

列线图

Lie
Xian
Tu

甘佑文

四川人民出版社

图 线 列

甘 佑 文

四川人民出版社

一九八二年·成都

责任编辑：崔泽海

封面设计：张仁华

第

列线图

甘佑文

四川人民出版社出版

(成都盐道街三号)

四川省新华书店发行

四川新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张13 插页2 字数258千

1982年4月第一版

1982年4月第一次印刷

印数：1—2,000册

书号：15118·51

定价：1.06元

前 言

成都科技大学机械系付教授、九三学社成员甘佑文同志，一九四五年毕业于武汉大学。他从事教育工作三十多年，有着丰富的教学经验和专业知识，尤其擅长于各种金属切削刀具的研究，素有“甘刀刀”之称。

一九六九年冬，他患了癌症，先后作了两次切除手术。十多年来，疾病给他带来了极大的困难和痛苦。但甘佑文同志没有被癌症所征服。他以坚韧不拔的意志，同病魔作斗争，与死神抢时间，终于将多年积累的资料和经验整理出来，编写了这本《列线图》，为祖国四化大业贡献了一份力量。

《列线图》一书在编写过程中，曾受到成都科技大学有关同志的大力支持。九三学社成都分社主任委员柯召同志和成都科技大学罗家骏同志为本书作了详尽的校阅，并提出了许多宝贵的意见。书写成后，在成都科技大学和九三学社作学术交流中，反映较好，并得到成都市委、市委统战部负责同志的赞助。在成都科技大学、四川人民出版社等单位的支持和共同努力下，本书终于和广大读者见面了。

本书在编写、校阅过程中，难免有不妥之处，恳望读者给予指出。

九三学社成都分社

一九八一年二月

序

甘佑文同志所著《列线图》一书，即将由四川人民出版社出版与读者见面了。

列线图 (Alignment chart) 是诺谟图 (Nomography) 的一种，也是数学中的一个课题，它是用若干具有刻度的线条，按一定的比例关系布列在图纸上，用以表达代数方程或公式中各变量间关系的图形。由于这种图形能表达方程或公式中各变量的相互关系，所以利用这种图形，可以根据方程或公式中的已知变量，迅速量出未知变量，从而大大简化求解过程。

因此，国内外科技界常把“列线图”作为一种快速计算手段，无论化工、机械、电气、土木，以及航天或经济领域，都广泛使用。就是在普遍使用电子计算器的今天，国际上也不能完全忽视此项数学工具的特定作用。从近年的科技文献中看出，许多学者仍广泛地使用这一特定计算工具，并使之充实和发展。但是，由于传统的研究，每每局限于先有几何图形而后有代数方程，因而列线图所能表达的代数方程为数有限，从而使列线图的绘制原理和应用范围，具有一定的局限性。

甘佑文同志积几十年研究之所得，在本书中冲破了先有

几何图形再有代数方程的方式，除全面系统地介绍了列线图的绘制原理和绘制方法之外，还根据点方程式理论，用共线行列式法，论证分析了若干基本的点方程式的结构规律，提出了是否能作图的判据，并阐述了接近共面图的作图原理和方法，从而扩大了列线图理论的数学基础，也扩大了列线图的实用范围。书中又列举了应用实例，为读者提供了如何处理实验数据的途径。

作者甘佑文同志从事工程教学多年，是国内研究刀具理论的学者。从一九七〇年以来，他身患癌症，先后动手术两次，行动起居颇为不便，但为了响应国家四化建设的号召，以顽强的意志克服困难，坚持写作，汇成此书，这种想四化所想，急四化所急的精神，很值得学习和敬佩。

四川大学 柯 召
成都科技大学 罗家骏

目 录

前言

序

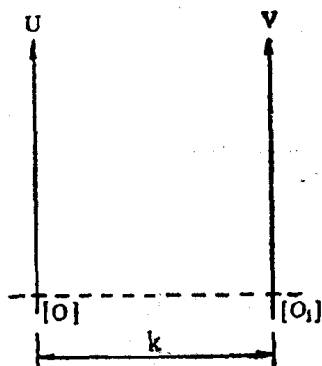
第一章 列线图原理	1
一、平行坐标.....	1
二、点方程式.....	2
三、点方程式的种类.....	3
四、在平行坐标中,三个点方程式共线的条件.....	9
五、绘制列线图的理论根据.....	11
六、刻度尺.....	13
七、列线图的绘制方法.....	14
第二章 列线图的基本形式	20
一、三平行直线列线图.....	21
二、二平行直线—水平直线列线图.....	43
三、二平行直线—斜直线列线图.....	52
四、二平行直线—曲线列线图.....	67
五、其余各类列线图的共线行列式及其展开式.....	80
六、二次曲线列线图.....	118
七、网线列线图.....	126
八、复合列线图.....	152

