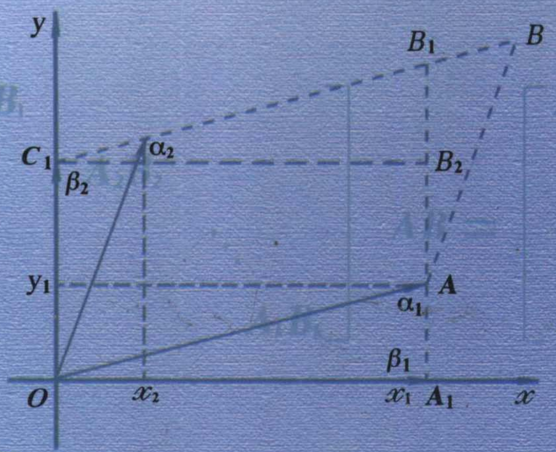
线性代数

符名培 主编



华中科技大学出版社
E-mail: hustpp@wuhan.cngb.com

线性代数

符名培　主编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/符名培 主编
武汉:华中科技大学出版社, 2002 年 7 月
ISBN 7-5609-2708-4

Ⅰ.线…
Ⅱ.符…
Ⅲ.线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.O151

线性代数 符名培 主编

责任编辑:谢燕群 封面设计:刘 卉
责任校对:张兴田 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:华中科技大学出版社照排室
印 刷:湖北省通山县印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:12.75 字数:304 000
版次:2002 年 7 月第 1 版 印次:2002 年 7 月第 1 次印刷 印数:1—6 000
ISBN 7-5609-2708-4/O·258 定价:17.50 元

前　　言

随着科学技术的发展和计算机应用的迅速普及，数学与各门学科及实践活动的关系越来越密切．线性代数是非数学专业的数学基础课，各个工科专业都开设线性代数课程，文科也有不少专业开设线性代数课程，它的方法与内容对提高大学生的科技素质及分析问题的能力、启发新意识都是比较重要的．

考虑到非数学专业对数学的要求及一年级新生的实际，本书以初等变换为主线，在不影响教材的科学性的前提下，适度降低了课程基础理论的难度，偏重于计算过程的演练，以使学生容易接受并达到较高的目标．

在编写本书时注意精选课程内容，较合理地安排内容的次序，分散难点，对一些定理的证明力争既不缺乏严密性、又能简洁明了．首先从消元法人手，利用等量公理较详尽地介绍了初等行变换．为了避免在进行初等变换运算时可能出现的分数运算，减少繁琐的计算过程，我们介绍了四元变换法，并附有用计算机演示的例子．本书采用与初等变换相关的 n 阶行列式的定义，给出二阶与三阶情况下的几何背景，并附有用计算机进行变换的过程，直观形象，部分例题还在附录中用软件完成变换过程，读者必能在其中寻到学习线性代数的兴趣．

书中安排了较多的例题，深入浅出，以期读者能正确又清晰地理解并掌握必要而行之有效的运算技巧和思维方法，养成严谨思维的习惯．

考虑到读者需要一些补充的内容，了解较深层的推导，编者也有意增加了一些教学经验、心得．在教学过程中，可以省去这些内容，而仅供学生阅读参考．

不同的专业对线性代数内容的要求可能不同，但作为数学素

质培养的要求是一致的.线性代数已是非数学专业工科学生的必修基础课,又是离散数学的一个组成部分,它起着双重作用.本书尝试着介绍了一些线性代数在大学其他课程中应用的例子.

本书由集体讨论编写而成,编者长期从事线性代数的教学工作,并广泛吸取了近年来这方面的教学专家的意见和建议.前六章由符名培编写,后两章由段复建编写,涉及计算机软件的有关内容由朱宁编写.陈家国、张卫东完成个别章节的誊写工作,李小明完成部分计算编程工作,全书由符名培统稿.

限于编者的水平,书中错误、疏漏与欠妥之处在所难免,热忱希望专家、读者提出宝贵意见,以便改正与完善.

