沒有厚度、寬度和長度的，就是把它看做是沒有任何大小的。這樣的點實際上也不能單獨存在，我們只是在想像中來體會它。在自然界中也只能找到它的大概的形像，例如，一個極小的微粒或者用細針在紙上刺的一個小孔。

如果一點任意移動，那末它在這種運動中就畫出一條綫。例如，用鉛筆的尖端在紙上畫，就留下一條痕跡。這條痕跡就給我們以綫的概念，它是由一點（鉛筆的尖端）運動而成的。

如果一條綫從一個位置移動到另一個位置，那末它在這種運動中就可能畫出一個面。例如，我們仔細觀察自行車輪的輻條轉動的情形。當車輪很快地轉動的時候，每一條輻條就好像成了一個圓盤，從這裏我們就可以看到由於綫的運動而成面的情形。

點、綫、面、體或者它們的集合，都叫做**幾何圖形**，簡稱**圖形**。

幾何圖形具有下面的性質：**幾何圖形可以在空間移動而不改變它的形狀和大小。**

如果把一個幾何圖形放到另一個幾何圖形上面，它們的各部分能够完全重合，這兩個幾何圖形就叫做**全等形**。

3. 直綫 直綫是最簡單的綫。緊緊拉着的細綫或者從一個小孔透進來的光綫等都給我們以直綫的概念。

直綫有下面的性質：**過任意兩點，可以引一條直綫，並且**

只能引一條直綫.

在實踐中經常要應用到直綫的這種性質. 例如, 要在平地上測定一條直綫, 我們先把一根標桿插到地上, 然後在另一個地方插上第二根標桿, 這兩根標桿就確定了一段直綫. 爲了延長這段直綫, 我們在第二根標桿外的另一個地方再插上第三根標桿, 把眼睛靠近它來看前面的兩根標桿而把它移動, 使得它恰好把前面的兩根遮住. 同樣可以安置第四根、第五根標桿等等. 鋸工也應用直綫的這種性質來把木料鋸成木板. 他們在木料兩端的兩點之間拉緊一條綫, 然後根據這條直綫來鋸開木料.

4. 平面 平面是最簡單的面. 在容器中處於平靜狀態的液體的表面或者磨得很平滑的鏡面等都給我們以平面的概念.

平面有下面的性質: **如果用一條直綫連結平面內的任意兩點, 那末這條直綫上所有的點都在這個平面內.**

當鉋平一塊木板的時候, 我們利用平面的這種性質來檢查它鉋得是否平滑. 我們把一根經過精確地校正過的尺的邊放到木板的面上. 如果這塊木板已經鉋得十分平滑, 那末無論把這根尺的邊放在什麼地方, 邊上所有的點都應當緊緊地貼在木板的面上.

5. 平面幾何學 幾何圖形分平面的和空間的兩種. 如果圖形上所有的點都在一個平面內, 這個圖形就叫做**平面幾何圖形**, 在一張平滑的紙上所畫的圖畫給我們以這種圖形的概念; 如果圖形上所有的點不全在一個平面內, 這個圖形就

叫做空間幾何圖形，任何幾何體都給我們以這種圖形的概念。

只研究平面幾何圖形的性質的幾何學叫做**平面幾何學**。

6. 研究幾何圖形的方法 研究幾何圖形的形狀、大小和相互位置，只用直接測量或單憑經驗有時是不够的。例如，直接測量一個物體的長度和高度並不永遠都是可能的。測量桌子的長度和房間的高度比較容易，但要測量一架飛着的飛機離開地面的高度就相當困難了。

因此，在幾何學中，我們不限於運用直接測量，更主要的是運用推理的方法，也就是說，利用幾何圖形的已知的性質，來正確地進行推理，以發現新的性質。

例如，我們利用'過任意兩點，可以引一條直綫，並且只能引一條直綫'這個性質，就可以推得：**兩條直綫不能有一個以上的交點**。因爲，如果兩條直綫能够相交於兩點，那末過這兩點就可以引兩條直綫，而不是只能引一條直綫。這就是，運用正確的推理方法，我們得到了'兩條直綫不能有一個以上的交點'這新的性質。

這樣的正確推理，是研究幾何圖形的性質的主要方法。推理的過程叫做**證明**。

II 直綫

7. 直綫、射綫、綫段 我們把直綫想像成是向兩方無限伸長着的。直綫通常用表示它的任何兩點的兩個大寫字母來表示，例如，'直綫 AB' 或者 '直綫 BA'（圖 1）；或者用一個小寫

字母來表示，例如，'直綫 a'（圖 2）.