九、共线行列式的构成条件·····	157
第三章 列线图的并列 ·····	178
一、列线图的并列法则·····	178
二、参考线的种类和条件·····	180
三、基本列线图与诺谟图并列·····	186
第四章 列线图的变形 ·····	239
一、来源于代数方程的变形·····	240
二、来源于尺函数式和共线行列式的变形·····	242
第五章 列线图的应用 ·····	333
一、用以表达代数方程中各变量的相互关系·····	333
二、用以解答较难解的代数方程·····	338
三、用双刻度尺代替数值表·····	342
四、用列线图代替曲线图·····	348
五、把包含二变量的单因素实验数据 写成近似经验公式·····	356
六、把包含三变量的多因素实验数据 绘成列线图·····	370

第一章 列线图原理

一、平行坐标

列线图是在平行坐标的基础上产生出来的一种图形。数学上常用的平面坐标制，是笛卡尔直角坐标。这是由两条互相垂直的具有数量刻度的直线构成的一种坐标制。列线图所用的平行坐标，则是由两条平行的具有数量刻度的直线构成的一种坐标制。



平行坐标的构成，如图

图1-1

1-1 所示。即在平面上作两条互相平行的直线，这就构成了平行坐标的两条轴。称其中一条直线为 u 轴，另一条直线为 v 轴。在 u 轴上取一点 $[o]$ ，过 $[o]$ 点作一垂直线垂直于 u 轴，延长此垂直线使之与 v 轴相交于 $[o_1]$ 。垂直线 $[o o_1]$ 称为平行坐标的底线； $[o]$ 点和 $[o_1]$ 点分别称为 u 轴和 v 轴的原点；两原点间的距离 $[o o_1]$ 称为平行坐标的轴距 k 。

二、点方程式

今有一代数方程 $2u + 3v = 30$ (1-1)

若式中 $v = 0$, 则 $u = 15$; $u = 0$, 则 $v = 10$ 。

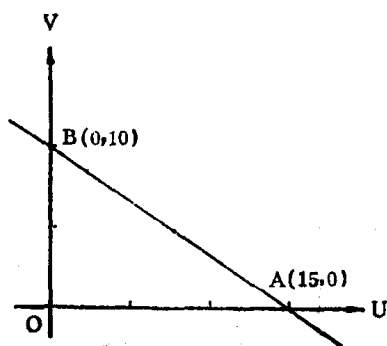


图1-2

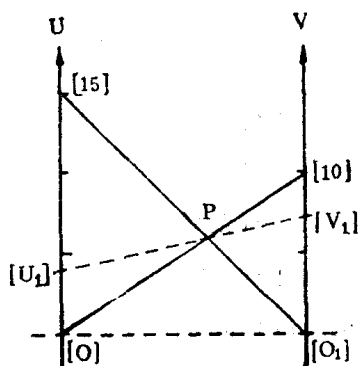


图1-3

上述 $u = 15$ 、 $v = 0$, 以及 $u = 0$ 、 $v = 10$ 在直角坐标中, 表达为图1-2所示的 $A(15, 0)$ 和 $B(0, 10)$ 两点。亦即表达为直角坐标中 u 轴上的截距 $\overline{OA}$ 和 v 轴上的截距 $\overline{OB}$, 过 A 点和 B 点作一直线 AB , 则直线 AB 即为代数方程 (1-1) 在直角坐标制中的图象, 而且此直线上任意一点都适合于代数方程 (1-1)。

在平行坐标中, 同样把上述 $u = 15$ 、 $v = 0$, 以及 $u = 0$ 、 $v = 10$ 在 u 轴和 v 轴上的截距 $[15, 0]$ 和 $[0, 10]$ 分别找出来, 联 $[15, 0]$ 以及 $[0, 10]$ 两条直线, 则此二直线将