编者

2002年3月于桂林

目 录

第1章　消元法与初等变换

在线性代数中，初等变换是一种基本的运算手段，它可以用来解决诸如矩阵的秩、线性方程组的求解、行列式的计算等各类计算问题，可以大大地简化计算过程，减少计算量．在解决某些重要问题，如线性相关、矩阵的逆阵时，它也是一种重要的手段．

1.1　消元法与等量公理

包含 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 m 个方程的线性方程组可以写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1-1}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为方程组的**系数**，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 称为**常数项**．系数 a_{ij} 的第一个下标 i 表示它在第 i 个方程，第二个下标 j 表示它是第 j 个未知量 x_j 的系数，b_i 的下标 i 表示它是第 i 个方程的常数项．一般情况下，未知量的个数与方程的个数不一定相等，因为方程组(1-1)包括 n 个未知量，每一个未知量的幂都是一次的，所以称为 n 元线性方程组．

方程是含有未知量的等式，式(1-1)含有 m 个方程．各个方程是根据自然科学、工程技术等的一些规律、定理建立起来的．如一个大坝，由于坝址的地质条件、水文情况、气候原因、所用材质等不同，因此要达到大坝设计的要求，就要建立许多方程．要建立多少个方程，事先是不可能完全确定的，必须通过数学演算，即解方程组，才能知道所建立的方程是否有矛盾方程（即方程是否符合实

际），是否有多余的方程或者方程的个数是否不足（否则难以确定方程组的解），所设的未知量是否都是"独立"的或者某些未知量是否受到另一些未知量的"约束"（即未知量是否"自由"），等等.

所谓解方程组，就是用有序的数组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$代替未知量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，判断方程组的所有方程是否都为恒等式. 如果是，那么有序数组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$就是方程组的解，这种解的全体称为它的解集合；如果不是，那么有序数组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$就不是方程组的解.

利用数学中的等量公理，如"等量乘以非零的同量或等量仍是等量"、"等量加等量，其和相等"等，可以建立与原方程组中各个方程所应满足的等量关系等价的一组新的方程组，从而这个新的方程组的解也就是原方程组的解. 反之，原方程组的解也是新方程组的解. 总之，通过等量公理的等量变换，可以得到原方程组的一系列同解的方程组.

求解方程组的过程中所用的等量变换基本上是以下3种：

(1) 用一个非零的数乘以一个方程；

(2) 用一个数乘以一个方程后再加到另一个方程上；

(3) 互换两个方程的位置.

变换(1)中，"非零"这两个字是不能少的，否则变换就不是等量的了. 变换(2)就是"等量加等量，其和相等"公理. 变换(3)的等量性是显而易见的.

为了以后叙述方便，我们分别称变换(1)，变换(2)和变换(3)为倍乘变换、倍加变换和对调变换，并依次记为$kr_i(k\neq0)$、r_i+kr_j和$r_i\leftrightarrow r_j$. 其中，r_i表示第i个方程，r_j表示第j个方程.

定义 1.1.1 倍乘变换、倍加变换和对调变换称为线性方程组的**初等变换**.

例 1.1.1 方程组的各个方程的等号右边的常数项全为零的线性方程组称为齐次线性方程组. 求解四元齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases} \tag{1-2}$$

解 将第一个方程乘以-4加到第二个方程上，将第一个方程乘以-7加到第三个方程上，再将第一个方程乘以-5加到第四个方程上，分别记为$r_2+(-4)r_1$，$r_3+(-7)r_1$，$r_4+(-5)r_1$(r为"行"的英语单词row的缩写，下同)，这三次变换都是倍加变换. 由此得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 0, \\ \quad - 6x_2 - 12x_3 - 2x_4 = 0, \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

作倍加变换$r_6+(-2)r_5$、$r_7+(-1)r_5$后得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad 0 = 0, \\ \qquad 0 = 0. \end{cases} \tag{1-3}$$

由于方程组(1-3)中第三、第四个方程都已变为$0=0$，这对解方程组是无效用的，因此可以不再写入方程组之中. 或者说，第三、第四个方程已被第一、第二个方程"吸收"了.

