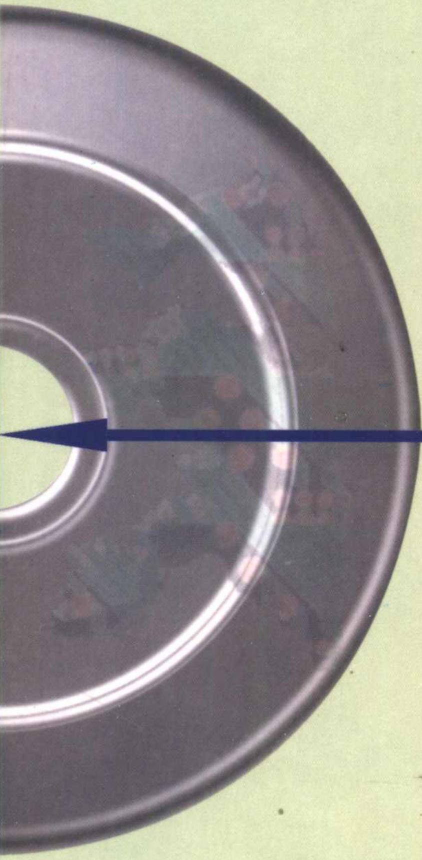
全国高等教育自学考试应试指导丛书

中国计算机函授学院图书编写中心 组编



高等数学（工专）自考应试指导

主 编 潘 杰

副主编 唐 烁

南京大学出版社

37

O13
P186

中国计算机函授学院图书编写中心　组编

全国高等教育自学考试应试指导丛书

公共课程

高等数学(工专)自考应试指导

主　编　潘　杰
副主编　唐　烁

南　京　大　学　出　版　社

内容简介

本书是按《高等数学课程自学考试大纲(工专)》的要求编写的.

本书针对自学考试的特点,结合近年来高等数学自考试题的要点与侧重方向,完全与高等数学自学考试接轨.它以典型考题的分析、解答和总结为主,内容力求精炼,叙述较为详细,文字通俗易懂.

本书对《高等数学》教材中的一些疑难习题和重点习题给出了详细的解答,并在书后给出了两套模拟试卷,以供读者分析与自测.

本书可作为自学考试的辅导教材,也可作为函授大学、电视大学、职工大学以及全日制专科学生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(工专)自考应试指导/潘杰主编.—南京:南京大学出版社,2001.2

(全国高等教育自学考试应试指导丛书)

INBS 7-305-02143-1

Ⅰ.高... Ⅱ.潘... Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 01975 号

书　　名　高等数学(工专)自考应试指导

主　　编　潘　杰　副主编　唐　烁

丛书主编　牛允鹏　胡学联

责任编辑　王　勇

出版发行　南京大学出版社

地　　址　南京汉口路 22 号　邮编　210093　电话　025-3593695

印　　刷　合肥学苑印刷厂

经　　销　全国各地新华书店

开　　本　787×1092　1/16　印张　23　字数　560 千

版　　次　2001 年 1 月第 1 版　2001 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7-305-02143-1/O·258

定　　价　29.00 元

组编前言

国家教育部考试中心决定,从2000年开始全国高等教育自学考试正式使用新编的大纲和教材.

为适应新调整的考试计划及密切配合新大纲新教材开展助学辅导,中国计算机函授学院利用多年积累的自考教学辅导资源和经验,全面系统地剖析了有关各门课程新大纲和教材的内容体系,重新组织编写了一套"全国高等教育自学考试应试指导"丛书,推向全国,以满足考生之急需,适应社会之需要.

这套丛书堪称"通关必读",丛书的作者都在书中融入了自己多年从事自考教学辅导的直接经验,他们既是本专业的教授,又是自考辅导的专家,二者集于一身,使该套丛书极具实用性和针对性.他们精心组织、细心筹划、用心编撰,从而确保该套丛书质量上乘.

编写该套丛书的指导思想是,切实解决考生自学应试中的三个问题:

(1)在自学过程中起到答疑解惑作用,帮助考生顺利阅读、掌握教材内容;

(2)帮助考生抓住课程重点、难点,不入迷津;

(3)帮助考生理清课程主线,建立清晰的知识结构体系,在掌握知识点的前提下,沉着应战,顺利过关.

对于广大应试者而言,请一位好"教师",找一位好"辅导",尤为重要.这套"自学考试指导"丛书,可望成为你攻克一门又一门课程、克服一个又一个难关的良师益友,帮助你扫清学习中的障碍,增强你的必胜信心,伴随你走向成功的彼岸.

我们真诚地为广大考生奉献这份精品、真品.愿广大考生早成夙愿.

2000年1月

编 者 的 话

高等数学是工科类自学考试中一门重要的基础课和必修课.为了帮助考生更好地掌握高等数学知识,顺利地通过"过关"考试,我们在总结多年教学实践经验的基础上,精心编写了这本辅导教材.

