

电磁场与波

杨儒贵



西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书是为大学本科通信及电子类专业编写的教材。该书的特点是以亥姆霍兹定理为依据，论述电磁场的特性及其分析方法，有关电磁波的内容尤为丰富。每章之后均附有一定数量的复习题与习题。采用SI单位制。

全书共分十章：矢量分析；静电场；静电场的边值问题；恒定电流场；恒定磁场；电磁感应；时变电磁场；平面电磁波；导行电磁波；电磁辐射等。

本书编者具有丰富的教学经验，该书经过数次易稿和撰写，内容精炼，叙述清晰；论证严谨，文字流畅。拟定的复习题及习题富有启发性和针对性，是一本颇具特色的教材。它也可供其它专业学生及有关科技人员参考。

电 磁 场 与 波

杨 儒 贵

责任编辑 赵丽平

*

西安交通大学出版社出版。

(西安市咸宁路28号)

西北工业大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 18 字数：437.5 千字

1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷

印数：1—2000

ISBN7-5605-0178-8/TN·7 定价：3.60元

序 言

杨儒贵同志编写的“电磁场与波”是作者多年来从事电磁场理论课程教学工作的经验总结。全书内容精炼，取材恰当，条理清晰，叙述透彻。由亥姆霍兹定理出发，由浅入深，循序渐进，独具特色。作者在编写过程中能够针对学生容易混淆的问题详加说明，对理论联系实际也有充分考虑，所附例题富于启发思维，因此本书是一本颇有特色的优秀教材。

电子科技大学教授 谢处方

名 人 名 言

发展独立思考和判断能力，应当始终放在首位，而不应当把获得专业知识放在首位。如果一个人掌握了学科的基础理论，并且学会了独立地思考和工作，他必定会找到自己的道路，而且比那种主要以获得细节知识为其培养内容的人来说，他一定会更好地适应进步和变化。

爱因斯坦

绪 论

国家教委工科电磁场理论课程教学指导小组指出：“电磁场与电磁波”是通信电子类专业的一门技术基础课程，它的任务是介绍宏观电磁现象的基本规律及其理论的实际应用。本课程的内容是合格的工科本科学生必须具备的知识结构的重要组成部分之一。本书就是为通信及电子类专业“电磁场与电磁波”课程编写的教材，主要介绍电磁场与电磁波的基本特性及规律，内容侧重于时变电磁场。

物理学告诉我们，静止电荷周围存在一种效应，它表现为对于带电体有力的作用，这种效应是由于电荷周围存在一种称为电场的物质产生的。在运动电荷或电流周围除电场之外，还存在另一种不同的场，它表现为对于磁铁和载流导体有力的作用，这种场称为磁场。由此可见，电场和磁场都是以力的现象表现的。力是一个矢量，因此，电场和磁场都是矢量场。当电荷的电量及其位置均不随时间变化时，它产生的电场也不随时间变化，这种电场称为静电场。当运动电荷的电量及速度保持恒定时，它形成的电流也是恒定的，这种恒定电流产生的磁场也不随时间变化，这种磁场称为恒定磁场。如果电荷及电流随时改变，它们产生的电场及磁场也是时变的，而且人们发现时变的电场与时变的磁场能够相互转化、两者不可分割，它们构成统一的时变电磁场。时变电场与时变磁场之间的相互转化作用，在空间形成了电磁波，时变电磁场的能量就是以这种电磁波形式进行传播的。静电场与恒定磁场相互无关、彼此独立，可以分别进行研究。因此，本书先讨论静电场和恒定磁场，然后再介绍时变电磁场。

电磁场与电磁波虽然不能用肉眼观察到，但是客观存在的一种物质，它具有物质的两种重要属性——能量和质量。已经证实，光是一种电磁波，太阳光的巨大能量和辐射压力充分说明了电磁场与电磁波是具有能量及质量的。但是，电磁场与电磁波的质量极其微小，因此，通常仅研究电磁场与电磁波的能量特性。

电磁场与电磁波既然是一种物质，它的存在和传播无需依赖于任何媒质。在没有物质存在的真空环境中，电磁场与电磁波的存在和传播会感到更加“自由”一些。因此对于电磁场与电磁波来说，真空环境通常被称为“自由空间”。当空间存在媒质时，在电磁场的作用下媒质中会发生极化与磁化现象，结果在媒质中又产生二次电场及磁场，从而改变了原先的场分布，这就是场与媒质的相互作用现象。为了研究方便起见，我们先介绍真空中的电磁场，再讨论媒质中的电磁场。

已知电荷产生电场，电流除产生电场外，还产生磁场，可见，电荷及电流是产生电磁场的源。应该指出，电荷及电流也是产生电磁场的唯一的源。截止目前，人们尚未发现自然界中磁荷及磁流存在，然而，有时引入磁荷及磁流的概念是有益的，不过，它们仅是假想的概念。研究场与源的关系也是电磁理论的基本问题之一。我们将要介绍一系列数学方程描述场与源，以及场与媒质特性之间的关系。

