互 易 定 理

B.B. 伏爾杜耶夫著

科 学 出 版 社

互　易　定　理

B. B. 伏爾杜耶夫 著
李　　祥譯
沈　　㠭校

科　學　出　版　社
1959

В. В. ФУРДУЕВ

ТЕОРЕМЫ ВЗАИМНОСТИ

ГОСТЕХИЗДАТ

1948

內 容 簡 介

本書是敍述互易定理的專題著作．全書共分爲12節，首先敍述瑞利的經典互易定理，並由它的不足引出了亥姆霍茲的更爲一般的互易定理，然後分別探討了在綫性動力系統（機械、聲、電聲等系統）中可能存在的耦合的互易性質，並對機電及電聲四端網絡特別作了闡述．最後舉出互易性質在測量技術中的實際應用．

本書可供研究聲學、電聲學時參考．

互 易 定 理

B. B. 伏爾杜耶夫 著

李 群 譯

沈 壕 校

*

科 學 出 版 社 出 版（北京朝陽門大街117號）

北京市書刊出版業營業許可證出字第061號

科學出版社上海印刷廠印刷　新華書店總經售

*

1959年2月第 一 版　書號：1626　字數：69,000

1959年2月第一次印刷　開本：850×1168 1/32

（滬）0001—5,210　印張：2 3/8

定價：(10) 0.48元

目　錄

附　錄

緒 言

在綫性動力系統中，互易定理具有非常重大的意義；在一定範圍內說來，它是一個一般性的定理．在許多情形下，它能够解出使用直接方法不能或很難求出的問題． 並且，互易性質往往能够成功地應用在實驗中以確定動力系統的特性，這種動力系統的特性常不能很方便地直接測量． 因此，在種種情形下的互易關係的定義就引起了極大的興趣．近來的期刊中發表了不少關於這方面的創造性的論文．

關於互易定理在電路以及電磁波輻射系統的應用，在許多手册中已敍述得很多．可是，在機械、聲、特別是機電系統中，互易性質的表示形式是各式各樣的；在文獻中，我們還沒有發現它的原始關係的系統性結論，以及將這些重要結果聯系起來的簡述*)．

本書試圖彌補這個明顯的缺陷． 在書中，除了敍述由瑞利及亥姆霍兹的經典研究所奠定的互易定理的原則外，並且舉出互易定理在機械、聲、及機電四端網絡中的各種應用．

§1. 經典互易定理

互易定理將施於綫性動力系統的各種外作用及其效應聯系了起來． 它是在 1873 年，由瑞利首先確立的[4–7]，雖然，亥姆霍兹在更早(1860)就發現了它的若干特殊情形．

瑞利的互易定理可證明如下．

設有一個具任意有限自由度的綫性動力系統．讓我們用廣義坐標 x_i 及它的變化速度 $\dot{x}_i$ 來表示系統的瞬時狀態，則系統的拉格蘭日函數具有下面的形式：

*) 應該指出，在關於這類的若干著作中，會遇到一些不徹底的及不確切的說明，有時甚至是明顯的錯誤．

$$L=\frac{1}{2}\sum_i\sum_k(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-s_{ik}x_ix_k),\tag{1.1}$$

其中的慣性係數 m_{ik} 及位係數 s_{ik} 是常數，與系統的位形無關.其次假定，系統中的有效耗力可用具有實阻抗常係數 r_{ik} 的耗散函數

$$D=\frac{1}{2}\sum_i\sum_k r_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k\tag{1.2}$$

來代表。

由函數 L 及 D 的形狀可以看出，係數 m、r、s 滿足條件*)

$$m_{ik}=m_{ki};\ s_{ik}=s_{ki};\ r_{ik}=r_{ki}.\tag{1.3}$$

拉格蘭日方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}=F_i-\frac{\partial D}{\partial\dot{x}_i},\tag{1.4}$$

