高等学校教学用書

画法几何学

H. A. 格拉哥列夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

画 法 几 何 学

H. A. 格拉哥列夫著
裘光明譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）1953年出版、格拉哥列夫（Н. А. Глаголев）書“画法几何学”（Начертательная геометрия）第三版譯出。这第三版是經雷日可夫（В. В. Рыжков）加以增訂过的，原書經苏联高等教育部审定为綜合大学和师范学院的教科書。

全書分四章，第一章專論画法几何的几何原理，第二章到第四章分別介紹蒙日的正交投影、軸測投影和綫性透視三种制圖方法。

画法几何学

H. A. 格拉哥列夫著

裴光明譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇号

（北京市書刊出版業营業許可証出字第〇五四号）

京华印書局印刷　新华書店总經售

書号 15010·100　開本 787×1092 1/16　印張 10 3/8　字數 221,000

一九五六年十月北京第一版

一九五六年十月北京第一次印刷

印數 0001—7,000　定價（10）¥1.30

目　录

原書編者序 ······ 5

作者第二版序摘录 ······ 6

緒論 ······ 7

第一章　画法几何的几何原理 ······ 9

§1．論平面圖形的几何变換;变換的不变量 ······ 9
§2．平行投射和它的不变量 ······ 10
§3．中心投射和空間的非固有元素 ······ 12
§4．中心投射的不变量 ······ 14
§5．透射 ······ 15
§6．建立透射的方法·代沙葛定理 ······ 17
§7．透射圖形作圖的例子 ······ 18
§8．透射圖形作为从一个圖形到另一个的投影 ······ 20
§9．一些特殊的透射 ······ 21
§10．亲似对应 ······ 23
§11．建立亲似对应的方法 ······ 24
§12．亲似圖形作圖的例子 ······ 25
§13．用兩对成亲似的直綫給定的亲似对应的特殊情形 ······ 28
§14．仿射对应 ······ 30
§15．仿射对应和平行投射 ······ 33
§16．在亲似对应里的主方向 ······ 36
§17．仿射对应和正投射 ······ 36
§18．与圓亲似的圖形 ······ 37
§19．橢圓的構圖性質和它的作圖方法 ······ 39
§20．尺度橢圓 ······ 46
§21．在画法几何里应用透視仿射变換的例子 ······ 48
§22．圓錐截綫 ······ 52
§23．与圓透射的曲綫 ······ 54

第二章　蒙日方法 ······ 57

§1．概論 ······ 57
§2．点的投影 ······ 58
§3．直綫的投影 ······ 60
§4．平面在投影圖上的表示法 ······ 64
§5．垂直于一个投影平面的平面 ······ 67
§6．点、直綫和平面在空間的相互位置 ······ 67
§7．平面用迹綫来表示 ······ 71
§8．論几何元素的可見性 ······ 74
§9．直綫与平面的垂直性 ······ 76
§10．多面体及其截断面的表示 ······ 78

§11. 兩个多面体的相貫……82
§12. 圓錐和圓柱的投影以及它們的相貫……84
§13. 影子的作圖問題……87
§14. 已知物体投影的改造；旋轉法……92
§15. 平面圖形眞实形狀的决定；叠合法……98
§16. 已知物体投影的改造；变更投影平面法……103
第三章　軸測投影法……107
§1. 軸測投影的基本命題；朴尔凱定理……107
§2. 軸測投影的一些特殊形式……111
§3. 点、直綫和平面在空間相互位置的决定……112
§4. 几何元素在軸測投影里可見性的决定……118
§5. 多面体的繪像……119
§6. 多面体的截断面……120
§7. 兩个多面体表面的相貫綫……123
§8. 論作圖中的任意性元素……125
§9. 軸測投影中的度量問題……128
§10. 正軸測投影……131
§11. 組合体在軸測投影中的作圖原則……137
§12. 正投影和軸測投影的互換……139
第四章　綫性透視……141
§1. 綫性透視的基本要素……141
§2. 点的透視……142
§3. 直綫的透視……142
§4. 直綫的灭点……143
§5. 直綫透視作圖的例子……144
§6. 平面的透視……145
§7. 平面的基本問題……146
§8. 綫性透視的度量問題；角的測量……147
§9. 綫性透視的度量問題；綫段的測量……150
§10. 綫性透視中的各种度量問題……153
§11. 直綫和平面的垂直性；反極对应……154
§12. 根据平面圖形的透視确定它們的眞实形狀……157
§13. 圓的透視……159
§14. 复杂立体的小尺度透視……160
中俄名詞对照表……168

原書編者序

本書是杰出的苏联几何学家格拉哥列夫（Н. А. Глаголев）所著"画法几何学"的第三版，作者对于画法几何的發展和高等学校画法几何教学方法的改进有很多貢献。本書第二版是在1946年作为綜合大学和师范学院画法几何教科書而出版的。

这第三版是由作者自己对第二版書作了进一步修訂的結果（可惜格拉哥列夫未能看到它的出版）。

这次修訂也像在准备第二版时一样，目的在于加强基本几何对应（即变換——譯者）在画法几何学中的应用，并使这种应用更为多方面和更有系統。与第二版比較，最大的变动在第一章，那兒有很多篇幅講述透射，而在第二版都只是在第四章中叙述綫性透視时才把它列入的。仿射透視对应現在是作为透射的重要特別情形来講述的。由于这个緣故，第一章材料的整个叙述变动極大，实質上等于已經重新写过。在第一章最后还列入了兩节关于与圓成透射的曲綫的作圖；詳細討論了的只是橢圓的情形。