现在，对于电磁现象的基本规律已经有了充分的认识，但是，人们认识这些规律经过了漫长的岁月和艰苦的历程。早在公元前 600 年希腊人就发现了摩擦后的琥珀能够吸引微小物体；公元前 300 年我国发现了磁石吸铁的现象；公元初我国制成了世界上第一个指南针。后

来人们发现了地球磁场的存在。1785年法国科学家库仑(1736—1806)通过实验提出了库仑定律,该定律描述了两个微小带电体之间的作用力与其电量及间距的关系。1820年丹麦人奥斯特(1777—1851)发现了电流的磁场。同年法国科学家安培(1775—1836)计算了两个电流之间的作用力。1831年英国科学家法拉第(1791—1867)发现了电磁感应现象,提出了电磁感应定律,说明时变磁场可以产生时变电场。1873年英国物理学家麦克斯韦(1831—1879)提出了位移电流的假设,认为时变电场可以产生时变磁场,并以严格的数学方程描述了电磁场应遵循的统一规律,这就是著名的麦克斯韦方程。麦克斯韦预言了电磁波的存在,后来在1887年被德国物理学家赫兹(1857—1894)的实验所证实。在这个基础上,俄国的波波夫及意大利的马可尼于上世纪末先后发明了用电磁波作为媒介传输信息的技术,这就逐步实现了今日的无线电通信、广播、雷达、遥控遥测,以及近代的宇宙通讯、光纤通讯等电子技术。这些新技术的广泛应用又促进电磁场与电磁波理论的发展。随着大容量的高速度计算机出现,不但解决了很多电磁理论的计算问题,同时也产生了一些计算电磁场的新方法。

已知电磁场是矢量场。为了研究电磁场特性,经常应用的基本数学工具是矢量运算及分析。因此,本书第一章综述了矢量分析的主要概念、定理、公式及其应用。在第一章中突出地介绍了亥姆霍兹定理。该定理表明:无界空间中任一矢量场被其散度及旋度唯一地确定。因此,在讨论各种电磁场时,首先需要研究的是其散度及旋度特性,这种分析方法是本书的特点之一。第二章介绍静电场;第三章介绍静电场的边值问题;第四章介绍恒定电流场;第五章介绍恒定磁场;第六章介绍电磁感应;第七章介绍时变电磁场的基本特性;第八章介绍平面电磁波;第九章介绍导行电磁波;第十章介绍电磁辐射的基本理论。最后在附录中给出了符号、单位与量纲;SI制的倍数单位;矢量恒等式;正交曲面坐标系; δ 函数;贝塞尔函数及勒让德函数等。由上可知,本书介绍的时变电磁场内容极为丰富。实际使用时,可以针对各类专业的特点及教学时数进行适当的取舍。此外,在阐明基本理论的同时,尽量举出应用实例。为了培养解决与分析问题的能力以及进一步理解所述的基本理论,书中列举了很多例题,并在每章之后附有一定数量的复习题和习题。

本书采用SI单位制,即国际单位制。在电磁学中,这种单位制的四个基本单位是长度、质量、时间和电流强度。长度单位为m(米),质量单位为kg(千克),时间单位为s(秒),电流单位为A(安培)。各单位符号及中文名见附录一。

本书是在多次教学实践的基础上,经过数次易稿及撰写完成的。实际使用情况表明,所述内容可以满足通信及电子类各种专业的教学要求。参加本书初稿编写工作的,还有汪文秉教授及章锡元副教授。此外,在编写过程中得到教研室有关教师的热情支持与帮助,尤其是冯恩信、蒋延生、梁凡及数名研究生协助拟定和演算了书中习题,在此表示衷心的感谢。还应感谢在教学过程中,对于本书提出很多良好建议的学生。特别应该提出的是,本书的体系及结构是在已故的黄席椿教授亲切指导下形成的,谨以此书纪念尊敬的老师——黄席椿教授。

现稿完成后,承蒙国家教委工科电磁理论课程教学指导小组组长,谢处方教授进行了仔细审阅,提出了很多宝贵意见,使得本书的质量进一步提高,作者对此表示敬意。在出版过程中,西安交通大学出版社副总编吴寿镛、责任编辑赵丽平也对本书提出了很多中肯的建议,在此作者表示深切的感谢。

由于作者水平有限,本稿中一定存在不妥之处,渴望广大读者提出宝贵意见。

作者于西安交通大学 1988.4.9.