再做倍加变换$r_1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)r_5$与倍乘变换$\left(-\dfrac{1}{3}\right)r_5$后得

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 + \dfrac{1}{3}x_4 = 0, \\ \quad x_2 + 2x_3 + \dfrac{1}{3}x_4 = 0. \end{cases} \tag{1-4}$$

因为最后一个方程组(1-4)与方程组(1-3)、(1-2)都是同解的方程组，而方程组(1-4)最简单，所以，只要能把方程组(1-4)的解

求出来，也就可得到原方程组的解.

方程组(1-4)只有两个有效的方程，却有四个未知量，可见它有两个自由未知量. 自由未知量是指不受方程组的约束而可以任意取值的未知量. 当自由未知量的值取定后，另外的两个未知量的值也就随之由方程组(1-4)而完全确定了，这样，就可以得到方程组(1-4)的解，从而也得到了原方程组(1-2)的解.

不难认定，随着自由未知量取不同组的数值，方程组就有不同的解，也就是说，方程组就有无穷多组解. 只要自由未知量取不全为零的值，方程组就有非零的解. 如何把无穷多解表为有限的形式，即通解形式，这是线性代数的一个主要内容，这些内容在以后章节中详细叙述.

从上述的讨论中可以联想到，如果自由未知量取的是零值，那么方程组就得到了零解(所有未知量的值都取零值的解)；如果没有自由未知量，那么方程组就只有零解，即没有非零解.

例 1.1.2 解齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

解 先求出它的最简的同解齐次线性方程组. 进行倍加变换 $r_2+(-2)r_1$、$r_3+(-1)r_1$、$r_4+(-4)r_1$ 后得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -3x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases}$$

进行倍加变换 $r_6+(-1)r_5$、$r_7+(-1)r_5$ 后得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_3 = 0. \end{cases}$$

进行倍加变换 $r_5+(-1)r_8$、r_1+r_8 后得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_2 = 0, \\ -2x_3 = 0. \end{cases}$$

进行倍加变换 $r_{10}+\left(\frac{1}{3}\right)r_9$ 后得

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ -3x_2 = 0, \\ -2x_3 = 0. \end{cases}$$

最后一个方程组显然没有非零解，因为 $x_1=0, x_2=0, x_3=0$，所以原方程组没有非零解.

1.2 齐次线性方程组的矩阵

在上一节的讨论中不难发现，在求解过程中起着关键作用的是齐次线性方程组各方程左边诸未知量的系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$. 而未知量的记号 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及等号在每一次变换的过程中并没有改动过，也就是说，求解过程中只对按顺序排列的 m 行 n 列数表进行变换. 这里所说的数表中横称为行，纵称为列，构成一个重要的概念——**矩阵**. 第 3 章将详细介绍矩阵的各种运算和规则. 本章只就矩阵与解方程组有关的初等变换进行讨论，以便简化求解方程组的过程.

定义 1.2.1 由 $m\times n$ 个数排成 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-5}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵. 例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

是一个 3×4 矩阵，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

是一个 3×2 矩阵.

矩阵(1-5)中的数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$称为矩阵(1-5)的**元素**，$i$ 称为 a_{ij}的**行标**，说明 a_{ij}是位于第 i 行；j 称为 a_{ij}的**列标**，说明 a_{ij}是位于第 j 列、第 i 行的元素，记为 r_i，第 j 列的元素记为 c_j.

通常用英文大写字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$…或者(a_{ij})、(b_{ij})…来表示矩阵.

有时为了表明矩阵是一个 $m\times n$ 矩阵，也把它写成$(a_{ij})_{m\times n}$.

为了方便起见，把行数小于列数的矩阵称为**矮矩阵**，如 3×4 矩阵；而把行数大于列数的矩阵，称为**高矩阵**，如 3×2 矩阵；把行数等于列数的矩阵，称为**方阵**. 在方阵中由左上角至右下角的对角线称为**主对角线**；主对角线上的元素全为 1，其他的元素全为零的方阵称为**单位矩阵**. 如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\cdots$$

都是单位矩阵.

两个矩阵只有在它们的行数相同、列数相同、且每个元素都相应相等时才能称为相等. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$是一个 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times t}$是一个 $s\times t$ 矩阵，那么要让 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则应该使 $m=s,n=t$，且 $a_{ij}=b_{kl}$，对于 $i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,n$ 都成立，因此相等的矩阵是完全一样的.

