■ 本册主编　张乃达

大趋势

互动探索与创新演练

DAQUSHI HUDONG TANSUO YU CHUANGXIN YANLIAN

高二数学（上）

试验教材

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

大趋势

互动探索与创新演练

高二数学(上)

试验教材

本册主编　张乃达
本册编者　汤希龙　江金彪　龙善培　孔晓燕

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社
·桂林·

编委名单

大趋势 互动探索与创新演练

高二数学(上)

本册主编 张乃达

责任编辑:莫曲波 **封面设计:姚明聚** **版式设计:林 园**

广西师范大学出版社出版发行

(广西桂林市育才路 15 号 邮政编码:541004
网址:http://www.bbtpress.com.cn)

柳州市彩色印刷包装总厂印刷

*

开本:890×1 240 1/32 印张:10.875 字数:339 千字

2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷

印数:00 001~20 000 册

ISBN 7-5633-4043-2/G·2499

定价:12.00 元

序

为了适应知识经济时代的需要，为了适应日趋激烈的国际竞争，我国正在积极推进基础教育课程改革。到 2005 年秋季，中小学阶段各起始年级，都将进入新课程。这是我们中小学教育面临的全新的变革，无论是教师，还是学生，都必须顺应这一变革。本丛书就是为了帮助老师、同学们顺应这一变革而编写的。目前，我们所使用的教材，有的是根据新课程标准编写出来的，有的是根据新课程标准的精神，或多或少作了修订。但是无论使用哪种教材，我们老师的教、学生的学，理念都必须更新，都必须顺应课程改革的浪潮！

新的课程标准的核心理念就是“强调了课程的功能要从单纯注重传授知识转变为体现引导学生学会学习，学会生存，学会做人”（教育部：《基础教育课程改革纲要》），为此，我们在教学中必须从知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观这三个维度来构建教学目标体系，必须大力提倡主动学习、互动学习、合作学习、探究学习、创造性学习。这就是我们在这套丛书中一以贯之、孜孜以求的目标！

丛书与最新出版的教材配套，大体按照教材的教学单元编排，每单元设置四个栏目：

· **兴趣情境导引**　根据学生的学习、生活、实践，创设教学情境，从中导引出本单元的教学目标、教学内容。这不仅符合从具体到抽象，从实践到理论的认知规律，降低了学习的难度，而且有助于激发学习兴趣，培养学生的探究意识、实践意识和问题意识。

· **问题互动探索**　将本单元教学重点、难点，按照教材的逻辑顺序

和学生的认知规律，合理加以编排，以师生对话的形式，引导学生逐层深入地把握本单元教学内容，构建知识体系，掌握学习方法，培养相关技能和智能，发展学科兴趣。本丛书编写者依靠丰富的教学经验和教学智慧，力求胸有全局地把握教学的重点难点，把握学生思维情感的发展脉络，恰到好处地解惑释疑，传道授业，使学习过程真正成为师生互动、合作交流和探究发现的过程.

·**综合开放课堂** 这一栏目包括两份试卷。“随堂热身”中，主要是比较切近单元教学内容的基础题；“课后充电”中，主要是帮助学生进一步发展、提高的中等题、拔高题。两份试卷力求题型新颖，特别注重开放型、应用型、综合型试题的开发、配置。本栏目的创意还在于：在题目后面设置了“园丁指路”和“合作交流”这些子栏目，简要说明两份试卷的命题思路，帮助学生对测试结果进行分析，针对不同类型学生给予相应的指导和鼓励，并且就本章重点、难点内容，进一步提出具体问题，提供解题所必需的背景资料，这样使得单元测试真正发挥反馈、矫正、校正的功能，从而成为互动学习、探究学习的有机组成部分。

·**自我总结归纳** 这一栏目希望学生自行填写。填写的过程，就是对学习过程进行反思的过程。思维发展心理学的研究表明，对思维过程的反思，是培养、发展思维能力的重要途径，同样，对学习过程的反思，也是学会学习的重要途径和主动学习、探究学习、互动学习的重要内容。

本丛书的编写者大都是江苏省各大名校的特级教师、高级教师，具有丰富的教学科研经验和编写教辅读物的经验，有几位老师还参与了新课程标准的研究制订和新教材的教学实验。尽管如此，编写本丛书毕竟是一门全新的课题，我们希望与广大的年轻朋友们在“互动探索”中使其日臻完善。

蒋念祖

目　录

第六章　不等式

兴趣情境导引

情境1　足球射门中的学问

小林是学校足球队队员，他技术好，又是一个爱动脑筋的学生，在足球比赛中，常常需要在足球场边线处射门，他常想在边线的什么地方射门才能使命中率最高呢？

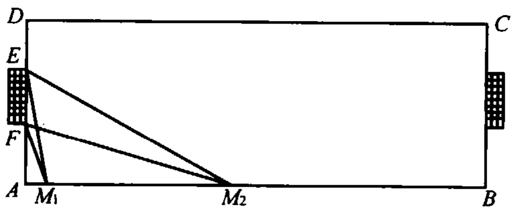


图 6-1

情境2　箱体尺寸的设计

小童的父亲要到美国访问，受人之托希望多带些东西回来. 中国民航《国际旅客》须知中有关“计件免费行李额”中有规定：“……免费随行的行李件数为两件，每件箱体三边之和不得超过 62 英寸(158 cm)，但两件之和不得超过 107 英寸(273 cm)，每件最大重量不得超过 32 kg”.