目 录

绪 论	1
第一章 矢量分析	1
§ 1-1 标量与矢量	1
§ 1-2 矢量的代数运算	1
§ 1-3 矢量的标积	2
§ 1-4 矢量的矢积	4
§ 1-5 标量场的方向导数与梯度	4
§ 1-6 矢量场的通量、散度与高斯定理	7
§ 1-7 矢量场的环量、旋度与斯托克斯定理	11
§ 1-8 无散场与无旋场	14
§ 1-9 格林定理	15
§ 1-10 矢量场的唯一性定理	16
§ 1-11 亥姆霍兹定理	17
§ 1-12 正交曲面坐标系	20
复习题	25
习 题	25
第二章 静电场	28
§ 2-1 电场强度、电通及电力线	28
§ 2-2 真空中的静电场方程	29
§ 2-3 电位与等位面	35
§ 2-4 介质极化	37
§ 2-5 介质中的静电场方程	40
§ 2-6 两种介质的边界条件	42
§ 2-7 介质与导体的边界条件	44
§ 2-8 电容与部分电容	46
§ 2-9 电场能量	48
§ 2-10 电场力	51
复习题	54
习 题	55
第三章 静电场的边值问题	58
§ 3-1 电位微分方程	58
§ 3-2 电位微分方程解的唯一性	60
§ 3-3 镜像法	62
§ 3-4 直角坐标中的分离变量法	67

§ 3-5	圆柱坐标中的分离变量法	70
§ 3-6	圆球坐标中的分离变量法	72
	复习题	76
	习 题	76
第四章	恒定电流场	80
§ 4-1	电流及电流密度	80
§ 4-2	电动势	82
§ 4-3	电流连续性原理	84
§ 4-4	恒定电流场的边界条件	85
§ 4-5	恒定电流场的能量损耗	86
§ 4-6	恒定电流场与静电场的比拟	88
	复习题	90
	习 题	91
第五章	恒定磁场	93
§ 5-1	磁感应强度、磁通及磁力线	93
§ 5-2	真空中的恒定磁场方程式	95
§ 5-3	矢量磁位与标量磁位	99
§ 5-4	媒质磁化	100
§ 5-5	媒质中的恒定磁场方程式	103
§ 5-6	恒定磁场的边界条件	105
	复习题	108
	习 题	109
第六章	电磁感应	112
§ 6-1	电磁感应定律	112
§ 6-2	自感与互感	114
§ 6-3	磁场的能量	117
§ 6-4	磁场力	121
	复习题	124
	习 题	124
第七章	时变电磁场	127
§ 7-1	位移电流	127
§ 7-2	麦克斯韦方程	128
§ 7-3	时变电磁场的边界条件	130
§ 7-4	标量位与矢量位	133
§ 7-5	位函数方程的求解	135
§ 7-6	能量密度与能流密度矢量	137
§ 7-7	唯一性定理	139
§ 7-8	正弦电磁场的表示	140
§ 7-9	麦克斯韦方程的复数形式	141

§ 7-10	位函数的复数形式	142
§ 7-11	能量密度与能流密度矢量的复数形式	142
	复习题	146
	习 题	146
第八章	平面电磁波	149
§ 8-1	波动方程	149
§ 8-2	理想介质中的平面波	150
§ 8-3	导电媒质中的平面波	154
§ 8-4	平面波的极化特性	159
§ 8-5	平面边界上平面波的正投射	162
§ 8-6	多层边界上平面波的正投射	166
§ 8-7	任意方向传播的平面波表示	169
§ 8-8	理想介质边界上平面波的斜投射	171
§ 8-9	无反射与全反射	174
§ 8-10	导电媒质表面上平面波的斜投射	177
§ 8-11	理想导体表面上平面波的斜投射	179
§ 8-12	等离子体中的平面波	181
§ 8-13	铁氧体中的平面波	183
	复习题	185
	习 题	186
第九章	导行电磁波	189
§ 9-1	TEM波、TE波及TM波	190
§ 9-2	矩形波导中的电磁波方程式	192
§ 9-3	矩形波导中电磁波的传播特性	195
§ 9-4	矩形波导中的 TE_{10} 波	197
§ 9-5	电磁波的群速	202
§ 9-6	圆形波导	204
§ 9-7	波导中的传输功率与传输损耗	209
§ 9-8	谐振腔	212
§ 9-9	传输线方程	216
§ 9-10	传输线参数	221
§ 9-11	传输线的阻抗变换作用	222
	复习题	227
	习 题	227
第十章	电磁辐射	230
§ 10-1	电流元辐射	230
§ 10-2	天线的方向性	234
§ 10-3	对称天线辐射	236
§ 10-4	天线阵辐射	238

§ 10-5 电流环辐射	241
§ 10-6 对偶原理	244
§ 10-7 镜像原理	247
§ 10-8 互易原理	250
§ 10-9 等效源原理	252
§ 10-10 几何光学原理	254
§ 10-11 惠更斯原理	258
§ 10-12 面天线辐射	259
复习题	264
习 题	264
附 录	267
1. 符号、单位及量纲	267
2. SI 制的倍数单位	269
3. 矢量恒等式	269
4. 正交曲面坐标系	270
5. δ 函数	272
6. 贝塞尔函数	273
7. 勒让德函数	276
参考书目	277