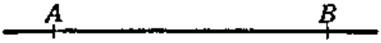


圖 1

圖 2

畫直綫可以用直尺. 例如，要過兩個已知點 A 和 B 畫直綫，我們就把直尺的邊緊緊地靠着這兩個已知點，並且用鉛筆的尖端沿着直尺的邊來畫.

在直綫上某一點一旁的部分叫做**射綫**，這點叫做射綫的**端點**.

射綫通常用表示它的端點和射綫上另外任何一點的兩個大寫字母來表示，把表示端點的字母寫在前面，例如，'射綫 OC'（圖 3）.

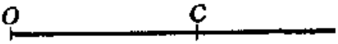


圖 3

直綫上任意兩點間的部分叫做**綫段**，這兩點叫做綫段的**端點**.

綫段通常用表示它的兩個端點的大寫字母來表示，例如，'綫段 DE' 或者 '綫段 ED'（圖 4）；或者用一個小寫字母來表示，例如，'綫段 b'（圖 5）.

圖 4

圖 5

已知一條綫段的兩個端點，我們可以用直尺靠緊這兩個端點畫出這條綫段. 連結兩點的綫段的長叫做這兩點間的**距離**.

利用直尺，我們可以把一條綫段向兩方延長到任意長.

例如，我們可以過 B 點把綫段 AB 延長（圖 6），也可以過 A 點把它延長（圖 7）。在前一種情形，我們說是延長 AB；在後一種情形，我們說是延長 BA，或者說是反向延長 AB。延長的部分叫做原綫段的**延長綫**（圖中用虛綫表示的）。

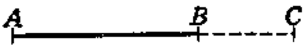


圖 6

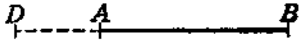


圖 7

8. 綫段的相等和不等　把一條綫段放到另一條綫段上，如果能够使它們的兩個端點分別重合，這兩條綫段就叫做**相等的綫段**。例如，把綫段 AB 放到綫段 CD 上，使 A 和 C 重合，並且使綫段 AB 順着綫段 CD 落下。如果 B 和 D 也重合（圖 8），那末綫段 AB 和綫段 CD 就相等。這時，可以寫成：

$$AB=CD \text{ 或者 } CD=AB.$$

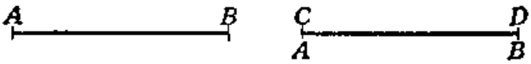


圖 8

如果 B 和 D 不重合，那末綫段 AB 和綫段 CD 不相等。這時，如果 B 落在 C、D 兩點中間（圖 9），綫段 AB 就是較短的綫段，可以寫成：

$$AB<CD \text{ 或者 } CD>AB.$$

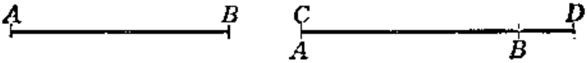


圖 9

如果 B 落在綫段 CD 的延長綫上(圖 10)，綫段 AB 就是較長的綫段，可以寫成：

$$AB > CD \text{ 或者 } CD < AB.$$

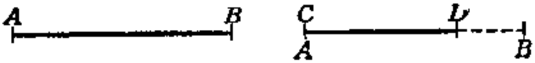


圖 10

從直綫上一點，向它的任何一方都可以截取一條綫段等於已知的綫段。這時，我們需用**圓規**。例如，要在直綫 a (圖11)上從一點 C 截取和已知綫段 AB 相等的綫段，我們可以先把圓規的兩脚分開，使它的兩個尖端間的距離等於 AB，然後保持着這個距離，把圓規的一個尖端放在 C 上，另一個尖端落在直綫 a 的另一點 D 上，這時，綫段 CD 就等於綫段 AB。同樣，我們也可以從 C 向另一方截取。