以后的几章只作了極少的变动。在講述正投影方法的第二章里，把应用亲似来解决問題的方法提高到了第一位；在那兒减少了彼此类似例子的数量，而添加了应用透射的例子来代替它們，这样做还是可以無害于明白性的。

叙述軸測法原理的第三章也經过同样的修改。添加了关于二等軸測投影的新課文。除此以外，列入了新的一节"論作圖中的任意性元素"，在这一节里希望能使讀者得到以画法几何学新的理論——切特維魯新（Н. Ф. Четверухин）关于完全性的主要理論——为基础的簡單概念，以便引起研究这些理論的兴趣。

为了同样的目的，还援引了苏联几何学家在推广朴尔凱定理方面的工作。

在本書第四章（最后一章）里列入了关于圓的透視作圖的例子。除此以外，所有与透射性質的討論有关的材料，都加以扩充而移到第一章里去了。

以上就是我們在这一版里所作的主要变动。在完成这些工作时，編者尽量利用了菲尼可夫（С. П. Фиников）和切特維魯新对于第二版書的批評以及他們口头上發表的見解，这些意見帮助了編者确定編輯本書时的工作性質和工作方針，編者对他們表示真誠的感謝。

雷日可夫（В. Рыжков）

作者第二版序摘录

……根据射影几何原理来教画法几何的巨大工作是由伏拉索夫（A. К. Власов）教授所做的，他在这方面的杰出功績是应該特别指出的。在莫斯科大学所开設的一系列專門化課程（“造型艺术的几何原理”）里，伏拉索夫教授在应用仿射对应性質的基础上講述了画法几何（主要是軸測法）的各种問題，因而最有力地促进了这門課程的教学上新观念的推广。

本書是在同样的理論基础之上来叙述的画法几何教程。画法几何教学上的多年实际經驗已为这門課程的教学創造出一个完整的系統，本書就是其具体的实现。

再有，照作者看来，高等工業学校里的画法几何也可以照上面所説的方式講授。在学習仿射对应时所耗費的一些时間將为以后对于正投影方法的更迅速的通曉和更深入的理解所补償。此外，仿射对应性質的学習还会給出許多問題的补充解法，而且常常是更簡單的解法……

格拉哥列夫（Н. Глаголев）

緒　論

画法几何可以定义为在平面上繪制空間圖形的理論。对于繪像提出的要求是，从繪像可以建立起关于原圖形各部分的性質、大小和相互关系的(完全的或者部分的)观念。画法几何給我們以按着空間几何圖形的繪像来显示其性質的方法和关于空間几何形体相互位置問題的解决方法。作为科学学科来說，画法几何是几何学領域中比較年青的一門。虽然如何得到空間圖形的平面繪像的問題早在古代已被提出，虽然在古代的遺迹中發現的圖画已經使人注意到透視投影或者軸測投影，但是得到这种繪像的理論和如何得到繪像的有根据的法則，在那时却並不存在。在文艺复兴时代，在写生画中和在作建筑圖时所应用的繪圖方法的原理，卽主要是透視法的原理，在画家和建筑师的著作中受到研討。最先在数学基础上研究透視理論的是里昂的一个建筑师兼数学家代沙葛 (Desargue, 1593—1662)，他在 1630 年写的 (1636 年出版的)著作“透視法”里給出了几何形体透視繪像的最初的正确法則以及几何形体各部分尺寸的正确計算。这日期可以認为是关于在平面上繪制空間圖形問題的科学提法之开端。

在俄国很早就展开了制圖的艺术。还在古代俄罗斯时已經应用了制圖的工具，創造了自己的繪制圖画的方法。十四到十六世紀的壁画和神像画給我們很多以軸測法精神画成的圖画的例子。在这时期和以后的时期中，在进行大規模的建筑工程时，又利用了軸測繪像或透視繪像。到十八世紀中叶，在制圖中更常用到正投影。例如偉大的俄国發明家和設計师庫里宾(Кулибин)和波尔祖諾夫 (Ползунов) 的圖样就是。还在蒙日的实际上是总結了以前累积的經驗和把正投影当作独立的科学学科来叙述的書“画法几何学” (Géometrie déscriptive)問世(1795 年)以前，在俄国出版的民用建筑学教科書里，就有一章是講正投影的。

蒙日(Monge, 1745—1818)第一个注意到，当画法几何还仅仅是些个别的未被一个总的概念所統一起来的法則时，它对于应用科学所起的作用要比它在具有科学基础时所能起的作用小得多。蒙日在其書的序言里写道，正是为了使工程师們和技师們能够最广泛地利用画法几何原則去解决各种实际問題，他才制定了这門科学的原理並使它具有科学学科的形式。蒙日說明了，为什么工程师們和技师們唯有在完全掌握了作为画圖方法基础的数学原則时，才能适当地来使用这些方法的深入的理由。