式中，F_i 爲作用於坐標 x_i 變化方向的廣義外力．顯然由式(1.1)和式(1.2)可導致下面的形式：

$$\sum_k(m_{ik}\ddot{x}_k+r_{ik}\dot{x}_k+s_{ik}x_k)=F_i.\tag{1.5}$$

在强迫振盪的穩態下，所有變量均隨時間作 $e^{j\omega t}$ 變化，可以認爲：

$$v_k=\dot{x}_k=j\omega x_k=\frac{\ddot{x}_k}{j\omega}.$$

我們引用廣義阻抗

$$z_{ik}=j\omega m_{ik}+r_{ik}+\frac{s_{ik}}{j\omega},$$

並且由於關係式(1.3)，就得：

$$z_{ik}=z_{ki},\tag{1.6}$$

我們可將運動方程(1.5)寫成代數方程組的形式：

$$F_i=\sum_k z_{ik}v_k.\tag{1.7}$$

---

*) 從下面的討論可以明白這點.讓我們研究這樣幾項的和：$m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k+m_{ki}\dot{x}_i\dot{x}_k=(m_{ik}+m_{ki})\dot{x}_i\dot{x}_k$；如果 $m_{ik}\neq m_{ki}$，則假設 $m'_{ik}=\frac{1}{2}(m_{ik}+m_{ki})$，我們可以將上面的和式寫成 $m'_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k+m_{ki}\dot{x}_i\dot{x}_k$，並且 $m'_{ik}=m_{ki}$．對於係數 s_{ik} 及 r_{ik} 均可用同樣方法證明．

這個方程組的解爲

$$v_k = \sum_i y_{ik} F_i, \tag{1.8a}$$

式中

$$y_{ik} = (-1)^{i+k} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta},$$

並且

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_{11} \cdots z_{1k} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ z_{k1} \cdots z_{kk} \end{vmatrix},$$

它是由各廣義阻抗 z_{ik} 組成的行列式. Δ_{ik} 爲從 Δ 中劃去第 i 行及第 k 列所得的子式. 由於關係式(1.6),行列式是對稱的;子式 Δ_{ik} 及 Δ_{ki} 彼此可由另一個將行與列互換得到. 所以, $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$. 由此可見,係數 y_{ik} 滿足置換關係:

$$y_{ik} = y_{ki}. \tag{1.9}$$

現在設有另一外力 F'_i,代替預先給定的 F_i 作用於系統;這時得到的廣義速度以 v'_i 表示,在穩態時,根據式(1.8a)可得:

$$v'_k = \sum_i y_{ik} F'_i. \tag{1.8b}$$

以 F'_k 乘(1.8a), F_k 乘(1.8b), 經相加後得:

$$\sum_k v_k F'_k = \sum_k \sum_i y_{ik} F_i F'_k,$$

$$\sum_k v'_k F_k = \sum_k \sum_i y_{ik} F'_i F_k.$$

因爲置換關係式(1.9),故:

$$\sum_k (v_k F'_k - v'_k F_k) = 0. \tag{1.10}$$

這個結果便是瑞利經典互易定理的一般公式. 在最簡單的特殊情形是, 第一項中所有外作用中,除 F_a 外均等於零; 第二項除 F'_b 外所有 F'_k 均等於零;這時由式(1.10)得:

$$v_b F'_b = v'_a F_a$$

或

$$\frac{v_b}{F_a} = \frac{v'_a}{F'_b}. \tag{1.11}$$

這就是說，如果由於在坐標 x_a 方向存在外力 F_a 而出現效應 v_b，那麽，當同樣的外力存在於坐標 x_b 方向時就會有效應 v'_a，它的大小與符號都和 v_b 相同.