第一章 矢量分析

在绪论中已经指出，电磁场是一种矢量场，因此，矢量分析是研究电磁场特性的基本数学工具之一。本章将系统地叙述有关矢量分析的主要内容。我们先在直角坐标系中讨论矢量的定义，矢量的代数运算以及矢量的微分与积分运算，然后根据圆柱坐标系及圆球坐标系与直角坐标系的变量之间的关系，推出圆柱坐标系及圆球坐标系中的矢量表示及其运算规则。在这一章中，还要介绍描述矢量场特性的几个重要定理，即高斯定理、斯托克斯定理、格林定理、唯一性定理及亥姆霍兹定理。

§ 1-1 标量与矢量

仅具有大小特征的量为标量。例如长度、面积、体积、温度、气压、密度、能量及电位等物理量都是标量。不仅具有大小而且具有方向特征的量为矢量。例如：力、位移、速度、加速度、电场强度及磁场强度等物理量都是矢量。标量的空间分布构成标量场，矢量的空间分布构成矢量场。

矢量 \mathbf{A} 的几何表示是用一条有向线段，如图 1-1-1(a) 所示，线段的长度表示矢量 \mathbf{A} 的大小，其指向表示矢量 \mathbf{A} 的方向。在直角坐标中，若把代表矢量 \mathbf{A} 及 \mathbf{B} 的有向线段的始端放在坐标系的原点，如图 1-1-1(b) 所示，不同的矢量，其终端坐标不同。矢量 \mathbf{A} 的终端坐标为 (A_x, A_y, A_z) ；矢量 \mathbf{B} 的终端坐标为 (B_x, B_y, B_z) ；通常， A_x, A_y, A_z 称为矢量 \mathbf{A} 的三个相应的坐标分量； B_x, B_y, B_z 称为矢量 \mathbf{B} 的三个相应坐标分量，由此可见，在三维空间中，一个矢量可用其三个坐标分量来表示。反之，三个标量可用一个矢量来代替，这正是矢量运算比标量运算简洁的原因，当然，表示一个矢量的三个标量并不是任意的，它们必须是三个坐标分量。用三个坐标分量表示一个矢量称为三维空间矢量的代数表示。可以推知，在二维空间中，一个矢量仅需要两个坐标分量来表示，而在一维空间中，一个矢量仅需要一个坐标分量来表示。

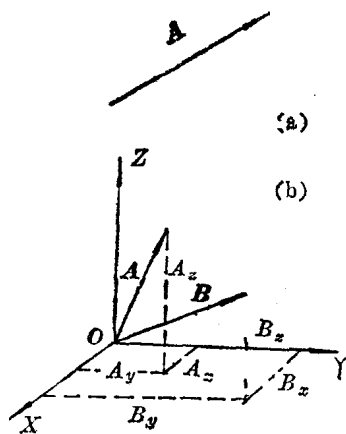


图 1-1-1 矢量的表示

通常，矢量的大小及方向均随空间坐标而变化，若矢量的大小及方向均与空间坐标无关，这种矢量称为常矢量或简称为常矢。

§ 1-2 矢量的代数运算

当矢量 \mathbf{A} 与矢量 \mathbf{B} 的大小及方向均相同时，则认为 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。因此在同一坐标系中，只有

当两个矢量的各个相应坐标分量均相同时，才可认为两个矢量相等。

矢量可以进行加法运算，且加法运算符合结合律和交换律，即

结合律 $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ (1-2-1)

交换律 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (1-2-2)

两个矢量相减可以归结为相加运算，例如

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (1-2-3)$$

式中 $(-\mathbf{B})$ 表示方向与矢量 \mathbf{B} 相反的矢量。矢量运算的几何表示如图1-2-1所示。在同一个坐标系中，两个矢量的加减运算就是对应坐标分量的相加和相减。例如在直角坐标系中，若矢量 \mathbf{A} 的坐标分量为 (A_x, A_y, A_z) ，矢量 \mathbf{B} 的坐标分量为 (B_x, B_y, B_z) ，则 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ 的合成矢量的坐标分量为 $(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$ 。