相交于一点 P 。再者由于此二直线是唯一的，因而 P 点在平行坐标中表达为一定点。这个定点 P 也就是代数方程 (1-1) 在平行坐标中的图象，而且把过 P 点的任意直线 $[u_1, v_1]$ 与 u 轴的截距 $[ou_1]$ ，以及直线 $[u_1, v_1]$ 与 v 轴的截距 $[ov_1]$ 代入代数方程 (1-1)，也同样适合于代数方程。

根据上述对比，可得出如下结论：图 1-3 所示平行坐标中的定点 P ，与图 1-2 所示直角坐标中的直线 AB 有相同的性质。也就是说在直角坐标制中表达为直线的代数方程，在平行坐标制中表达为一点。所以，上述以 u 、 v 为二元的一次方程，称为平行坐标的点方程式。

三、点方程式的种类

上述以 u 、 v 为二元的一次代数方程 (1-1)，由于其系数项和常数项均为常数，在平行坐标中表达为一定点 P ，并称方程 (1-1) 为点方程式。

如果以 u 、 v 为二元的一次代数方程，其常数项不为常数而为任一自变数 w 的函数， $f_i = F(w)$ ，并称 f_i 为方程的可变常数项；同时，方程的系数项也不为常数，也为自变数 w 的函数 $g_i = G(w)$ 、 $h_i = H(w)$ ，并称 g_i 、 h_i 为方程的可变系数，则点方程式 (1-1) 即可改写为：

$$f_i + g_i \cdot u + h_i \cdot v = 0 \quad (1-2)$$

由于方程 (1-2) 中， f_i 、 g_i 、 h_i 均为自变数 w 的函数，

因而 f_i, g_i, h_i 均为变量, 并统称为方程 (1-2) 的可变系数; 同样, 若 f_i, g_i, h_i 均为常数, 并分别为 a_i, b_i, c_i , 则统称 a_i, b_i, c_i 为方程 (1-2) 的常系数。

当方程 (1-2) 的可变系数均为自变数 w 的函数时, 在直角坐标制中, 方程 (1-2) 所表达的是若干条斜率和截距互不相同的直线, 或称为直线系。而在平行坐标制中, 方程 (1-2) 所表达的则仍为一点, 不过这时方程 (1-2) 所表达的点, 已不复为一定点, 而将是一个动点, 所以, 方程 (1-2) 仍称为点方程式。

平行坐标中, 点方程式 (1-2) 的上述动点性质, 可由下述平面几何原理证明之:

设平行坐标中的点方程式为

$$f + g \cdot u + h \cdot v = 0 \quad (1-3)$$

若 $v = 0$, 则 $u = -\frac{f}{g}$;

$u = 0$, 则 $v = -\frac{f}{h}$

作平行坐标中表达代数方程 (1-3) 的点 P , 如图 1-4 所示。

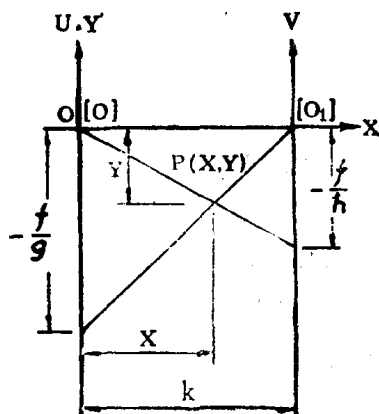


图 1-4

为了便于确定 P 点在平面上的位置, 使直角坐标的 Y 轴与平行坐标的 u 轴重合; 使直角坐标的 X 轴与平行坐标的底线重合, 如图 1-4 所示。于是有:

$$\left(-\frac{f}{g} - y\right) : x = -\frac{f}{g} : k$$

即得
$$-\frac{f}{g} \cdot x + k \cdot y + \frac{f}{g} \cdot k = 0 \quad (1-4)$$

$$\text{又因 } \left(-\frac{f}{h} - y\right) : (k - x) = -\frac{f}{h} : k$$

又得
$$-\frac{f}{h} \cdot x - k \cdot y = 0 \quad (1-5)$$

解 (1-4)、(1-5) 两式，得直角坐标中 P 点的坐标为：

$$\begin{cases} x = \frac{h}{g+h} \cdot k \end{cases} \quad (1-6)$$

$$\begin{cases} y = -\frac{f}{g+h} \end{cases} \quad (1-7)$$

由 (1-6)、(1-7) 两式知：因为可变系数 f 、 g 、 h 均为自变数 w 的函数，当自变数 w 为某一数值时，P 点的坐标 (x, y) 也将有某一定值，所以，P 点将随自变数 w 而变化，故 P 点为一动点。