如果我們仿效瑞利那樣，令所有類型的外力，除了兩個以外均等於零（這兩個力稱爲第一類型及第二類型外力），就可以得到定理(1.10)更有趣的特殊情形. 這時

$$v_1F'_1 + v_2F'_2 = v'_1F_1 + v'_2F_2. \qquad (1.12)$$

在這種情形下，動力系統就是一個這樣的裝置，它通常稱爲"無源綫性四端網絡"；以字標 1 及 2 分別表明這四端網絡的兩方的各量. 裝置的簡圖示於圖 1；它是一個被封閉起來的機構. 外作用只能通過兩根向外伸出的樞軸作用於它.

瑞利通過研究三種獲得互易定理 (1.12) 結果的方法，確定了這個機構的基本規律.

1. 首先，設 $F'_1 = F_2 = 0$（圖 2a）. 由式(1.12)可得

$$v_2F'_2 = v'_1F_1$$

或

$$\frac{v_2}{F_1} = \frac{v'_1}{F'_2}.$$

可以看出，當 $F'_2 = 0$ 時，就有 $v'_1 = v'_2 = 0$；當 $F_1 = 0$ 時，就有 $v_1 = v_2 = 0$；於是，這個結果可以寫成：

$$\left(\frac{v_2 + v'_2}{F_1 + F'_1}\right)_{F_2+F'_2=0} = \left(\frac{v_1 + v'_1}{F_2 + F'_2}\right)_{F_1+F'_1=0}, \qquad (1.13)$$

這個結果表明了機械四端網絡的兩個順從性的恆等關係. 這兩個互順從性是當相對一方處於自由狀態下($F = 0$)而測得的.

圖 1

2. 現在令 $v_1 = v'_2 = 0$(圖 2b)，這時由式(1.12)得

$$v_2F'_2 = v'_1F_1$$

或

$$\frac{F_1}{v_2} = \frac{F'_2}{v'_1}.$$

因爲在所討論的條件下，若 $v_1 = 0$，則 $F'_1 = F'_2 = 0$；若 $v_2 = 0$，

則 $F_1 = F_2 = 0$, 故可寫成

$$\left(\frac{F_1 + F_1'}{v_2 + v_2'}\right)_{v_1+v_1'=0} = \left(\frac{F_2 + F_2'}{v_1 + v_1'}\right)_{v_2+v_2'=0}. \qquad (1.14)$$

這樣，我們就得到四端網絡兩個互阻抗恆等的定理，這兩個互阻抗是相對一方在"制動"狀態($v = 0$)時測得的.

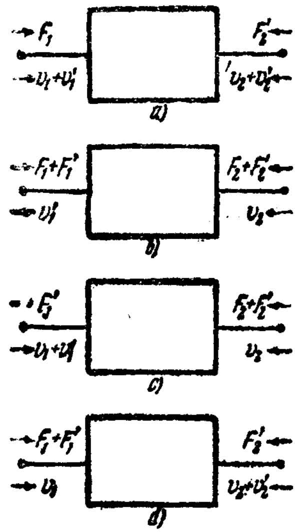

圖 2

3. 設 $F_1 = 0, v_2' = 0$ (圖 2c)；我們就得到第三種情形. 這時根據式(1.12)得:

$$v_1F_1' + v_2F_2' = 0$$

或

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{F_1'}{F_2'}.$$

可以看出，當 $F_1'=F_2'=0$ 時，則 $v_1'=0$；當 $F_2 = 0$ 時 $v_2 = 0$；這時就可寫成

$$\left(\frac{v_2 + v_2'}{v_1 + v_1'}\right)_{F_1+F_1'=0} = -\left(\frac{F_1 + F_1'}{F_2 + F_2'}\right)_{v_2+v_2'=0}. \qquad (1.15)$$

這個結果表明，四端網絡的任一方在自由狀態時的速度比，等於另一方在制動狀態時力之比的負值.