在俄国，画法几何的科学見解的基础是由交通工程学院教师在 1824 年升为教授的塞伐斯季雅諾夫(Я. А. Севастьянов)奠定的。关于画法几何的第一本創作“画法几何学原理”就是由塞伐斯季雅諾夫在 1821 年發表的。不久以后又出版了他的一些新的著作。

在十九世紀中，画法几何的应用問題和画法几何的教学方法在高等工業学校許多教授的著作中富有成就地被研究着。特別应該指出的是索莫夫(И. Сомов)院士的教程(1862)和庫尔日莫夫(В. И. Курдюмов, 1853—1904)教授的重要著作。

卓越的結晶学家兼几何学家阜多洛夫(Е. С. Фёдоров)的工作在画法几何这門科学的發展中引入了一股新的潮流。他研究了在平面上繪画四維空間的点的方法(阜多洛夫的向量方法),因而立下了近年来由于在化学上的应用而取得了日益重大的价值的多維空間画法几何的基础。对于总結在阜多洛夫的"新画法几何学"書中的他的工作而言,特点在于問題提法的很大的普遍性,还在于广泛地把近代画法几何学的概念,特別是單値对应和順序("編号")的概念引用到他所广义地理解的画法几何的問題上去。阜多洛夫的工作对苏联画法几何学派有巨大的影响。在制圖方法領域里的杰出專家雷宁(Н. А. Рынин)教授在"繪画方法"(1916)書中也应用射影几何来叙述画法几何。

在广泛的科学基础之上与射影几何密切相关地構成画法几何課程,是苏維埃时代的特点。在这方面最大的供献是屬于伏拉索夫(А. К. Власов)教授的,他在莫斯科大学所开設的一系列課程是根据几何对应来講述画法几何的光輝的范例。由于伏拉索夫学派学者們[1]的工作,画法几何教学的这种安排,不仅在大学里支配了这門学科的教学,而且还逐漸灌入高等工業学校的教材中,例如由多布尔雅可夫(А. И. Добряков)教授、波波夫(Н. А. Попов)教授以及在工程上所用繪画方法領域里其他專家們的卓越教程,就是如此。

与此同时,还很广泛地展开了使画法几何应用方法更完善和使画法几何的几何理論基础更广闊和更深入的科学工作。在最近一个时期,还創立了例如切特維魯新(Н. Ф. Четверухин)的完全性理論、伏尔貝格(О. А. Вольберг)的一元圖形理論等新的理論,得到了軸測法主要定理对中心軸測法情形和对多維空間的推广,等等。此外,关于画法几何的实用問題,关于如何使繪制和改作建筑透視画的方法以及繪制影子的方法更趋完善,并且关于其他实用上很重要的問題,也完成了許多重要的工作。

[1] 特別应該指出本書作者格拉哥列夫教授以及切特維魯新教授的工作——原書編者注。

第一章　画法几何的几何原理

§1. 論平面圖形的几何变换；变换的不变量

在平面上描繪空間形体时，得到的是这样一个圖形，它的大小和形狀并不直接表达原物的大小和形狀、而是有些变形的。譬如說，在描繪多面体时，我們会看到，它的不同的面遭受到不同的变形。画法几何应該指出如何从圖形的繪像恢复它的本来面目的方法，因为这是在解决許多实际問題时所需要的。

因此，就必須从已知圖形的变形了的繪像决定其实在形狀和其各部分的实在大小。而这就必須在知道了造成繪像时所依据的法則以后，学会从变形了的圖形回到原来的圖形。

在解决許多并不与画法几何問題相干的几何問題时，也常常需要实行类似的从一个圖形到另一个圖形的变换。这时，如果一个圖形的每个点都变成另一个圖形的确定的点，那末这样的变换就叫做第一个圖形到第二个圖形的点变换。

举例說，在一張圖画从幻灯片投射到与它平行的幕布上时，就会引起这張圖画的一个点变换，这是因为幻灯片的每个点变成了幕布上确定的点的緣故。在这个例子里，变换由技术方法来实行。在另一些情形里也可以不是如此，那时若要实行变换，就需要知道已知圖形的点变成新圖形的点时所依据的法則，也就是需要知道对旧圖形的每个点如何求得与它对应的新圖形的点。几何圖形的最簡單的变换是它在空間的位移，例如它繞着某一軸的旋轉。这时新圖形的点是由旧圖形的点繞同一軸旋轉同一个角而得到的。在初等几何里討論的还有相似变换和反演变换。

每个变换实行时的困难程度由这个变换的法則决定。对于每一个变换，假如知道了圖形有那些元素和那些性質在变换下不改变，也就是在变换成的圖形里保留着它們在原来圖形里的样子，則要实行这个变换就大大地变容易了。

在已知变换下不改变的圖形的性質，叫做对于这种变换的不变的性質。与已知圖形有关的、在已知圖形里和在变换成的圖形里是相同的数，叫做已知变换底不变的数或者不变量。譬如說，在圖形的移动下，其任意兩个点中間的距离不改变，所以兩个点中間的距离是移动的不变量。在相似变换下角不改变，直綫段的比值也不改变，所以角度和直綫段的比值是相似变换的不变量。

关于已知变换的不变量的知識特别能使变换的实行簡單化。譬如說，我們来看一下上面說过的从幻灯片到与它平行的幕布上的投射。这时所有的直綫段投射成直綫段，并且它們的長度增大到同一个倍数，例如 p 倍。