请问小童的父亲携带的两个箱子的长、宽、高各为多少时可达到最大容积？

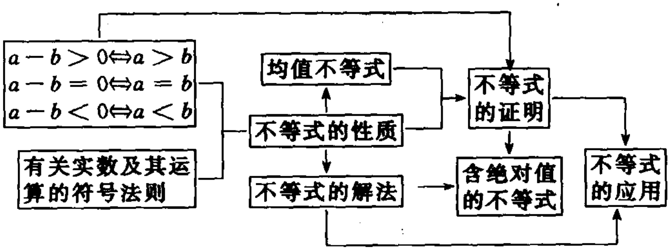
情境3 洗衣服的学问

生活中处处用到数学，这不，洗衣服时也用到数学.

衣服脏了要洗，洗衣服时要节约用水，希望用一定量的水将衣服洗得尽量干净.现在有一定量的清水，怎样使用它才能把揉搓打了肥皂的衣服上的脏东西冲得尽可能地多一点呢？是冲一次还是把清水分几次使用呢？若是后者，如何分配每次清水的用量，才能尽量地把衣服洗得干净呢？这个问题需要用不等式来解决.

问题互动探索

探索结构图



三点视窗

重点	难点	疑点
1. 不等式的性质 2. 用均值不等式求最值 3. 不等式的证明 4. 不等式的解法	1. 不等式的证明 2. 含参数的不等式问题 3. 用不等式解决实际问题	1. 用均值不等式求最值时，为什么不等号一边要是常数，且等号要能成立？ 2. 解含参数的不等式时，如何分类讨论？

不等式是中学数学的重要内容，它与数、式、方程、函数、三角、解析几何有广泛的联系，因此学好不等式知识对学好中学数学知识至关重要.

课题1 不等式的性质

老师 以下是一些同学常常持有的错误看法：

大数的乘积一定大；

大数的倒数一定小；

……

请举反例说明它们是错误的.

为了避免在不等式方面犯错误，需要系统研究不等式的性质.

学生 如何理解课本中所讲的不等式的性质？

老师 这首先需要明白不等式的性质是以什么为基础来进行研究的，即不等式的性质是以什么为前提来进行证明的. 这个基础有以下方面：

相关知识链接

有关实数及其运算的符号法则，

如：正数的相反数为负数，实数的偶次方是非负数，同号两数相加，和的符号与加数符号相同，异号两数相乘为负数，等等.

以上述知识为基础证明了不等式的下述性质：

(1) $a>b\Leftrightarrow b<a$

(2) $a>b,b>c\Rightarrow a>c$

(3) $a>b\Rightarrow a+c>b+c$

(4) $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

(5) $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$

$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$

(6) $a>b\geqslant 0,c>d\geqslant 0\Rightarrow ac>bd$

(7) $a>b\geqslant 0\Rightarrow a^n>b^n(n>1,n\in\mathbf{N})$

(8) $a>b\geqslant 0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n>1,n\in\mathbf{N})$

这是不等式移项法则的依据.

注意比较性质(4)与(6)中条件的不同.

注意(6)(7)(8)中条件的“$\geqslant 0$”不能少.

这些不等式的性质是我们进一步研究不等式的依据.

范例1 试探求“$a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”成立的充要条件.

分析：分两步进行.

(1) 先探求必要条件：

由于$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$

于是由 $a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$成立，可得 $a>b\Rightarrow\frac{b-a}{ab}<0$ 成立.

由 $a>b$ 时，$b-a<0$，得 $ab>0$.

(2) 下面再试证“$ab>0$”是“$a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”成立的充分条件.

当 $ab>0$ 时，$a>b\Rightarrow\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

综上(1)、(2)可知：

“$a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”成立的充要条件是“$ab>0$”

讨论与反思：

可借助于 $y=\frac{1}{x}$ 的图像来得到结论.

数形结合方法.

从图上可以看出，由于 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上不是减函数，故“$a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”不一定成立，但 $y=\frac{1}{x}$ 分别在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上是减函数，于是我们知道“$a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”成立的充要条件是 $ab>0$.