很容易見到，如果我們在式(1.12)中設 $v_1'=0$, $F_2=0$ (圖 2d)，也可以得到這樣的結果:

$$\frac{F_2'}{F_1} = -\frac{v_1}{v_2'}.$$

同時可以看出，當 $F_1 = 0$ 時 $v_1 = 0$, 及當 $F_1' = F_2' = 0$ 時 $v_2' = 0$；因而上面的結果可以改寫成:

$$\left(\frac{F_2 + F_2'}{F_1 + F_1'}\right)_{v_1+v_1'=0} = -\left(\frac{v_1 + v_1'}{v_2 + v_2'}\right)_{F_2+F_2'=0}. \qquad (1.16)$$

這就是說，在兩方(自由的及制動的)對調的情形下，上面的定理仍然正確。

我們來證明，式（1.13）—（1.16）四個定理等價於一個唯一的、將無源四端網絡的"綫性參量"聯系起來的關係式．將輸入及輸出方變量 v、F 聯系起來的綫性機械四端網絡的一般方程爲：

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}F_2 \\ F_1 &= a_{21}v_1 + a_{22}F_2 \end{aligned}\right\}. \tag{1.17}$$

不過要注意，這些方程遵從的符號的規定與瑞利所取的不同，即速度的方向由輸入方指向輸出方算正，如圖 3 所示（力的符號的規定不變）．

圖 3

由式（1.17）解 v_2、F_2，可得：

$$\left.\begin{aligned} |a|\,v_2 &= a_{22}v_1 - a_{12}F_1 \\ |a|\,F_2 &= -a_{21}v_1 + a_{11}F_1 \end{aligned}\right\}, \tag{1.18}$$

式中

$$|a| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

它是由四端網絡綫性參量 a_{ik} 所組成的行列式．

由方程式（1.17）及（1.18）求出對應於定理（1.13）—（1.16）中的各變量比值，並考慮到輸出方速度（v_2）符號的改變，就可得：

由方程（1.17）	由方程（1.18）
$\left(\dfrac{-v_2}{F_1}\right)_{F_2=0} = -\dfrac{1}{a_{21}},$	$\left(\dfrac{v_1}{F_2}\right)_{F_1=0} = -\dfrac{\lvert a\rvert}{a_{21}},$
$\left(\dfrac{F_2}{v_1}\right)_{v_2=0} = \dfrac{1}{a_{12}},$	$\left(\dfrac{F_1}{-v_2}\right)_{v_1=0} = \dfrac{\lvert a\rvert}{a_{12}},$
$\left(\dfrac{F_1}{F_2}\right)_{v_2=0} = a_{22},$	$-\left(\dfrac{-v_2}{v_1}\right)_{F_1=0} = \dfrac{a_{22}}{\lvert a\rvert},$
$-\left(\dfrac{v_1}{-v_2}\right)_{F_1=0} = a_{11},$	$\left(\dfrac{F_2}{F_1}\right)_{v_1=0} = \dfrac{a_{11}}{\lvert a\rvert}.$

然而，根據定理（1.13）—（1.16），兩列方程彼此對應的左部應該相等．比較這些方程的右方，我們可以確信，恆等的充分和必要的條件是：

$$|a| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1. \tag{1.19}$$

將方程(1.18)與(1.17)相比較，可以看出，它是一個將原來四端網絡的輸入及輸出方對調而成的反演四端網絡．如果根據所採用的符號規定，因爲對調的關係，兩速度改變符號；並考慮到基本條件(1.19)，則反演四端網絡的方程具有這樣形式：

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= a_{22}v_1 + a_{12}F_1 \\ F_2 &= a_{21}v_2 + a_{11}F_1 \end{aligned}\right\}. \tag{1.20}$$

仍須指出，四端網絡兩方的變量不一定要具有相同的量綱；例如，若 F_1、v_1 的意義爲力及綫速度，而 F_2、v_2 却可以是力矩及角速度．可以理解，條件(1.19)要求的是：所有變量均須用同一的單位制表示．其次，正如瑞利所指出，很明顯，上述論斷可以無條件地搬用於綫性無源的電系統中．在這情形下，變量 F 及 v 之意義爲電四端網絡兩方的電壓及電流．一般所用的電壓及電流(U、i)符號的規定，如圖 4 所示．