在这样的投射下，幻灯片上任意兩个綫段長度的比值显然等于幕布上对应綫段的比值。幻灯片上直綫段中間的角等于幕布上对应綫段中間的角。

因此，直綫段的比值和角度是上述变换的不变量。由此可知，幻灯片上的每个圖形在幕布上投射成与它相似的圖形。所以这个变换是相似变换。

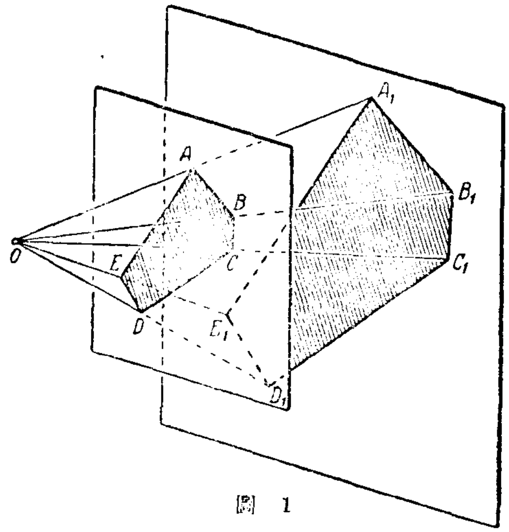

圖 1

現在假設有幻灯片上的一个圖形，例如五角形 $ABCDE$（圖 1）。假如我們不知道这个变换的不变量，那末不是实地作出它到幕布上的投射，我們就没有可能得到所給五角形的繪像。而知道了这些不变量，我們就能够得到等于所求繪像的圖形，这只要簡單地作出与五角形 $ABCDE$ 相似而各边增大到 p 倍的五角形就成。

在画法几何里应用的主要变換，包括平行投射和中心投射。我們必須知道这些变換的性質。

§2. 平行投射和它的不变量

我們来看一下，平面圖形在它們从一个平面到另一个平面的平行投射下所經受的那种变換，具有些什么性質。

在空間取兩个任意的平面 α 和 α_1，我們把其中后一个叫做投影平面①。再有，我們取不与平面 α 和 α_1 平行的一条确定的直綫 ST，然后沿着直綫 ST 的方向(叫做投射方向)把平面 α 的点移到平面 α_1 上（圖 2）。为了这个目的，我們通过平面 α 的每个点引平行于 ST 的直綫，直到与平面 α_1 相交。这样一来，与平面 α 的每个点 A 对应的就有平面 α_1 的点 A_1。与平面 α 的每个圖形 Ω 对应的就有平面 α_1 的一个圖形 Ω_1。点 A_1 和圖形 Ω_1 分别叫做点 A 和圖形 Ω 在平面 α_1 上的平行投影。不难指出投影的下列性質。

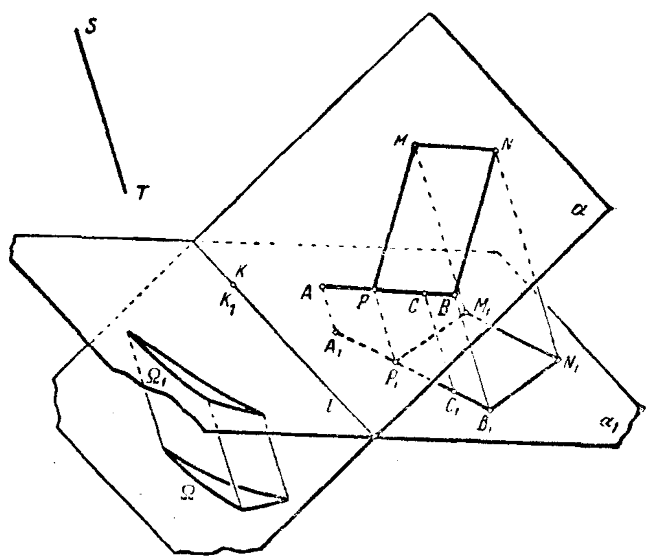

圖 2

1）与平面 α 的每个点对应的有平面 α_1 的点，相反，与平面 α_1 的每个点对应的有平面 α 的点，并且与一个平面的兩个不同的点对应的是另一个平面的兩个不

① 譯者注：注意这里所指的是投影所在的平面，而并非射影几何中所討論的射影平面。

同的点。所以說,在平面 α 和 α_1 的点中間利用平行投射确立了一个互相單值的对应。如果平面 α 和 α_1 不平行,則它們相交于一条直綫 l,这直綫的每个点 K 是它自己的投影 K_1。

2) 直綫投射成直綫,因为把一条直綫的点 $A, B, C, \cdots$ 投射成为投影平面上的点 $A_1, B_1, C_1, \cdots$ 的所有射綫,也就是射綫 $AA_1, BB_1, CC_1, \cdots$,显然处在一个平面上(圖 2)。

3) 直綫 AB 上綫段的比值等于它們投影的比值,即 $\frac{AC}{CB}=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}$,这是因为 $AA_1 \parallel BB_1$ 和 $BB_1 \parallel CC_1$ 的緣故。