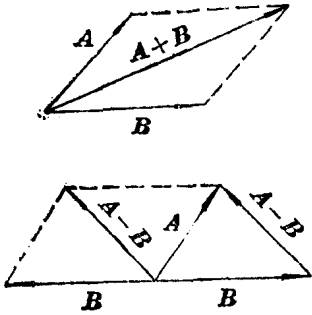


图 1-2-1 矢量加减

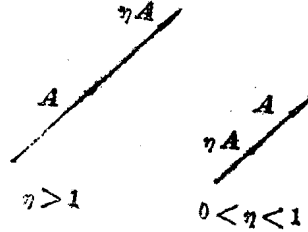


图 1-2-2 矢量与标量相乘

矢量与标量之间可以进行乘法运算，当矢量 \mathbf{A} 与正标量 η 相乘时，其乘积仍然是一个矢量，但各个坐标分量乘以 η 倍，即乘积 $(\eta\mathbf{A})$ 的坐标分量为 $(\eta A_x, \eta A_y, \eta A_z)$ 。可见，若 $\eta > 1$ ，则乘积矢量伸长；若 $0 < \eta < 1$ ，则乘积矢量缩短，如图1-2-2所示，可见矢量与正标量相乘时，仅矢量的大小发生改变，其方向仍然保持不变。显然，矢量与负标量相乘时，不仅大小发生改变，其方向也恰好反转。

矢量之间的乘法运算与标量之间，以及标量与矢量之间的乘法运算规则截然不同，矢量之间的乘法运算有两种形式：标积与矢积。

§ 1-3 矢量的标积

两个矢量的标积又称为点积或内积，以点号“ \cdot ”表示。在直角坐标系中，若矢量 \mathbf{A} 的坐标分量为 (A_x, A_y, A_z) ，矢量 \mathbf{B} 的坐标分量为 (B_x, B_y, B_z) ，则矢量 \mathbf{A} 与矢量 \mathbf{B} 标积的代数定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-3-1)$$

由此可见，两个矢量的标积是一个标量，显然，矢量标积的运算符合交换律，即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-3-2)$$

根据矢量标积的定义得知，矢量 \mathbf{A} 与其本身的标积为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1-3-3)$$

通常把 $\sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ 称为矢量 \mathbf{A} 的模,以符号 $|\mathbf{A}|$ 或 A 表示,即

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-3-4)$$

可见,在三维空间中,矢量模的几何意义就是有向线段的长度,也就是矢量的大小。

矢量模为1的矢量称为单位矢量。任一矢量 \mathbf{A} 均可写成

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

根据矢量与标量的乘法规则,得知上式中矢量 $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ 的直角坐标分量为

$$\left(\frac{A_x}{|\mathbf{A}|}, \frac{A_y}{|\mathbf{A}|}, \frac{A_z}{|\mathbf{A}|} \right), \text{ 由于 } \sqrt{\left(\frac{A_x}{|\mathbf{A}|} \right)^2 + \left(\frac{A_y}{|\mathbf{A}|} \right)^2 + \left(\frac{A_z}{|\mathbf{A}|} \right)^2} = 1,$$

可见矢量 $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ 的模为1,所以矢量 $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ 称为矢量 \mathbf{A} 的单位矢,以 \hat{a} 表示,即

$$\hat{a} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad (1-3-5)$$

由此得

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \hat{a} \quad (1-3-6)$$

式中 \hat{a} 是矢量 \mathbf{A} 的单位矢,其模为1,方向与 \mathbf{A} 相同。式(1-3-6)表明,任一矢量等于该矢量的模与其单位矢量的乘积。

若 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 分别表示 X 轴、 Y 轴、 Z 轴方向上的单位矢量,则矢量 \mathbf{A} 在三个坐标轴上的投影分别为 $A_x \hat{x}, A_y \hat{y}, A_z \hat{z}$,那么矢量 \mathbf{A} 为三个坐标轴上投影的合成矢量,即

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (1-3-7)$$

而矢量 \mathbf{A} 的单位矢量 \hat{a} 可表示为

$$\hat{a} = \frac{A_x}{|\mathbf{A}|} \hat{x} + \frac{A_y}{|\mathbf{A}|} \hat{y} + \frac{A_z}{|\mathbf{A}|} \hat{z} \quad (1-3-8)$$

或者写为

$$\hat{a} = \hat{x} \cos \alpha + \hat{y} \cos \beta + \hat{z} \cos \gamma \quad (1-3-9)$$

式中角度 α, β, γ 分别为矢量 \mathbf{A} 与坐标轴 X, Y, Z 的夹角, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为矢量 \mathbf{A} 的方向余弦。

矢量标积的几何意义如图1-3-1所示,设 $\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \hat{x}$, $\mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$,若矢量 \mathbf{B} 与 X 轴的夹角为 θ ,则

$$B_x = |\mathbf{B}| \cos \theta$$

$$B_y = |\mathbf{B}| \sin \theta$$

那么由式(1-3-1)得

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (1-3-10)$$

式中 $|\mathbf{B}| \cos \theta$ 是矢量 \mathbf{B} 在矢量 \mathbf{A} 方向上的投影大小, $|\mathbf{A}| \cos \theta$ 是矢量 \mathbf{A} 在矢量 \mathbf{B} 方向上的投影大小,所以,式(1-3-10)表明,标积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 等于矢量 \mathbf{A} 的模与矢量 \mathbf{B} 在矢量 \mathbf{A} 的方