圖 4

然而，這裏所證明的互易關係却不能輕率地推行於機電系統，特別是機電四端網絡，它的一方是電量，而另一方是機械量．這類系統的互易性質需要專門研究，它將在以後(§5)講到．

§2. 亥姆霍茲的互易關係

經典互易定理具有形式性．瑞利在看到這點時也曾說過："定律的極端的一般性會使人產生模糊的印象"．互易定理的形式性就在於：它仍然未明確在系統中起作用的各種耦合的物理特性，而這些耦合的互易性質(如果存在的話)就是上面所導出關係式的基礎．

爲了說明事情的本質，由方程 (1.7) 可見，作爲互易定理基礎的置換關係式(1.6)可以寫作：

$$\frac{\partial F_i}{\partial v_k} = \frac{\partial F_k}{\partial v_i}. \tag{2.1}$$

我們將力看成系統對於外作用的反應．這時，式(2.1)可以這樣解

釋：在動力系統的元件 i 與 k 之間，存在着相互對稱的耦合；如果因速度 v_k 改變而使力 F_i 的值改變，那麼，當速度 v_i 作與 v_k 相同的改變時，力 F_k 就會像 F_i 那樣改變，而且改變的大小相等，方向相同．這樣的解釋會使我們聯想到：我們所研究的耦合是通過速度 v 實現的，系統元件之間的互作用力因果地依從於這些速度；如果這個依從性不存在，則偏導數 $\frac{\partial F}{\partial v}$ 就應該消失．可是，在以後將會說明，通過廣義速度實現的保守性耦合，無論在什麼時候也不會是相互對稱的．只是由於在穩態時可用速度來表示位移及加速度，而通過位移及加速度能實現對稱互易的保守性耦合，所以在式(2.1)中才出現這種互作用力與速度的關係，可以說，通常式(2.1)只是在形式上是正確的．它僅僅對於有耗耦合，即當 $\frac{\partial F_i}{\partial v_k} = r_{ik}$ 時，才具有物理意義．

這些見解指出了對動力系統中可能有的各種耦合作一般性研究的必要．亥姆霍茲在他晚年的一篇很有意義的論文[2]中，首先作了這樣的研究．亥姆霍茲(1886 年)所發現的互易關係更具有一般性，它不受應用經典互易定理所必須滿足的綫性條件的限制．

在單獨研究保守性耦合時，我們可以將系統的耗散函數撇開不談．對某一坐標 x_a，拉格蘭日方程可寫成：

$$F_a = -\frac{\partial L}{\partial x_a} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} = -\frac{\partial L}{\partial x_a} + \\ + \sum_i \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \dot{x}_a}\dot{x}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \dot{x}_a}\ddot{x}_i\right). \qquad (2.2)$$

先研究系統元件 a 及 b 之間，通過廣義加速度實現的耦合．作用在元件 a 上的力 F_a，可由式(2.2)得到的關係

$$\frac{\partial F_a}{\partial \ddot{x}_b} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_b \partial \dot{x}_a}$$

與元件 b 的加速度聯系起來．像式(2.2)那樣寫出 F_b 的表示式，並將它對 $\ddot{x}_a$ 微分，可得

$$\frac{\partial F_b}{\partial \ddot{x}_a} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_a \partial \dot{x}_b},$$

因而

$$\frac{\partial F_a}{\partial \ddot{x}_b}=\frac{\partial F_b}{\partial \ddot{x}_a}. \tag{2.3}$$

它便是加速度耦合的對稱互易定理(我們用這術語來表示通過加速度實現的耦合). 例如,機械系統中的慣性耦合,電系統中的電感耦合,就是屬於這樣的情形. 在其他各具體情形下,加速度耦合是否存在,將取決於

$$m_{ab}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_a \partial \dot{x}_b}$$

的數值; 如果互慣性係數 m_{ab} (在電系統中是互感)不等於零, 則耦合存在. 慣性耦合的典型例子是自由槓桿的平面運動. 它是具有漏感的變壓器的機械類比.