4) 兩条平行直綫的投影彼此平行。

譬如設 $AB \parallel MN$(圖 2)。

假如它們的投影 A_1B_1 和 M_1N_1 不平行,那末与它們在平面 α_1 上的交点对应的就是平面 α 上直綫 AB 和 MN 的交点,而因为 $AB \parallel MN$,这是不可能的。因此,$A_1B_1 \parallel M_1N_1$。

5) 兩条平行直綫上綫段的比值等于它們投影的比值。

事实上,設已知兩个平行的綫段 AB 和 MN。連接点 B 和 N 并引直綫 MP 平行于 NB,交 AB 于点 P。因为四角形 $MNBP$ 是平行四边形,所以 $MN=BP$。根据4),四角形 $M_1N_1B_1P_1$ 也是平行四边形,因此 $M_1N_1=P_1B_1$。然而 $\frac{AB}{PB}=\frac{A_1B_1}{P_1B_1}$。把 PB 和 P_1B_1 換成与它們相等的綫段 MN 和 M_1N_1,我們得到:

$$\frac{AB}{MN}=\frac{A_1B_1}{M_1N_1}.$$

讓我們引进平面場(α)的概念作为屬于平面 α 的所有点和直綫的集合。現在根据上述种种可以断言,平行投射确立了平面場的这样的对应,在这对应下:

1. 場的点和場的直綫处于一个互相單值的对应中。
2. 屬于一条直綫的点变成屬于对应直綫的点。
3. 兩条直綫的交点变成对应直綫的交点。
4. 平行直綫还变成平行直綫。

也可以說,利用平行投射运算使場(α)經过变換得到場(α_1)。場(α_1)的几何圖形的那些性質,它們是在这个場利用平行投射变換时保留着的,叫做对于这变換不变的。例如,場的直綫的平行性是对于平行投射变換不变的性質,而垂直性則不是不变的。因此,譬如說,四角形是平行四边形的性質是对于所討論的变換不变的,而四角形是正方形的性質則不是不变的。显然,在从特殊形狀的变換过渡到某种較一般的变換时,原来認为不变的性質中,可以有一些成为非不变的。

举例說,在从移动过渡到較一般的、除移动外还允許某种变动的变換时,綫段的長度就不再是不变的了。

在§1里曾經指出过,所謂某种变換的不变量,一般地是指几何形象的那些数値特性,在每一个变換成的圖形里,这些特性就等于在原来圖形里的同样的特性:例如,不管如何地移动一个綫段,它的長度总不改变。相似变換已經不以綫段長度作为它的不变量了。不过任意兩个綫段的比值是相似变換的不变量。

兩条平行直綫上綫段的比值，尤其是一条直綫上兩个綫段的比值，是平行投射的不变量，这在研究这种运算时有主要的意义。

§3. 中心投射和空間的非固有元素

現在設重新給出兩个平面 α 和 α_1 ①，我們把其中后一个叫做投影平面(圖 3)，而且給了既不在 α 上又不在 α_1 上的点 S，S 叫做投射中心。然后，設 A 是平面 α 的一个点。引直綫 SA；如果它与平面 α_1 相交在点 A_1，則我們就把 A_1 叫做点 A 从中心 S 到平面 α_1 上的投影。

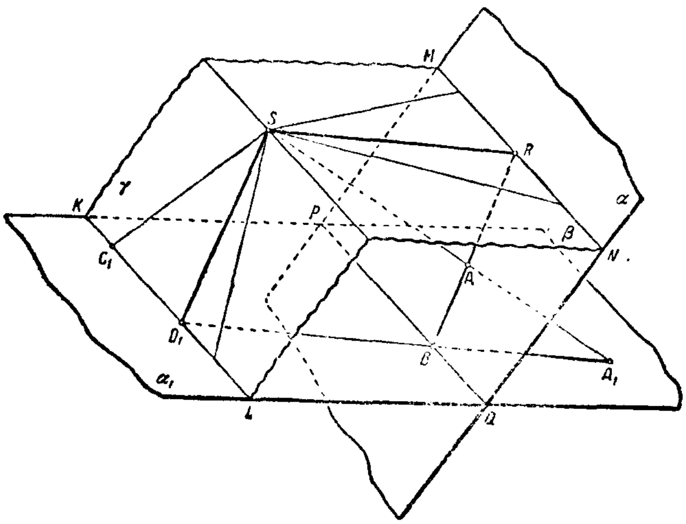

圖 3

讓我們指出平行投射和中心投射之間的一个根本的区別。在平行投射下，平面場 (α) 和 (α_1) 的点(直綫)处在一个互相單值的对应中。而在中心投射下，这个条件不成立。

实际上，設平面 α 的点从中心 S 投射到平面 α_1 上。对于平面 α 的每个点 A，在投射綫 SA 不平行于平面 α_1 的条件下，有着唯一的与它对应的平面 α_1 的点 A_1 (圖 3)。然而如果从中心 S 引平行于平面 α_1 的直綫，則它与平面 α 相交在一个点 R，它在平面 α_1 上沒有对应的点。完全同样地，如果从 S 引与平面 α 平行的直綫，則它与平面 α_1 相交于一个点 D_1，在平面 α 上沒有与它对应的点。因此，并非对于一个平面的所有的点在另一个平面上都有与它們对应的点。