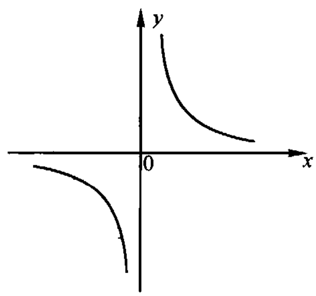


图 6-2

范例 2 若 $a\neq b$，试比较 a^3+13ab^2 与 $5a^2b+9b^3$ 的大小.

解答： $(a^3+13ab^2)-(5a^2b+9b^3)$

$$\begin{aligned}&=a^3+13ab^2-5a^2b-9b^3\\&=(a^3-b^3)-5a^2b+13ab^2-8b^3\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2)-b(a-b)\\&\quad\cdot(5a-8b)\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2-5ab+8b^2)\\&=(a-b)(a^2-4ab+9b^2)\\&=(a-b)[(a-2b)^2+5b^2]\end{aligned}$$

注意：系数之和为 0，因此令 $a=-b$，则该式为 0，故有因式 $a-b$，为进一步因式分解指明努力的方向.

为确定 $a^2-4ab+9b^2$ 的符号，需对其配方.

$\because$ $a\neq b$，

$\therefore$ $a-2b$ 与 b 不同时为零，否则，可得 $a=b=0$.

$\therefore$ $(a-2b)^2+5b^2>0$.

故(1)当 $a>b$ 时，

$(a-b)[(a-2b)^2+5b^2]>0$

此时 $a^3+13ab^2>5a^2b+9b^3$.

由于 $a-b$ 的符号与 a、b 的大小有关系，故引起讨论.

(2) 当 $a<b$ 时，$(a-b)[(a-2b)^2+5b^2]<0$

此时 $a^3+13ab^2<5a^2b+9b^3$.

讨论与反思：

通过本题我们可以看出，要比较两数的大小，只要确定它们差的符号即可.

解题方法链接

作差比较法的步骤：

(1) 作差

(2) 变形(常采用因式分解、配方法等)

(3) 定号

(4) 确定两数大小

因式分解的目的是将确定整个式子的符号问题转化为确定各因式的符号问题，从而化繁为简. 配方是为了便于确定其符号.

范例3 若 $a>0,b>0$，试比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

分析1：直接用作差比较法，确定其符号较困难. 这是两个指数式，可以用作差比较法，先比较它们的对数的大小.

将问题适当转换是解题的常用手段.

解法1： $\lg(a^ab^b)-\lg(a^bb^a)$

$=a\lg a+b\lg b-b\lg a-a\lg b$

$=(a-b)(\lg a-\lg b)$.

(1) 当 $a=b$ 时，$(a-b)(\lg a-\lg b)=0$，此时，$\lg(a^ab^b)=\lg(a^bb^a)$，即 $a^ab^b=a^bb^a$.

(2) 当 $a\neq b$ 时，$a-b$ 与 $\lg a-\lg b$ 同号，$(a-b)(\lg a-\lg b)>0$，因此 $\lg(a^ab^b)>\lg(a^bb^a)$，即 $a^ab^b>a^bb^a$.

这是因为 $a>b>0$ 时，$\lg a>\lg b$；$0<a<b$ 时，$\lg a<\lg b$.

分析2：根据不等式的性质(5)我们有：$\left.\begin{matrix}\dfrac{A}{B}>1\\ B>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow A>B$，$\left.\begin{matrix}\dfrac{A}{B}<1\\ B>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix}A<B,\dfrac{A}{B}>1\\B<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow A<B,\left.\begin{matrix}\dfrac{A}{B}<1\\B<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow A>B,\dfrac{A}{B}=1\Rightarrow A=B.$$

因此，比较两数的大小可转化为比较它们的商与 1 的大小.

解法 2：$\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$.

这样变形是为了便于利用指数函数的性质来解题.

(1) 若 $a>b>0$，则 $\dfrac{a}{b}>1,a-b>0$

$\therefore\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，于是 $a^ab^b>a^bb^a$.

(2) 若 $0<a<b$，则 $0<\dfrac{a}{b}<1,a-b<0$.

$\therefore\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，于是 $a^ab^b>a^bb^a$.

(3) 若 $a=b$，则 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}=1$，于是 $a^ab^b=a^bb^a$.

讨论与反思：

本题的解法 2 可归结为：

作商比较法的基本步骤：

(1) 作商

(2) 变形

(3) 比较商与 1 的大小

(4) 确定两数的大小

根据商与 1 的大小及分母的符号来确定.

范例 4　若 $0<a<b$ 且 $a+b=1$，比较 $a,b,2ab,a^2+b^2$ 的大小.

两两比较四数的大小，太繁了.

需比较 6 次.