將式(2.2)對 $\dot{x}_b$ 取偏導數, 並記住 L 是坐標及速度的函數, 就可以研究通過廣義速度實現的耦合, 寫出:

$$\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b}=-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_b \partial x_a}+\frac{\partial^2 L}{\partial x_b \partial \dot{x}_a}+$$
$$+\sum_i\left(\dot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_b}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \dot{x}_a}+\ddot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_b}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_a}\right),$$

改變在"總和"符號內的微分次序, 可得:

$$\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b}=-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_b \partial x_a}+\frac{\partial^2 L}{\partial x_b \partial \dot{x}_a}+$$
$$+\sum_i\left(\dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_b \partial \dot{x}_a}+\ddot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_b \partial \dot{x}_a}\right)=$$
$$=-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_b \partial x_a}+\frac{\partial^2 L}{\partial x_b \partial \dot{x}_a}+\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_b \partial \dot{x}_a}. \tag{2.4a}$$

用類似方法可求出:

$$\frac{\partial F_b}{\partial \dot{x}_a}=-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_a \partial x_b}+\frac{\partial^2 L}{\partial x_a \partial \dot{x}_b}+\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_a \partial \dot{x}_b}. \tag{2.4b}$$

將式(2.4a)及式(2.4b)相加, 可得:

$$\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b}+\frac{\partial F_b}{\partial \dot{x}_a}=2\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_a \partial \dot{x}_b}=2\sum_i \frac{\partial m_{ab}}{\partial x}\dot{x}_i. \tag{2.5}$$

由式(2.5)可見, 通過速度實現的耦合並不滿足一般意義的互

易性；速度 $\dot{x}_a$、$\dot{x}_b$ 同樣的變化却和式(2.1)相反，引起力 F_a 與 F_b 的不同變化．甚至在 $m_{ab}=$ 常數的情形下，式(2.5)的右方爲零我們可得：

$$\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b}=-\frac{\partial F_b}{\partial \dot{x}_a}, \tag{2.6}$$

在這情形之下，耦合滿足反對稱的互易性質：由於速度 $\dot{x}_a$、$\dot{x}_b$ 作相同變化所引起的力 F_a 及 F_b 的變化，兩者大小相同，但符號相反．

可是，就算在這種特殊情形下，仍然與式(2.1)矛盾．因此，必須說明服從式(2.6)反對稱互易性的耦合的可能性條件，並指出這些條件如何使式(2.1)不能應用．爲此，我們從拉格蘭日函數(1.1)出發，並且假設只有位係數 s_{ik} 是常數，而慣性係數 m_{ik} 可以與系統的位形有關(只有 $m_{ab}=$ 常數是例外)．利用式(2.4)，求出：

$$\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b}=-\frac{\partial F_b}{\partial \dot{x}_a}=\sum_k\left(\frac{\partial m_{ak}}{\partial x_b}-\frac{\partial m_{bk}}{\partial x_a}\right)\dot{x}_k. \tag{2.7}$$

這個結果表明，我們所感興趣的耦合不能存在於所有慣性係數皆爲常量的系統中，這就是說，不能存在於正是瑞利經典互易定理能正確成立的那些綫性系統中．

然而，必須指出，通過速度實現的反對稱耦合可能存在於綫性動力系統中．在滿足 $\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}=$ 常量的條件下，這個耦合是綫性的．由式(2.7)可見，爲此，首先速度 v_k 必須保持恆定；其次，和系統位形有關的慣性係數必須是坐標的綫性函數，換句話說，系統的拉格蘭日函數應當包括 $g_{ik}x_k\dot{x}_i$ 形式的項，其中 g_{ik} 爲常數，並且 $g_{ik}\neq g_{ki}$．這樣的項通常稱作旋轉型項．在力學的課題中，當研究近於穩態的振動時就會碰到它．我們將通過廣義速度實現的保守性耦合稱爲旋轉型耦合．由上述可清楚地見到，經典互易定理在具有旋轉型耦合的綫性系統中遭到了破壞*)．