設 PQ 是平面 α 和 α_1 的交綫，在平面 α 的任何一条不与 PQ 平行的直綫 BA 上，有着在 α_1 上沒有投影的点；这就是 BA 与直綫 MN 的交点 R，MN 是平面 α 与通过 S 平行于 α 的平面 β 的交綫。直綫 BA 上所有別的点在平面 α_1 上有列置在直綫 BA_1 上的投影。然而它們不塡滿整个这条直綫：那上面在它与直綫 KL 的交点 D_1 处有“空缺”，KL 是投影平面 α_1 与通过中心 S 平行于 α 的平面 γ 的交綫。此外，整条直綫 MN 在平面 α_1 上不对应什么，直綫 KL 在平面 α 上也不对应什么。

正像在算术發展的过程中，为了推广数的概念，必須在討論里引进負数和零，从而保証了减法运算的更大的一般性，在几何里引进一些补充的元素——非固有的或者無穷远的元素(点，直綫)，也显得非常有用。尤其在这时就有可能把由中心投影确立的对应看做互相單值的，而使許多几何定理的說法更为簡單和更有一般性。

---

① 譯者注：在下面的討論中，首先假定了平面 α 和 α_1 相交。

"無穷远点"这个术語的一个直覚的解釋可以由下列論証給出:如果讓点 A 沿着直綫 AR 移动,使它接近点 R,则点 A_1 就沿着直綫 BA_1 移动,离点 B 愈来愈远。当点 A 趋向与点 R 重合时,綫段 BA_1 就無限地增大。所以有时就說,当点 A 与点 R 重合,而直綫 SA 与 SR 重合时,点 A_1 变成直綫 BA_1 的無穷远点,或者說点 R 投射到平面 α_1 上成为直綫 BA_1 的"無穷远"点。完全同样地,在平面 α 上与平面 α_1 的点 D_1 对应的是平面 α 的一个"無穷远"点。

关于無穷远点的这种直覚的表示是以上述的这个概念作根据的,但是因为它不具有必要的形式上的确定性,并不足以把它引为"几何学的慣例"。所以假如方便的話,我們將采用非固有点(或者無穷远点)这个术語,但是每次必須注意,不用这个概念也可以說出同样的論断。举例說,"相交在無穷远点的兩条直綫"的意义应該算做只与"兩条平行直綫"的意义相同。正像在算术里"兩数的差等于零"与"兩数相等"有相同的意义。也可以不用非固有点的概念来处理,譬如說用方向的概念来代替它,但是較为不方便。为了說明起見,我們引进用不同的术語說的三个完全等价的断言:

1. 处在一个平面上的兩条不同的直綫,或者相交在一个点,或者平行。

1′. 处在一个平面上的兩条不同的直綫,或者有一个公共点,或者有公共的方向。

1″. 处在一个平面上的兩条不同的直綫,总有一个公共点(固有的或者非固有的)。

在最后一段叙述里,点这个字在其通常的意义下是指与非固有点相对的固有点。

建議讀者在初学阶段把我們用新的术語叙述的論断翻譯成自己習慣的用語。

讓我們再来指出与所引的概念有关的一些性質和表示方法。在屬于已知平面的每一条直綫上都有一个非固有点。兩条不平行的直綫有不同的非固有点,平面上全体非固有点的集合我們叫做这个平面的非固有直綫。断言 1″ 現在可以推广到当一条直綫是非固有直綫的情形。

我們把点屬于直綫、点屬于平面和直綫屬于平面的这种从屬性質推广到直綫的非固有点和平面的非固有直綫。那就是說,我們約定認为,命题:如果点屬于直綫,而直綫屬于平面,則点屬于平面,对于非固有点和非固有直綫——同样有效。

現在,我們可以不說兩个平面平行,而說它們相交于非固有直綫处。实际上,与第一个平面的每条固有直綫对应的有第二个平面上与它平行的一条直綫,这兩条直綫公共的非固有点同屬于这兩个平面;因此,平行平面中一个的全部非固有点也都屬于另一个平面。

这样一来,对于"兩个平面或者相交于一条直綫,或者平行"这个断言,我們得到了等价的表达法:"兩个平面总相交于一条(固有的或者非固有的)直綫"。

最后,不妨說,空間的所有非固有点(和非固有直綫),处在空間的一个(非固有)平面上。必須注意的是,包含着兩个(不同的)非固有点的直綫和包含着三个(不在一条直綫上的)非固有点的平面,分別是非固有直綫和非固有平面。

讓我們再举一些利用上面所引进的概念来叙述基本的几何定理的例子。

代替說:通过直綫外的一个点只可以引唯一的直綫平行于已知直綫,我們可以說:一个固有点和一个非固有点决定唯一的通过它們的直綫。

命題：通过兩个点和从它們引出的兩条平行直綫，可以引唯一的平面——可以换成：通过兩个固有点和一个非固有点可以引唯一的平面。

定理：通过从一个点引出的兩条直綫，只可以引一个平面——成为下列形式：通过一个固有点和兩个非固有点只有一个平面。

对于别的牽涉到平行直綫和平行平面的定理，在写法上也可以作类似的变更。在定理写法的这种变更里还是不包含它們内容的改变。而定理的这种写法指出，基本的几何命題，牽涉到关于点、直綫和平面互相从屬性，关于它們的相交和关于其中一些如何用另一些来决定諸問題的，不管对于固有元素还是对于非固有元素，都同样成立。这使我們有理由不在这兩类元素中間作任何区别，直到發生新的几何关系，在其中固有元素的和非固有元素中間的平等性不再存在（例如关于綫段長度和角的大小的問題）时才止。