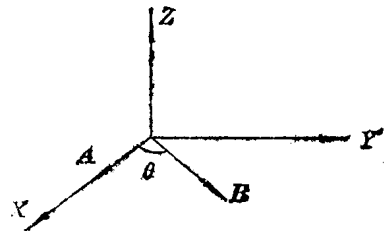


图 1-3-1 矢量的标积

向上的投影大小的乘积，或者说等于 B 的模与矢量 A 在矢量 B 的方向上的投影大小的乘积。显然

$$A \cdot B = \begin{cases} 0 & A \perp B \\ |A| \cdot |B| & A \parallel B \end{cases}$$

§ 1-4 矢量的矢积

矢量的矢积又称为叉积或外积，以叉号“ \times ”表示。在直角坐标系中，若矢量 A 和矢量 B 分别为：

$$\begin{cases} A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \\ B = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \end{cases}$$

则矢量 A 与矢量 B 矢积的代数定义可用行列式表示为

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-4-1)$$

由此可见，两个矢量的矢积仍然是一个矢量。矢量之间的矢积运算不符合交换律。读者根据定义可以证明：

$$B \times A = -(A \times B) \quad (1-4-2)$$

矢量矢积的几何意义如图 1-4-1 所示。设矢量 $A = |A| \hat{x}$ ，矢量 $B = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$ ，若矢量 A 与矢量 B 之间的夹角为 θ ，则由式 (1-4-1) 得

$$A \times B = z |A| |B| \sin \theta \quad (1-4-3)$$

可见，矢量 $(A \times B)$ 的方向与矢量 A 及矢量 B 垂直，且由矢量 A 旋转到矢量 B 并与矢量 $(A \times B)$ 构成右旋关系，矢量 $(A \times B)$ 的大小为 $|A| |B| \sin \theta$ 。显然

$$|A \times B| = \begin{cases} 0 & A \parallel B \\ |A| |B| & A \perp B \end{cases} \quad (1-4-4)$$

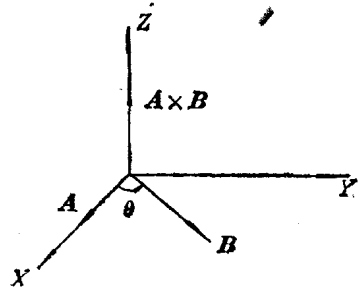


图 1-4-1 矢量的矢积

§ 1-5 标量场的方向导数与梯度

标量场中各点标量的大小可能不变，因此某点标量沿着各个方向的变化率可能不同。为了描述标量场的这种变化特性，通常引入方向导数的概念。

标量场在某点的方向导数表示标量场自该点沿某一方向上的变化率。如图 1-5-1 所示，标量场 Φ 在 P 点沿 l 方向上的方向导数 $\frac{\partial \Phi}{\partial l} \Big|_P$ 定义为

$\frac{\partial \Phi}{\partial l} \Big|_P$ 定义为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} \Big|_P = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Phi(P') - \Phi(P)}{\Delta l} \quad (1-5-1)$$

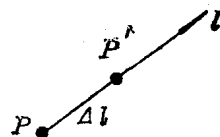


图 1-5-1 方向导数

式中 Δl 为 P 点与 P' 点之间的距离

在直角坐标系中, 方向导数 $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ 可写为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l}$$

若矢量 l 的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, 则上式变为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-5-2)$$

若令 $(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z})$ 为矢量 G 的三个坐标分量, 即

$$G = \hat{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1-5-3)$$

而矢量 l 的单位矢 l 为

$$l = \hat{x} \cos \alpha + \hat{y} \cos \beta + \hat{z} \cos \gamma$$

因此, 标量场 Φ 沿矢量 l 方向上的方向导数 $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ 可以写为

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial l} = G \cdot l} \quad (1-5-4)$$

矢量 G 称为标量场 Φ 的梯度, 以 $\text{grad} \Phi$ 表示, 即

$$\boxed{\text{grad} \Phi = \hat{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z}} \quad (1-5-5)$$

由此可见, 标量场 Φ 的梯度是一个矢量场。由式 (1-5-4) 可见, 当 l 的方向与梯度方向一致时, 方向导数 $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ 取得最大值。因此, 标量场在某点梯度的大小等于该点的最大方向导数,

梯度的方向为该点具有最大方向导数的方向。

哈密顿引入劈形算子 ∇ (读作 Del) 表示下面矢量

$$\boxed{\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}} \quad (1-5-6)$$

那么, 根据式 (1-5-5), 标量场 Φ 的梯度 $\text{grad} \Phi$ 可以表示为算子 ∇ 与标量 Φ 的乘积, 即

$$\boxed{\text{grad} \Phi = \nabla \Phi} \quad (1-5-7)$$

标量 $\Phi(x, y, z) = \text{常数}$ 的空间曲面称为标量场的等值面, 所以, 某点梯度的三个坐标分量是标量场等值面通过该点法线的三个方向数, 这就意味着梯度的方向为等值面的法线方向。因此, 梯度的方向与等值面垂直, 且指向标量场数值增大的方向。

