发生函数论

[美] Herbert S. Wilf 著

王天明 译

清华大学出版社

发生函数论

[美] Herbert S. Wilf 著
王天明 译

清华大学出版社
北京

Generatingfunctionology, Second Edition
Herbert S. Wilf

北京市版权局著作权合同登记号:图字:01-2001-0537

图书在版编目(CIP)数据

发生函数论/(美)威尔福著;王天明译. 北京:清华大学出版社,2002
书名原文:Generatingfunctionology
ISBN 7-302-06132-7

Ⅰ.发… Ⅱ.①威… ②王… Ⅲ.函数论 Ⅳ.O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 097408 号

出 版 者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)
http://www.tup.com.cn
责任编辑:王海燕
印 刷 者:北京市清华园胶印厂
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开 本:850×1168 1/32 **印张**:8.625 **插页**:2 **字数**:216 千字
版 次:2003 年 2 月第 1 版 2003 年 2 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 7-302-06132-7/O·273
印 数:0001~3000
定 价:16.00 元

中译本序

“发生函数”的英文原词是 generating function. 它的另外两个译名是“生成函数”与“母函数”. 母函数虽词简而意深，但现今已不常用了.

发生函数方法是现代离散数学领域中的重要方法，它能以某种统一的程序方式处理和解决众多不同类型的问题. 正因为此方法所具有的威力和统一性的美妙之处已成为一般使用者的共识，所以本书作者、美国著名的计算数学家 H. S. Wilf 欣然将它抬举到“方法论”的地位，特别创造了一个一般英文词典中查不到的新单词“Generatingfunctionology”来命名他的专题著作. 这也就是本译著的英文原名.

确实，Wilf 的这本篇幅不大的著作，除了以单个词构成书名有特色之外，其内容题材也充满特色：一是通过一批精选例题的讲解和问题解答，显示了发生函数方法确实是组合数学中的基本而重要的方法，它是联结离散数学与连续数学之间的桥梁；二是充分显示了组合数学中方方面面的问题都能借助于发生函数的方法、原理，获得统一方式的处理和解决，这对初学者学会使用发生函数方法显然是极有教益的；三是 WZ 方法程序的论述，反映了数学机械化思想.

Wilf 的原著出版于 1990 年，而这本书乃是原著 1994 年第 2 版的中译本. 第 2 版订正了初版中的一些差错并增添了几节很有趣的题材，如对称群的循环指标、置换的平方根、动物的计数问题等.

上述原著的中译本是王天明教授教学工作过程中的产物. 中

译本译述过程中修正了原著中的个别差错.大连理工大学数学系高年级与研究生班曾多次使用译本作教材,师生均感得益.现今译本正式出版了,希望国内能有更多的数学界读者喜欢这本书,同时也希望读者发现任何问题时,请直接与译者联系为幸.

我本人从青年时代起,就喜欢发生函数方法,并用它解决过组合分析问题,故乐于为此中译本的问世而作序.

徐利治

北京寓所

2002,3,25

第 2 版序言

这一版包含了第 4 章中的几个新的应用领域，一些新的问题和解答，一些叙述的改进和纠错. 也包含了一个附录，描述了在发生函数研究中特别有用的计算机代数程序的某些特点.

我还需要感谢一些人，他们使本书变得更好. 特别地，Bruce Sagan 在他的班级里试用了本书后，提出许多有益的建议. 许多读者收到了我提供的勘误表(现在还继续提供)，对指出任何错误的读者我都表示感谢.

Herbert S. Wilf
费城，宾夕法尼亚州
1992-5-21

序 言

本书讨论有关发生函数及其在离散数学中的某些应用.这个题目如此广泛,以致不能奢求给出全面的讨论.相反,我们只试图介绍一些主要思想.

发生函数是一方为离散数学而另一方为连续分析(特别是复分析理论)之间的桥梁.可以单独研究发生函数作为解决离散问题的工具.就发生函数给出处理这种问题的统一方法而言,它本身存在许多有效的、神奇的工具.希望忽略这个题目中解析部分的读者,可以跳过第 5 章和一部分前面的内容.

然而,省略本书的这些部分就如同听贝多芬第九交响乐的立体声广播只用了左声道.

发生函数的全部美只有调通双声道——离散的和连续的声道才能出现.看一下发生函数是怎样使求解差分方程就像玩游戏一样,然后再看,本质上靠观察复变函数理论是怎样给出这个解的近似大小.这两个声道相互作用对于欣赏音乐至关重要.

近年来,在组合理论中的双射证明方向趋势正旺.即是,如果我们想证两个集合有同样的大小,那么,我们应该清晰地显示出两个集合之间的双射.在许多场合下,首先由发生函数揭示出两个集合有同样大小的事实.即使知道双射论证,发生函数的证明可能更短或者更优美.

双射证明给人们某种感觉上的满足,即“真正”理解定理为什么是对的.发生函数论证有自然满足的感觉.噢! 我该想到它,与此同时,通常发生函数还提供寻找问题中数字的准确或近似公式的最好途径.