射影几何就是系統地研究这样一些几何关系的，在这些关系中非固有元素被認为与空間的所有一般元素平等的（因此它們也就不再需要独特的名称）。

經过关于非固有点的概念的这些引論以后，我們有权說：平面 α 的点 R（圖 3）投射到平面 α_1 上，变成直綫 BA_1（或者任何与它平行的直綫）的非固有点；点 C_1 是平面 α 上与直綫 SC_1 平行的所有直綫的非固有点在平面 α_1 上的投影。容易看出，平面 α_1 的非固有直綫，投射到平面 α 上，变成通过点 R 而且平行于直綫 PQ（平面 α_1 和 α 的交綫）的直綫。完全相同，平面 α 的非固有直綫，投射到平面 α_1 上，变成通过点 C_1 而且平行于同一条直綫 PQ 的直綫。

根据所引的术語，我們有权認为，中心投射确立了在平面場 (α) 和 (α_1) 的点和直綫中間的一个互相單值的对应。

在結束时我們引出兩个重要的特殊情形：

1. 平面 α 和 α_1 相交于非固有直綫处，这就是說它們平行，这情形在 §1 里研究过了。

2. 投射中心是非固有点，换句話說，投射綫彼此平行。这就是在 §2 里已經說过的平行投射的情形。

§4. 中心投射的不变量

在研究由中心投射确立的对应时，很自然地首先要弄清楚圖形对于它的不变的性質。

容易看出，上面所說的对于平行投射的不变的性質（直綫的平行性）和不变量（平行直綫段的比值），对于中心投射不是不变的。实际上，兩条平行直綫在投射到另一个平面上时可以变成相交的直綫。

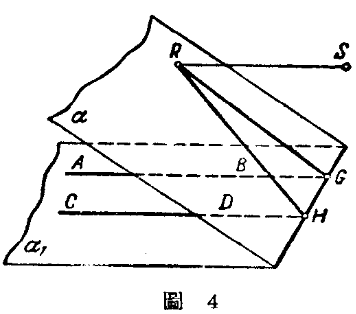

圖 4

例如，直綫 AB 和 CD（$AB\parallel CD$，圖 4）在它們从中心 S 由平面 α_1 投射到平面 α 上时，变成相交于点 R 的直綫 GR 和 HR，并且 $SR\parallel AB$ 和 $SR\parallel CD$。同样明显地，一般說来，$\frac{AB}{BC}\neq\frac{A'B'}{B'C'}$，这是因为点 A, B, A', B' 在直綫 AC 和 $A'C$ 上可以互不相关地选取，而根据这种取法总可以求出投射中心的位置（圖 5）。但是如果在直綫上取的不

是三个点，而是四个点，并且列出由其中两个点把另两个点所决定的綫段划分成的两个比值，則这两个比值的比值就是对于中心投射的不变的数。实际上，設直綫 a 的点 A, B, C, D 由中心 O 投射到直綫 a' 的点 A', B', C', D'（圖 6）。以点 B 和 C 把綫段 AD 划分成为比值 $\frac{AB}{BD}$ 和 $\frac{AC}{CD}$。

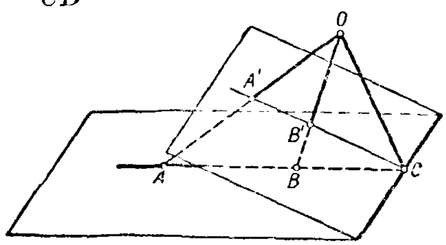

圖 5

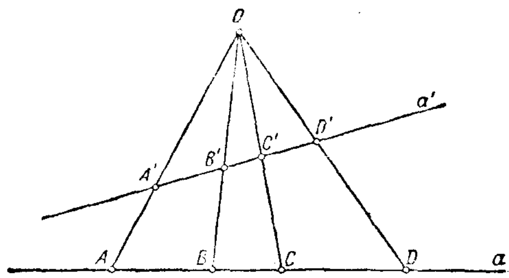

圖 6

从等高的两个三角形 AOB 和 BOD，可以求得：

$$\frac{AB}{BD}=\frac{\triangle AOB\text{的面积}}{\triangle BOD\text{的面积}}=\frac{\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\angle AOB}{\frac{1}{2}BO\cdot DO\cdot\sin\angle BOD}=\frac{AO\sin\angle AOB}{DO\sin\angle BOD}.$$

从三角形 AOC 和 COD，我們用同样步驟求得：

$$\frac{AC}{CD}=\frac{AO\cdot\sin\angle AOC}{DO\cdot\sin\angle COD}.$$

用一个等式去除另一个，我們得到：

$$\frac{AB}{BD}:\frac{AC}{CD}=\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle BOD}:\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle COD}.$$

对于直綫 a' 重复同样的計算，可以把比值

$$\frac{A'B'}{B'D'}:\frac{A'C'}{C'D'}$$

用同一些角来表达，得到的是：

$$\frac{A'B'}{B'D'}:\frac{A'C'}{C'D'}=\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle BOD}:\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle COD}.$$