读者可以证明, 梯度的运算符合下列规则

$$\nabla C = 0 \quad (C \text{ 为常数}) \quad (1-5-8)$$

$$\nabla (C\Phi) = C \nabla \Phi \quad (C \text{ 为常数}) \quad (1-5-9)$$

$$\nabla (\Phi + \Psi) = \nabla \Phi + \nabla \Psi \quad (1-5-10)$$

$$\nabla (\Phi\Psi) = \Phi \nabla \Psi + \Psi \nabla \Phi \quad (1-5-11)$$

$$\nabla(\Phi/\Psi) = (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) / \Psi^2 \quad (1-5-12)$$

$$\nabla F(\Phi) = F'(\Phi) \nabla \Phi \quad (1-5-13)$$

例一 已知标量场 $\Phi(x, y, z) = x^2y + y^2z + 1$, 求 $(2, 1, 3)$ 处方向导数的最大值和最小值。

解 根据梯度的定义式 (1-5-5), 求得该标量场 Φ 的梯度 $\nabla \Phi$ 为

$$\nabla \Phi = 2xy\hat{x} + (x^2 + 2yz)\hat{y} + y^2\hat{z}$$

那么在 $(2, 1, 3)$ 处的梯度为 $\nabla \Phi = 4\hat{x} + 10\hat{y} + 2\hat{z}$, 其模为 $|\nabla \Phi| = \sqrt{117}$, 因此, 在 $(2, 1, 3)$ 处方向导数的最大值为 $\sqrt{117}$, 而最小值为 $-\sqrt{117}$ 。

例二 计算 $\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$ 及 $\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$ 。这里 R 为空间 P 点与 P' 点之间的距离, $R \neq 0$, 如图

(1-5-2) 所示。 P 点的坐标为 (x, y, z) , P' 点的坐标为 (x', y', z') , ∇ 表示对 x, y, z 运算, ∇' 表示对 x', y', z' 运算。

解 令 P 点的位置矢量为 \mathbf{r} , P' 点的位置矢量为 \mathbf{r}' , 则

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\mathbf{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$$

再令 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

则 $\mathbf{R} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

根据题意, 算子 ∇ 及 ∇' 分别为

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla' = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z'}$$

因此 $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R}\right) + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R}\right) + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R}\right)$

$$= -\frac{1}{R^3} [(x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}]$$

即

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (1-5-14)$$

同理可得

$$\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (1-5-15)$$

由此可见

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) \quad (1-5-16)$$

上述运算过程及其结果在电磁场计算中经常遇到, 通常以 (x', y', z') 表示源点坐标, 以 (x, y, z) 表示场点坐标, 这样, 图 1-5-2 中, P' 表示源点, P 表示场点。当计算某一分布源在空间某点产生的场强时, P' 为动点, P 为定点; 当计算空间场量的分布特性时或者空间某点各种场量之间的关系时, P' 为定点, P 为动点。

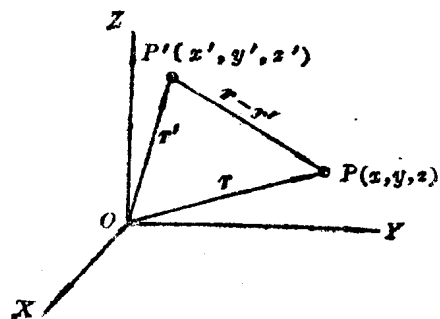


图 1-5-2 源点与场点

§ 1-6 矢量场的通量、散度与高斯定理

矢量 A 沿某一有向曲面 S 的面积分称为矢量 A 通过该有向曲面 S 的通量, 以 Φ 表示, 即

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-6-1)$$

由此式可见, 若在有向曲面 S 上, 有向面元 $d\mathbf{S}$ 处处与矢量 A 的方向保持垂直, 则矢量 A 通过该有向曲面 S 的通量 Φ 为零。若有向面元 $d\mathbf{S}$ 处处与矢量 A 的方向保持相同或相反, 则通量 $\Phi > 0$ 或 $\Phi < 0$, 因此, 矢量通过某一有向曲面的通量既与矢量的大小有关, 又与矢量的方向有关。