圖 11

9. 綫段的加減 如果在綫段 AB 上取任意一點 C(圖12)，就得到兩條新的綫段 AC 和 CB。這時，綫段 AB 叫做綫段 AC 與綫段 CB 的和，綫段 AC (或 CB)叫做綫段 AB 與綫段 CB (或AC)的差。就是

$$AB = AC + CB;\quad AC = AB - CB;\quad CB = AB - AC.$$

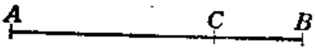


圖 12

要把兩條已知的綫段 AB 和 CD (圖 13) 加起來，我們可

以在綫段 AB 的延長綫上，從 B 起截取綫段 BE 使它等於 CD. 這時，綫段 AE 就是綫段 AB 與綫段 BE 的和，也就是綫段 AB 與綫段 CD 的和：

$$AE=AB+BE=AB+CD.$$

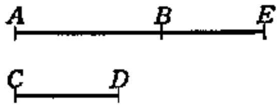


圖 13

如果我們在綫段 AB 的延長綫上，從 B 起截取綫段 BC 使它等於綫段 AB (圖 14)，那末，

$$AC=AB+BC=AB+AB=2AB.$$

所以綫段 AC 等於綫段 AB 的 2 倍，而綫段 AB (或者綫段 BC) 等於綫段 AC 的二分之一。這時，我們說 B 把綫段 AC 平分(或者二等分)。平分一條綫段的點叫做這綫段的**中點**。

圖 14

用相同的方法，我們可以把三條、四條、……綫段加起來，或者作一條綫段使它等於已知綫段的 3 倍、4 倍、……等等。

要從一條較長的綫段 AB 減去一條較短的綫段 CD (圖 15)，我們可以在綫段 AB 上，從 A 起截取綫段 AE 使它等於 CD，這時，綫段 EB 就是綫段 AB 與綫段 AE 的差，也就是綫段 AB 與綫段 CD 的差：

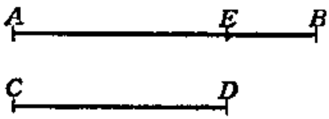


圖 15

$$EB=AB-AE=AB-CD.$$

10. 綫段的長度 要量一條綫段的近似長度，可用刻度尺（帶有刻度的直尺）。通常我們用的刻度尺上的兩個小刻度間的距離等於一毫米。

爲了量一條綫段的長度，我們把刻度尺靠近綫段，使刻度的起點和綫段的一個端點重合，然後讀出和綫段另一個端點相合的刻度數。

如果已知的各綫段用同一長度單位（例如厘米）來量，並且量得的長用相應的數來表示，那末綫段的和就用量這些綫段所得各數的和來表示；兩條綫段的差，就用量這兩條綫段所得兩數的差來表示等等。

用刻度尺也可以近似地畫出已知長度的綫段。

例 1 從直綫上一點 M 起截取綫段 MN 等於 10 厘米，再從 M 起向同一方向截取綫段 MP 等於 16 厘米。求綫段 MN 的中點 A 和綫段 MP 的中點 B 間的距離。

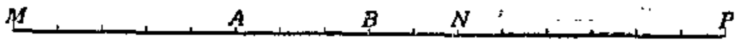


圖 16

解：$$MA=MN\times\frac{1}{2}=10\times\frac{1}{2}=5,$$

$$MB=MP\times\frac{1}{2}=16\times\frac{1}{2}=8.$$

$\therefore$ $$AB=MB-MA=8-5=3.$$

答：所求的距離是 3 厘米。

例 2 把一條 18 厘米長的綫段分成 2:3:4 三部分，求第一部分的中點和第三部分的中點間的距離。