这本书在宾州大学离散数学讨论班课程中试用过，感谢讨论班同学帮助我至少排除了部分手稿的错误. 并且，感谢同事们提出的许多有益的建议. 任何热心提供改错的读者将会收到一份完全的勘误表和谢意.

Herbert S. Wilf
费城，宾夕法尼亚州
1989-9-1

目　录

第1章

入门的概念和例子

发生函数是一根晒衣绳，在它上面挂满了我们要展示的一列数.

这就是说，假定我们问题的解是一列数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$，我们想知道这个数列是什么；我们期望的将会是怎样的一种答案呢？

所能指望的最好答案，是关于 a_n 的一种简单公式. 对 $n=0, 1, 2, \cdots$，如果我们找到 $a_n = n^2 + 3$，那么，无疑我们解答了这个问题.

如果对未知数列的成员没有简单公式，又会怎样？毕竟一些数列是复杂的. 举一个令人毛骨悚然的例子，假定这未知数列是 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \cdots$，此处 a_n 是第 n 个素数. 这样一来，期望任何简单公式明显都是不合理的.

发生函数给你的弓加上另一根弦. 虽然，给出这个数列成员的简单公式可能毫无办法，可是，也许能够给出一个幂级数和的简单公式，这个级数的系数就是我们要找的数列.

比如，假定我们想知道斐波那契(Fibonacci)数 $F_0, F_1, F_2, \cdots$，且知道它们满足递归关系

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geqslant 1;\ F_0 = F_1 = 1).$$

这个数列由 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots$ 开始. 在本章例 2 中我们将看到，关于 F_n 有准确的，不太复杂的公式. 但是，只是为

了搞清发生函数的思想，说明发生函数专家是怎样回答这个问题的. 他们说，第 n 个斐波那契数 F_n 是函数 $\frac{1}{1-x-x^2}$ 关于原点的幂级数展开式中 x^n 的系数.

你可能承认这是一种答案，但肯定会留下遗憾. 你会说，这不是一个真正的答案，因为我们没有看到明显的公式. 这是个好解答吗?

在本书中，我们希望你信服像这样的解答通常是好得惊人. 因为它本身是优美的，它允许做关于这个数列的几乎任何你想做的事. 甚至在准确公式惊人复杂的场合，发生函数也可能是简单的、容易处理的.

用发生函数的解经常能做的一些事情如下：

(a) **为数列成员找出一个准确公式.** 假如你的数列是复杂的，不是总能找到准确公式，也不总是令人愉快. 但是，你至少为寻找这种公式做了一次很好的尝试.

(b) **求递归关系.** 大多数情况下，发生函数由递归关系产生. 有时从发生函数能找到新的递归关系，而不是开始的那一个，新的递归关系给出有关这个数列本质的新的洞察.

(c) **求数列的平均值和其他统计性质.** 发生函数能给出未知数列代表的问题的各种概率方面量的极快的推导.

(d) **求数列的渐近公式.** 发生函数的一些深层次的有效的应用就在这里. 特别是当人们处理很困难的数列时，不去寻找可能毫无希望的准确公式，而去求一个近似公式. 例如，当我们不能指望求出第 n 个素数的准确公式时，当 n 很大时，第 n 个素数近似地等于 $n\log n$，在某种精确的意义下，这是一个漂亮的结果(素数定理). 在第 5 章，我们将讨论渐近问题.

(e) **证明单峰性、凸性等.** 一个数列是单峰的，如果开始稳定地增加，然后再稳定地减少. 许多组合数列是单峰的，有各种各

样证明这种定理的方法. 发生函数是可以提供帮助的. 存在一些方法,它们能把发生函数的解析性质转换成关于其系数数列升降的计算. 当发生函数方法有效时,它往往是已知的最简单方法.

(f) 证明恒等式. 在组合数学和数学的其他分支,已知许多恒等式. 我们所指的恒等式是这样一些等式:对给定的自由变量的值,断定其中的一个公式等于另一个公式. 例如,众所周知

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2=\binom{2n}{n}\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

证明这种恒等式的一种方法是,考虑以此恒等式左边所示数列为系数的发生函数和恒等式右边数列形成的发生函数,然后证明它们是同一个函数. 这听起来似乎是显然的,但是,它是不可思议的,当从发生函数的观点来看时,许多推导都变得那么简单,那么明显. 在 4.3 节我们介绍的"万金油"方法展示了这些前景的一部分. 在 4.4 节有理函数方法是解决更多更难的这类问题的新方法.

(g) 其他 关于数列还有什么想知道的吗? 发生函数可提供希望. 一个例子是揭示同余关系. 另一个可能性是发生函数可能与某个已知发生函数惊人的相似,这可能使你发现你的问题与另一个问题密切相关,这是你从前未曾想到过的. 值得注意的是,利用这种方法即使不能给出这两个问题的任何一个解的公式,你也会发现,你的问题的答案与另一个问题的答案有明显的关系!

在本章的其余部分给出一些问题的例子,从发生函数观点考虑它们是有益的. 我们希望研究这些例子之后,读者至少会部分地信服这种方法的威力和这个统一方法的美妙之处.