可以先代特殊值，猜测结论：

将 $a=\dfrac{1}{4},b=\dfrac{3}{4}$ 代入可得

$a<2ab<a^2+b^2<b$

特殊化探路是常用的解题手段.

下面证明：$a<2ab<a^2+b^2<b$

解答：$\because$ $0<a<b$ 且 $a+b=1$，

$\therefore$ $0<a<\frac{1}{2}<b<1$.

只要比较3次即可.

$\because$ $2ab-a=a(2b-1)>0$，

$\therefore$ $2ab>a$. ①

也可用作商比较法得此结论①.

$\because$ $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0$，

$\therefore$ $a^2+b^2>2ab$. ②

$\because$ $b-(a^2+b^2)$

$=b-a^2-b^2=b(1-b)-a^2$

$=ab-a^2=a(b-a)>0$，

这样变形是为了便于利用条件 $a+b=1$.

$\therefore$ $b>a^2+b^2$. ③

不等式的传递性.

由①②③得 $a<2ab<a^2+b^2<b$.

范例5 已知 $a>0, a\neq 1$，比较 $\log_a(a^2+1)$ 与 $\log_a\left(\frac{1}{a}+1\right)$ 的大小.

分析：直接用作差比较法难以确定差的符号，但可以先比较两对数真数部分的大小.

先解决问题的一部分.

解答：$(a^2+1)-\left(\frac{1}{a}+1\right)$

$=\frac{a^3-1}{a}$

$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a}$

$=\frac{(a-1)\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{a}$

为确定其符号，需讨论 a 与1的大小.

(1) 当 $a>1$ 时，$a^2+1>\frac{1}{a}+1$，于是 $\log_a(a^2+1)>\log_a\left(\frac{1}{a}+1\right)$.

(2) 当 $0<a<1$ 时，$a^2+1<\frac{1}{a}+1$，于是 $\log_a(a^2+1)>$

$\log_a\left(\frac{1}{a}+1\right)$.

综上(1)(2)得 $\log_a(a^2+1)>\log_a\left(\frac{1}{a}+1\right)$.

讨论与反思：

学生1　本题给我们印象最深刻的是采用了“先解决问题的一部分”的策略.

学生2　是呀，有些题目不可能一下子全部解决，但随着“问题一部分的解决”，突破口被找到，问题的关键被暴露，这就为进一步全面解决问题奠定了基础.

学生1　本题若采用作商比较法呢？

学生2　$\dfrac{\log_a(a^2+1)}{\log_a\left(\frac{1}{a}+1\right)}=\log_{\left(\frac{1}{a}+1\right)}(a^2+1)$，要比较商与 1 的大小，问题仍然归结为比较 $\frac{1}{a}+1$ 与 a^2+1 的大小.

【小试牛刀】

1. 若 $x\in(5,9)$，$y\in(2,7)$，求 $x-y$，$\frac{x}{y}$ 的取值范围.

2. 若 $a>0$，$b>0$，$a\neq b$，比较 $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

3. 若 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a<0$，$p=1+a^2$，$q=1-a^2$，$r=\frac{1}{1+a}$，$s=\frac{1}{1-a}$ 试比较 p、q、r、s 的大小.

4. 若 a、b、m、n 都是正数，$m+n=1$，请比较 $\sqrt{ma+nb}$ 与 $m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$ 的大小.

【答案与提示】

1. $(x-y)\in(-2,7)$，$\frac{x}{y}\in\left(\frac{5}{7},\frac{9}{2}\right)$

提示：直接利用不等式性质解题.

2. 由　$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$$=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}$$

$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}>0,$$

可得$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

3. 先代特殊值如 $a=-\frac{1}{2}$,猜出结论:$s<q<p<r$,然后给出证明.

特殊化探路.

由 $r-p=\frac{-a(1+a+a^2)}{1+a}=\frac{-a\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{1+a}>0$.

得 $r>p$.

由 $p-q=2a^2>0$,得 $p>q$.

由 $q-s=\frac{a}{1-a}\left(a-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)>0$

得 $q>s$.

4. 先比较$(\sqrt{ma+nb})^2$与$(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})^2$的大小.

将问题适当转化.

$$(\sqrt{ma+nb})^2-(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})^2$$

$$=ma+nb-m^2a-2mn\sqrt{ab}-n^2b$$

$$=ma(1-m)+nb(1-n)-2mn\sqrt{ab}$$

$$=mna+mnb-2mn\sqrt{ab}$$

$$=mn(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.$$

(1) 当 $a=b$ 时,$(\sqrt{ma+nb})^2=(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})^2$,于是 $\sqrt{ma+nb}=m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$.

(2) 当 $a\neq b$ 时,$(\sqrt{ma+nb})^2>(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})^2$,于是 $\sqrt{ma+nb}>m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$.