利用 (1-6)、(1-7) 两式，不仅能证明 P 点是随自变数 w 而变化的动点，还可以说明点方程式 (1-2) 的其它一些性质。

1. 当点方程式 (1-2) 的可变系数 f 、 g 、 h 均为常量 a 、 b 、 c 时，由于 f 、 g 、 h 这时已为定值，故点方程式 (1-2) 所表达的是一定点 P；

2. 当点方程式 (1-2) 的可变系数中仅只 f 为变量，

而其余两个可变系数 g 、 h 为常量 b 、 c ；或 g 、 h 为具有相同形式的函数式；或其中之一为零时，点方程式 (1-2) 所表达的是横向坐标距一定，仅纵向坐标距随自变数 w 而变化的动点 P ，亦即平行于 u 、 v 轴的直线。所以，具有如下结构形式的点方程式，均称为平行直线点方程式：

$$f_i + b_i \cdot u + c_i \cdot v = 0 \quad (a-1)$$

$$f_i + b_i \cdot u + b_i \cdot v = 0 \quad (a-2)$$

$$f_i + b_i \cdot u = 0 \quad (a-3)$$

$$f_i + c_i \cdot v = 0 \quad (a-4)$$

$$f_i + g_i \cdot u = 0 \quad (a-5)$$

$$f_i + h_i \cdot v = 0 \quad (a-6)$$

$$f_i + g_i \cdot u + g_i \cdot v = 0 \quad (a-7)$$

3. 当点方程式 (1-2) 的可变系数中仅只 $f = 0$ ，其余两个可变系数 g 、 h 或均为变量；或其中之一为变量时，则点方程式 (1-2) 所表达的是纵向坐标距为零，其横向坐标距是随自变数 w 而变化的动点 P ，亦即点方程式 (1-2) 所表达的是与底线重合的直线。所以，具有如下结构形式的点方程式，均称为水平直线点方程式。即：

$$g_i \cdot u + h_i \cdot v = 0 \quad (b-1)$$

$$g_i \cdot u + c_i \cdot v = 0 \quad (b-2)$$

$$b_i \cdot u + h_i \cdot v = 0 \quad (b-3)$$

4. 当点方程式 (1-2) 中可变系数 f 为常量，而且 g 、 h 两个可变系数之一也为常量；或可变系数 f 与 g 、 h 两个可变系数之一共有同一的函数式时，由于 (1-6)、(1-7)

两式中只存在一个变量，因而可以消去。消去唯一的变量后，所得到的将是直角坐标中的一个直线方程。这个直线方程具有一定的斜率，这时候（1-6）、（1-7）两式所表达的动点P，虽然其横向坐标距和纵向坐标距都将随自变数w而同时变化，但动点P的运动轨迹却始终在用直角坐标所表达的斜直线上。因而具有下列结构形式的点方程式，均称为斜直线点方程式。即：