引入矩阵的概念以后，用消元法解齐次线性方程组的问题就可变成对相应的矩阵进行初等行变换的问题了.

定义 1.2.2 对矩阵的行进行如下变换称为**初等行变换**：

(1) 用一个非零的数乘以某一行，即进行倍乘变换 $kr_i(k\neq 0)$；

(2) 用一个数乘以某一行后加到另一行上，即进行倍加变换 r_i+kr_j；

(3) 互换两行的位置，即进行对调变化 $r_i\leftrightarrow r_j$.

给定一个齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \tag{1-6}$$

把未知量的系数按原来的位置写成的一个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为方程组(1-6)的系数矩阵.

显然，如果知道一个线性方程组的全部系数，那么这个线性方程组就完全确定了. 也就是说，线性方程组(1-6)可以用它的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来表示，而用什么字母来表示未知量，不是实质性的问题.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换变成 $\boldsymbol{B}$，可写成

$$\boldsymbol{A}\longrightarrow\boldsymbol{B}.$$

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的任一非零行中第一个非零元素称为此行的非零首元. 若 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行为非零行，其余行全为零行，并且第 1 行至第 r 行的非零首元所在的列为 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 满足

$$j_1<j_2<\cdots<j_r,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是一个**阶梯形矩阵**，简称**梯阵**. 例如

$$\begin{bmatrix}0&2&1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&1&0&2\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&3\\0&0&5\end{bmatrix}$$

都是阶梯形矩阵. 如果在阶梯形矩阵 A 中每个非零首元都等于 1，并且每个非零首元所在的列的其他元素都等于零，则称 A 是一个**行最简形矩阵**，简称为**简化梯阵**. 例如

$$\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&\frac{1}{2}&0&1\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

都是简化梯阵.

对例 1.1.2 用系数矩阵来表达求解过程，就是

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\2&-1&2&0\\1&-2&0&0\\4&1&4&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&-3&-2&0\\0&-3&-2&0\\0&-3&-4&0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&-3&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&-2&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

其实，如果明确求解的是一个齐次线性方程组，那么最后全为零的列可以不写.

为了避免在学习时的不必要的繁琐运算，尤其是分数运算，经过改进，可以用一种简捷而有效的四元变换法（简称四元法）来进行初等行变换. 书末附有用计算机进行四元法计算的过程，读者可

参阅.

设矩阵的某两行为

$$\begin{bmatrix} a & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c & d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{bmatrix},$$

当 $a\neq 0$ 时,将上一行的各元素乘以 $-\frac{c}{a}$ 后加到下一行的各相同列的元素上,则得

$$\begin{bmatrix} a & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & d_1-\frac{c}{a}b_1 & d_2-\frac{c}{a}b_2 & \cdots & d_n-\frac{c}{a}b_n \end{bmatrix},$$

再用数 a 乘以下一行的各元素,得

$$\begin{bmatrix} a & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & ad_1-b_1c & ad_2-b_2c & \cdots & ad_n-b_nc \end{bmatrix}.$$

在上述过程中,第一次进行的是倍加行变换,第二次进行的是倍乘行变换.不妨称这样的两次初等行变换为一轮四元行变换(简称四元变换).

进行一轮四元变换后的效果是:在 a 的下一列元素变为 0 时,相应的 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 所在的位置就变为 $ad_1-b_1c,ad_2-b_2c,\cdots,ad_n-b_nc$,$d_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所在的位置变为 ad_i-b_ic,即 d_i 所在位置变为上一行的第一个元素与下一行第 i 列的元素的乘积减去上一行第 i 列的元素与下一行第一个元素的乘积.因为每一次变换都只是在四个元素之间进行乘法和加法,所以称为四元法.为叙述方便,以后称 a 为四元变换的主元或角(四个元素所在位置的左上角的元素),a 起着"轴心"的作用.主元不能是零,如果是零,则可以先对换上下两行.若无特别声明,以后都假设主元不等于零.

下面来证明任意一个矩阵总可以经过一系列四元变换,先变成梯阵,最后变成简化梯阵.

设