順便指出，穩態運動的速度可能含有一次近似可忽略小的交

*) 亥姆霍兹曾舉了下面的例子：如果企圖使旋轉軸離開鉛垂綫的力加速了推進運動，那麽，企圖加速推進運動的力將使旋轉軸趨近鉛垂綫．應該指出，旋轉型耦合在電系統中沒有對應的類比．

變成分. 這時,可將穩態運動中的微小擾動忽略而使系統的微分方程綫性化. 在以後研究機電耦合時,我們會遇到這類典型的情形.

通過廣義位移實現的耦合(稱作位耦合),滿足式(2.2)對 x 微分後得到的關係式:

$$\frac{\partial F_a}{\partial x_b}=-\frac{\partial^2 L}{\partial x_b \partial x_a}+\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial x_b \partial \dot{x}_a}$$

$$\frac{\partial F_b}{\partial x_a}=-\frac{\partial^2 L}{\partial x_a \partial x_b}+\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial x_a \partial \dot{x}_b},$$

由此

$$\frac{\partial F_a}{\partial x_b}-\frac{\partial F_b}{\partial x_a}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_b \partial \dot{x}_a}-\frac{\partial^2 L}{\partial x_a \partial \dot{x}_b}\right), \qquad (2.8a)$$

但是,由方程(2.4)可得

$$\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b}-\frac{\partial F_b}{\partial \dot{x}_a}=2\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_b \partial \dot{x}_a}-\frac{\partial^2 L}{\partial x_a \partial \dot{x}_b}\right);$$

將這式與式(2.8)比較,得出:

$$\frac{\partial F_a}{\partial x_b}-\frac{\partial F_b}{\partial x_a}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b}-\frac{\partial F_b}{\partial \dot{x}_a}\right). \qquad (2.8b)$$

我們看到,一般說來,位耦合可能不滿足一般的互易定理. 然而,如果元件 a 與 b 之間的位耦合不伴隨着旋轉型耦合, 或者,伴隨着的旋轉型耦合滿足綫性條件 $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=\text{常量}\right)$,那麽, 式(2.8)的右方爲零. 在這種情形下(最經常碰到的):

$$\frac{\partial F_a}{\partial x_b}=\frac{\partial F_b}{\partial x_a}, \qquad (2.9)$$

而我們就有位耦合的對稱互易定理. 在機械系統中的彈性耦合,以及在電系統中的電容耦合就是這種情形.

這裏所敍述的一些見解表明, 作爲經典互易原理的基礎就是決定加速度耦合以及位耦合對稱互易性質的條件. 如果動力系統爲綫性, 則偏導數 $\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}$ 及 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 是常數;這時形如:

$$\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{x}_k}=\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{x}_i}, \qquad \frac{\partial F_i}{\partial x_k}=\frac{\partial F_k}{\partial x_i}$$

的互易關係，在穩態時 $\left(\ddot{x}=j\omega\dot{x},\ x=\frac{\dot{x}}{j\omega}\right)$ 可以導致式(2.1)的形式

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_k}=\frac{\partial F_k}{\partial \dot{x}_i}$$

(當然，這是在旋轉型耦合不存在的條件下)． 有耗耦合的存在並不破壞互易性，這是因爲允許用耗散函數*) $D(\dot{x}_i, \dot{x}_k)$ 來表示的耗散力 f 滿足對稱關係：

$$\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_k}=-\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_i}=\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_i}. \qquad (2.10)$$