因而

$$\frac{AB}{BD}:\frac{AC}{CD}=\frac{A'B'}{B'D'}:\frac{A'C'}{C'D'}.$$

数值 $\frac{AB}{BD}:\frac{AC}{CD}$ 叫做四个点 A, B, C, D 的复合比值，它是中心投射的基本不变量。

§ 5. 透射

像在前面 § 3 里那样，設 α 和 α_1 是两个平面，在它們中間由以 S 为中心的投射运算（在中心为非固有点的情形就成为平行投射）确立了一个对应。与这个投射同时我們还討論另一个以固有点或者非固有点 S' 为中心的投射（圖 7）。于是与平面 α 的每个点 A 对应的就不是平面 α_1 的一个点，而是两个点：A_1 和 A_1'，分别从中心 S 和 S' 的投射而得到。反之，平面 α_1 的每一个点随着投射中心的选取可以任意地看作平面 α 的两个不同的点的投影。因而在

平面 α_1 的点中間确立了一个对应。在这平面上我們不妨認为有兩个重合的平面場 (α_1) 和 (α_1')。实际上，与平面 α_1 的每个点例如 A_1 [看作場 (α_1) 的点]对应的是平面 α 的点 A，它从中心 S 的投影就是 A_1。从中心 S' 投射 A，得出与点 A_1 对应的場 (α_1') 的点 A_1'。完全相同，与平面 α_1 的每一条直綫[看作場 (α_1) 的直綫]对应的是在同一个平面上的屬于場 (α_1') 的直綫；例如，与直綫 A_1B_1 对应的是直綫 $A_1'B_1'$。讓我們来确定所获得的对应的这样一些性質，它們可以用来作出对应的圖形而不必离开平面 α_1。

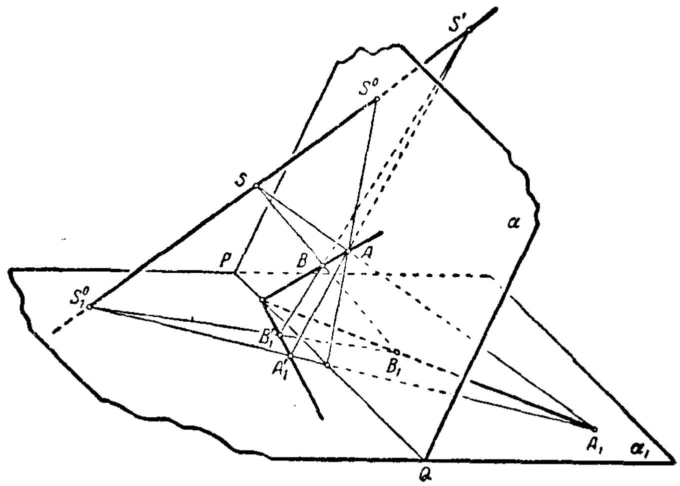

圖 7

1. 与平面 α_1 的每个点(固有的或者非固有的)对应的是同一个平面的确定的点(固有的或者非固有的)。

2. 与平面 α_1 的每条直綫对应的是同一个平面的确定的直綫。像点的对应一样，直綫的对应也是互相單值的。

3. 如果已知点处在已知直綫上，則与它对应的点处在对应的直綫上。

4. 連結对应点的所有直綫通过平面 α_1 的同一个点 S_1^0。点 S_1^0 与自己对应。

5. 平面 α_1 的每条直綫与对应的直綫相交在一条固定的直綫 PQ(平面 α 和 α_1 的交綫)上。直綫 PQ 的点与自己对应。

得到的对应叫做透射；連結对应点的所有直綫所通过的那个点，叫做透射中心；每兩条对应直綫交点所在的那条直綫，叫做透射軸。

重合的平面場的每一个对应，即使它不用投射来确立，只要它具有上面所列举的性質，就叫做一个透射。

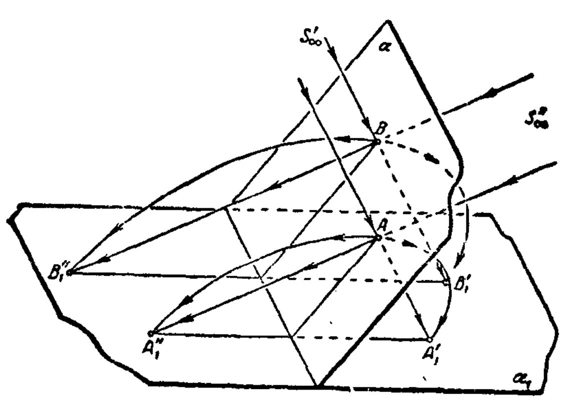

圖 8

在兩个平面場中間确立了一个透射以后，屬于这兩个場的互相对应的圖形，叫做透射的圖形。

附言　在画法几何里往往宜于把第二个投射的中心 S'(不依賴于 S 的选擇)放在連結場 (α) 的点和对应点的所有直綫的公共的非固有点处，这些对应点由把 α 繞着 α 和 α_1 的交綫旋轉到与 α_1 重合而得到(圖 8)。所有上述直綫的平行性讀者是很容易确定的。可以簡單地說，借旋轉方法使 α 与 α_1 重合而得到第二个場 (α_1')。在圖 8 上表