若有向曲面 S 是闭合的, 根据矢量通过该闭合有向曲面的通量可以判断该矢量是进入还是穿出这个闭合面。当矢量穿出这个闭合面时, 认为闭合面中存在源; 当矢量进入这个闭合面时, 认为闭合面中存在洞 (或汇)。闭合的有向曲面的方向通常规定为闭合面的外法线方向。因此, 当闭合面中有源时, 矢量通过该闭合面的通量一定为正; 反之, 当闭合面中有洞时, 矢量通过该闭合面的通量一定为负。所以, 前述的源称为正源, 而前述的洞称为负源。由物理得知, 真空中的电场强度 E 通过任一闭合曲面的通量等于该闭合面包围的自由电荷量 q 与真空介电常数 ϵ_0 之比, 即 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0$, 可见, 当闭合面中存在正电荷时, 通量为正。当闭合面中存在负电荷时, 通量为负。这一电学实例充分地显示出闭合面中正源与负源的通量特性。

由上讨论得知, 根据矢量通过某一闭合面的通量性质可以判断闭合面中源的正负性质。但是, 通量仅能表示闭合面中源的总量, 它没有显示源的分布特性。如果使包围某点的闭合面向该点无限收缩时, 即可表示该点附近的源的分布特性。因此, 我们定义当闭合面 S 向某点无限收缩时, 矢量 A 通过该闭合面 S 的通量与该闭合面包围的体积之比的极限称为矢量场 A 在该点的散度, 以 $\text{div} A$ 表示, 即

$$\text{div} A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (1-6-2)$$

式中 ΔV 为闭合面 S 包围的体积。上式表明, 散度是一个标量, 它可理解为通过包围单位体积闭合面的通量。既然散度代表源的强度, 因此在源不存在的无源区中, 各点的散度等于零。

对于任一闭合面 S 包围的空间总可以分成两个区域, 其表面分别为闭合面 S_1 及 S_2 , 如图 1-6-1 所示。

由于闭合面 S_1 和 S_2 的相邻部分表面的外法线方向恰好相反, 因此, 通过 S 的通量等于通过 S_1 及 S_2 的通量之和, 由此可以推知, 由于 S 包围的体积 V 可以认为是由很多体积元 dV 组成的, 因此通过 S 的通量等于包围各个 dV 的闭合面通量之和。已知散度代表通过包围单位体积的闭合面的通量, 因此得

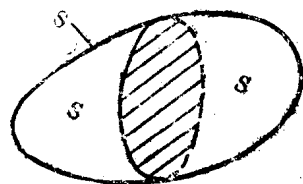


图 1-6-1 高斯定理

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}} \quad (1-6-3)$$

式中 S 为包围体积 V 的表面。上式称为高斯定理，从数学上来看，利用高斯定理可以将矢量函数的面积分转化为标量函数的体积分，或反之。从场的观点来看，高斯定理建立了某一区域中的场与包围该区域边界上的场之间的关系。因此，高斯定理是矢量分析中的重要定理之一。

为了导出矢量场的散度在直角坐标中的表达式，在矢量场中取出一个长方六面体，令其六个表面与坐标面平行，如图 1-6-2 所示。设六面体的中心点 M 的坐标为 (x, y, z) ， M 点的矢量 \mathbf{A} 如图示。六面体的左端面为 S_1 ，右端面为 S_2 ，

则 S_1 的外法线方向为 $-\hat{x}$ ， S_2 的外法线方向为 \hat{x} ，那么矢量场 \mathbf{A} 通过左端面 S_1 的通量为

$$\int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot (-\hat{x}) dS_1 = - \int_{S_1} A_x dS_1$$

若六面体很小， S_1 上各点的 A_x 可以认为是相等的，因此，

$$\int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_1 = -A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \Delta z \quad (1-6-4)$$

同理可得，矢量场 \mathbf{A} 通过右端面 S_2 的通量为

$$\int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_2 = A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \Delta z \quad (1-6-5)$$

将 $A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right)$ 及 $A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right)$ 在 M 点分别按泰勒级数展开，且略去高次项，得

$$A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) = A_x(x, y, z) - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_M$$

$$A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) = A_x(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_M$$

将此结果分别代入式 (1-6-4) 及式 (1-6-5) 中，求得矢量场 \mathbf{A} 通过左右端面的通量和为

$$\int_{S_1+S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_M \Delta x \Delta y \Delta z$$

同理可得矢量场 \mathbf{A} 通过上下端面及前后端面的通量和分别为

$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right)_M \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_M \Delta x \Delta y \Delta z$$

那么，由此求得矢量场 \mathbf{A} 通过包围 M 点的六面体表面的总通量为

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_M \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1-6-6)$$

式中 $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ 为六面体的体积，将上式代入式 (1-6-2) 中，得矢量场 \mathbf{A} 在 M 点的散度为

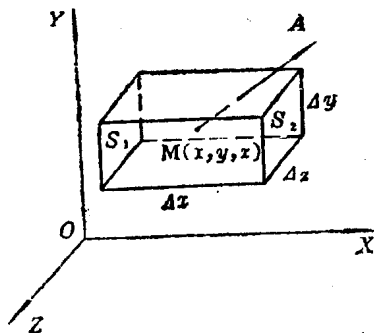


图 1-6-2 矢量场的散度