$$a_i + b_i \cdot u + h_i \cdot v = 0 \quad (c-1)$$

$$a_i + g_i \cdot u + c_i \cdot v = 0 \quad (c-2)$$

$$f_i + f_i \cdot u + h_i \cdot v = 0 \quad (c-3)$$

$$f_i + f_i \cdot u + c_i \cdot v = 0 \quad (c-4)$$

$$f_i + g_i \cdot u + f_i \cdot v = 0 \quad (c-5)$$

$$f_i + b_i \cdot u + f_i \cdot v = 0 \quad (c-6)$$

又上述斜直线点方程式动点P的轨迹线分别为：

$$a_i \cdot x - b_i k \cdot y - a_i k = 0 \quad (c-1')$$

$$a \cdot x + c k \cdot y = 0 \quad (c-2')$$

$$x - k \cdot y - k = 0 \quad (c-3')$$

$$x - k \cdot y - k = 0 \quad (c-4')$$

$$x + k \cdot y = 0 \quad (c-5')$$

$$x + k \cdot y = 0 \quad (c-6')$$

5. 当点方程式（1-2）中可变系数均为变量，或可变系数之一为常量时，动点P的运动轨迹均在一条曲线上。因而具有下列结构形式的点方程式，均称为曲线点方程式。即：

$$f_i + g_i \cdot u + h_i \cdot v = 0 \quad (d-1)$$

$$a_i + g_i \cdot u + h_i \cdot v = 0 \quad (d-2)$$

$$f_i + b_i \cdot u + h_i \cdot v = 0 \quad (d-3)$$

$$f_i + g_i \cdot u + c_i \cdot v = 0 \quad (d-4)$$

6. 最后，证明过点方程式所表达的一点 P，作任意直线截 u、v 两轴于 $[u_1]$ 、 $[v_1]$ 两点时， $[u_1]$ 、 $[v_1]$ 之值为适合于点方程式之一解。

过定点 P 作任意直线截平行坐标轴 u、v 于 $[u_1]$ 、 $[v_1]$ 时，如 $[u_1]$ 、 $[v_1]$ 之值恰为点方程式 (1-2) 的一个解，则有

$$f_i + g_i \cdot u_1 + h_i \cdot v_1 = 0$$

又若以 $u_1 (0, u_1)$ 、 $v_1 (k, v_1)$ 两点表 $[u_1]$ 、 $[v_1]$ 之值在直角坐标中的坐标，则此两点的连线所构成的直线方程为：

$$\frac{u_1 - y}{0 - x} = \frac{u_1 - v_1}{0 - k}$$

即 $(u_1 - v_1)x + ky - ku_1 = 0$

又若点方程式所表达的 P 点也在此直线上，即表达 $u_1 (0, u_1)$ 、 $v_1 (k, v_1)$ 两点的直线方程也过 P 点，则 P 点的坐标亦必适合上式。将 P 点的坐标：

$$\begin{cases} x = \frac{h_i}{g_i + h_i} \cdot k \\ y = \frac{-f_i}{g_i + h_i} \end{cases}$$

代入上式得：

$$(u_1 - v_1) \frac{h_i}{g_i + h_i} \cdot k + k \left(-\frac{f_i}{g_i + h_i} \right) - k u_1 = 0$$

$$f_i + g_i \cdot u_1 + h_i \cdot v_1 = 0$$

上式是 $[u_1]$ 、 $[v_1]$ 之值为满足点方程式 (1-2) 的一个解，故过 P 点的任意直线截 u 轴于 u_1 ，截 v 轴于 v_1 时，亦必适合点方程式 (1-2)。

至此，证明完结。即第二节的对比结论，也是正确的。

四、在平行坐标中，三个点方程式共线的条件

根据上述，任意点方程式 $f_i + g_i u + h_i v = 0$ 均可用平行坐标中的一点 P 表示，而且过 P 点作任意直线截平行坐标轴于 u_1 和 v_1 时， $[u_1]$ 、 $[v_1]$ 之值亦满足所给点方程式 $f_i + g_i u + h_i v = 0$ 。

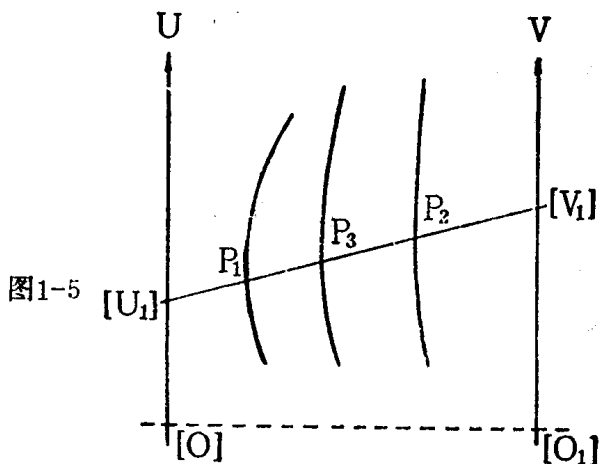


图1-5