1.1 较易的两项递归关系

某个数列 $a_0,a_1,\cdots$ 满足条件

$$a_{n+1}=2a_n+1\quad (n\geqslant 0;a_0=0). \tag{1.1.1}$$

求该数列.

首先,试计算这个数列的前几项,看它像什么.它以0,1,3,7,15,31,…开始,这些数看起来有点像2的幂减1.故我们猜测 $a_n=2^n-1(n\geqslant 0)$,并且基于递归关系(1.1.1)用归纳法可以很快地证明此猜测.

但是,这是一本关于发生函数的书,让我们把上面的方法忘掉.我们假装不认识这个公式,并且使用发生函数方法.因此,代之求数列$\{a_n\}$,让我们求发生函数 $A(x)=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$.一旦我们知道这个函数是什么,将 $A(x)$ 展开成级数,就能够读出 a_n 的显式公式.

为求 $A(x)$,将递归关系(1.1.1)两边乘以 x^n,然后对递归关系有效的 n 值求和,即对 $n\geqslant 0$ 求和.然后,将这些和与未知的发生函数建立关系.

如果首先计算式(1.1.1)的左边,结果是 $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_{n+1}x^n$.我们怎样使这个结果与 $A(x)$ 联系起来呢?它几乎与 $A(x)$ 相同.但是,每一项 a 的下标比 x 的幂大1.由于在这个问题中,$a_0=0$,显然

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}a_{n+1}x^n&=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+\cdots\\&=\frac{(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)-a_0}{x}\\&=\frac{A(x)}{x},\end{aligned}$$

因此,式(1.1.1)左边运算的结果是$\frac{A(x)}{x}$.

其次,计算式(1.1.1)的右边.乘以 x^n 并对所有 $n\geqslant 0$ 求和.结果是

$$\sum_{n\geqslant 0}(2a_n+1)x^n=2A(x)+\sum_{n\geqslant 0}x^n=2A(x)+\frac{1}{1-x},$$

此处，我们利用了对 $|x|<1$ 成立的熟知的几何级数求和公式

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

如果令式(1.1.1)两边的计算结果相等，我们得到

$$\frac{A(x)}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x},$$

经简单计算，将未知发生函数 $A(x)$ 的解写成

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$

这就是这个问题的发生函数. 未知数 a_n 被整齐地安排在晒衣绳上：a_n 是 $A(x)$ 的级数展开式中 x^n 的系数.

假设我们想要求出 a_n 的显式. 我们应该把 $A(x)$ 展成级数. 对这个例子来说，并不困难. 因为部分分式展开是

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)(1-2x)} &= x\left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right)\\ &= (2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + \cdots) -\\ &\quad (x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)\\ &= (2-1)x + (2^2-1)x^2 + (2^3-1)x^3 +\\ &\quad (2^4-1)x^4 + \cdots\end{aligned}$$

现在，x^n 的系数清楚了，即对每个 $n\geqslant 0$，$a_n = 2^n - 1$.

因为，在这个例子中，通过观察，几乎立即得到解答. 并不需要这种重型武器. 发生函数论给人深刻的印象是，即使你的问题比这个问题再困难一些，这种方法与我们刚做过的几乎相同. 所以，在答案不太明显的情况下，这种重型武器也能给出解答.

1.2 较难的两项递归关系

某数列 $a_0, a_1, \cdots$ 满足条件

$$a_{n+1} = 2a_n + n \quad (n \geqslant 0; a_0 = 1). \tag{1.2.1}$$

求该数列.

像前面一样,可以首先算出这个数列的前几项,得到 1,2,5,12,27,58,121,…在这个例子中,显然不能立即得到一般公式.所以,我们使用发生函数方法,即代替找数列 $a_0,a_1,\cdots$ 我们求函数 $A(x)=\sum_{j\geq 0}a_jx^j$. 一旦找到这个函数,这个数列将能从这个函数幂级数系数数列辨认出来.*

像例 1 一样,第一步弄明确使求解的递归关系成立的下标的取值范围.在这个例子中,式(1.2.1)在括号中清楚地表明对 $n=0,1,2,\cdots$ 递归关系有效.不要处理对自由度量没有限制的递归关系.

下一步是定义要找的发生函数.在这个例子中,因为要找的数列是 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 一个自然的选择是我们前面提到的函数 $A(x)=\sum_{j\geq 0}a_jx^j$.

其次,将递归关系(1.2.1)两边乘以 x^n,然后对使关系式成立的所有 n 的值求和.这个例子是从 $n=0$ 到∞求和.试着用刚才定义的函数 $A(x)$ 表示上面计算的结果.

如果对式(1.2.1)左边进行了上面的运算,结果是

$$\begin{aligned}a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+\cdots &= \frac{A(x)-a_0}{x}\\ &= \frac{A(x)-1}{x}.\end{aligned}$$

如果用 x^n 乘式(1.2.1)的右边,然后对非负整数 n 求和将会怎样?很明显,这个结果是

$$2A(x)+\sum_{n\geq 0}nx^n.$$

我们需要辨认级数

* 如果你对幂级数感到生疏,参考第 2 章,那里有这个题目的复习内容.