還要指出，但不打算詳細地討論，亥姆霍茲曾作出了下面極有意義的結論：如果在動力系統中呈現的耦合滿足互易性質的一般關係式(2.3)，式(2.5)及式(2.8)，則可以斷言：動力位 $L(x\dot{x})$ 存在；並且，系統的方程可導致第二類拉格蘭日方程的形式．

§ 3. 聲系統中的互易性質

在§1裏，已經證明了有限個自由度的綫性系統中的互易定理． 然而，在許多情形下，我們要牽涉到包含矢量場的動力系統，這些場用偏微分方程描述．例如：兩個系統通過介質而相互耦合，就是這樣的情形，在介質中由於輻射而建立起聲場． 在這樣的系統中，互易定理具有不同的形式；在應用於包含聲場的聲系統時，我們要引用它們．

當介質質點在靠近其平衡位置作微小的無漩渦運動的情形下，歐拉方程爲：

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p=\boldsymbol{f}, \qquad (3.1a)$$

式中，$\boldsymbol{v}$——質點速度，p——聲壓，ρ——介質密度，$\boldsymbol{f}$——單位質量的外力．對於小振幅振動的連續性方程爲：

*) 在一般情形下，耗散係數可能依賴於系統的位形．利用統計物理學方法確立的耗散函數存在條件，看來具有相當的一般性；在小的週期運動時，甚至在具有不可逆的熱擴散、熱磁及熱電等現象時，總認爲這些條件是可行的． 由動力係數對稱原理可以得出結論：耗散函數的係數是滿足相互置換關係的．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

引入縱波速度,它用下面方程表示:

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho},$$

將連續性方程改寫成

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{3.2a}$$

設現在給出另一外力系統 $\boldsymbol{f}'$,在同一介質中,與它相應的速度爲 $\boldsymbol{v}'$,聲壓爲 p'.這第二系統滿足方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p' = \boldsymbol{f}', \tag{3.1b}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}' = -\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p'}{\partial t}. \tag{3.2b}$$

將 $\boldsymbol{v}'$ 與式(3.1a), $\boldsymbol{v}$ 與式(3.1b)無向量相乘,並由第一式減去第二式,得到:

$$\boldsymbol{f}\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{f}'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \boldsymbol{v} \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{v}' \operatorname{grad} p - \boldsymbol{v} \operatorname{grad} p') =$$

$$= \boldsymbol{v}' \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \boldsymbol{v} \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho} [\operatorname{div}(p\boldsymbol{v}') - \operatorname{div}(p'\boldsymbol{v}) - p \operatorname{div}\boldsymbol{v}' + p' \operatorname{div}\boldsymbol{v}],$$

或者,計及式(3.2),

$$\boldsymbol{f}\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{f}'\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(p\boldsymbol{v}' - p'\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}' \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \boldsymbol{v} \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} +$$

$$+ \frac{1}{(\rho c)^2} \left(p \frac{\partial p'}{\partial t} + p' \frac{\partial p}{\partial t} \right).$$

在穩定狀態下,所有變量均隨時間作 $e^{j\omega t}$ 變化,由此可得:

$$\boldsymbol{f}\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{f}'\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (p\boldsymbol{v}' - p'\boldsymbol{v}).$$

沿表面 S 所圍的區域 τ 積分,並對於右方應用高斯定理*) 就

---

*) 對於包含電磁場的分佈的電系統,也可以得出類似式(3.3)的定理;根據麥克斯韋方程,可以證明,在穩態時

$$\int_\tau (\boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{j}' - \boldsymbol{E}'_0 \boldsymbol{j}) d\tau = \int_S ([\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}'] - [\boldsymbol{E}'\boldsymbol{H}])_n dS.$$

式中,$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{E}'_0$ 爲外加力總和(單位電荷上的力),$\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}'$ 是這些力所產生的全電流密度,$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{E}'$ 及 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{H}'$ 分別是電場及磁場的強度.