本书以《高等数学课程自学考试大纲(工专)》为依据,密切联系《高等数学》自考教材,并充分考虑到自学考试的特点;对考生在学习、应考过程中应掌握的基本知识及所遇到的疑难问题,通过典型例题进行详细地分析与解答,并针对近年来自考试题的要点与侧重方向进行了系统地总结.对于一些容易混淆的概念、应掌握的基本理论与技巧及考生在学习过程中需要特别引起注意的问题,采用"提个醒"的方式予以重点提示.每道选择题,都给出了答案取舍的详细说明或论证.而对于一些有代表性的例题,尽量给出多种解法,以利于考生开阔视野,扩大知识面.

全书由两部分组成,第一部分为内容概要与典型题解,第二部分为两套模拟试卷及其解答.

第一部分共十一章,内容包括函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,空间解析几何,多元函数微积分学,常微分方程和无穷级数.各章由以下三部分组成:

一、内容概要

按《高等数学课程自学考试大纲(工专)》的要求及《高等数学》教材的顺序列出每章中的主要概念、定义、性质、定理、公式等基本内容.

二、常见考题分析与解答

这是每章的重点.在这一部分中选择大量的有代表性的典型例题,由浅入深,由易到难.通过剖析解题思路,总结归纳解题方法,给出详细的解答或论证,以使考生更好地掌握基本概念、基本理论和基本方法,同时提高运算水平.从而培养考生的自学能力和分析问题、解决问题的能力.

三、本章疑难习题解答

针对《高等数学》教材中出现的一些疑难习题(包括自我检测题)给出了较为详细的解答、论证或提示.这些习题中的题型也是自考试卷中的常见题型.

在本书的第二部分,给出了两套模拟试卷,供读者自测,让读者复习、巩固所学知识、检查学习效果.

限于编者水平及时间仓促,书中不妥和错误之处在所难免,敬请广大读者批评指正.

作者

2000 年 6 月

目　录

第一部分

内容概要与典型题解

在这一部分中，以考试大纲规定的考核知识点为纲，以最简捷的文字简明扼要地阐述了各知识点的基本概念、原理和方法，并围绕相关知识点组织了大量典型例题，以增强读者对概念的理解和提高解题能力.

读者可将这部分内容作为复习提纲来使用，它针对性强，能帮助考生从繁杂的内容中理清头绪，从而在复习迎考冲刺阶段做到事半功倍.

第1章 函 数

初等函数研究的对象基本上是不变的量，而高等数学主要以变量为研究对象．函数的概念是在变量概念基础上建立起来的，它是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分的基础．本章重点是函数的概念以及与此有关的一些基本知识，本章难点是复合函数的概念．

1.1 内容概要

1. 区间

在高等数学中常见的区间如下表：

区间	不等式表示	含 义
$(-\infty,+\infty)$	$-\infty<x<+\infty$	全体实数
$(a,+\infty)$	$a<x<+\infty$	大于 a 的全体实数
(a,b)	$a<x<b$	大于 a 小于 b 的全体实数(开区间)
$[a,b]$	$a\leqslant x\leqslant b$	大于或等于 a 但小于或等于 b 的全体实数(闭区间)

此外，还有 $[a,b)$，$(a,b]$，$(-\infty,b]$ 等，其含义请读者自行讨论．

2. 邻区

以 x_0 为中心，ε 为半径的 x_0 的 ε 邻区是区间 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 内一切点所组成的集合，它可以记为 $\{x\mid x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon\}$．

以 x_0 为中心，ε 为半径的 x_0 的去心 ε 邻区是集合 $\{x\mid x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon,x\neq x_0\}$．

3. 常量、变量、函数

观察某自然现象或实际问题过程中，某些量可以取不同的数值，这些量称之为变量；而另一些量保持一定的值(不变的)，或其变化对所观察的问题而言可以忽略，则称之为常量．

设有两个变量 x 与 y．当变量 x 在给定的某一个变域 I 中取任意一个值时，另一个变量 y 就按某一确定的法则有一个确定值与 x 的这个值相对应，那么变量 y 称为变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，f 为其对应法则，I 称为函数的定义域．

4. 函数的表示法

函数的表示法通常有三种，分别是解析法、图示法和表格法．在高等数学中用得较多的

是解析法,但在实际问题中往往把三者结合起来,做到互相取长补短.

5. 自变量的增量与函数的增量

对于函数 $y = f(x)$,当自变量 x 从 x_0 变到 x_1 时,相应的因变量 y 从 y_0 变到 y_1,则称 $x_1 - x_0$ 为自变量 x 的增量,记作 $\Delta x = x_1 - x_0$;而称 $y_1 - y_0$ 为因变量 y 的增量,记作 $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$. 由 $\Delta x = x_1 - x_0$ 得 $x_1 = x_0 + \Delta x$,因变量的增量又可表示为 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

6. 函数的简单性态

(1) 单调性

设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 内,如果对于 I 内任何两个值 x_1 和 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,总有不等式

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或} f(x_1) > f(x_2))$$

成立,则称 $f(x)$ 在 I 内单调增(或单调减).

单调增与单调减统称为单调,并称 I 为 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 定义在对称区间 $(-l, l)$ 内(l 也可以是无限的),若有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内是偶函数;若有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内是奇函数.

(3) 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 有定义,若存在一个正数 M,使对一切 $x \in I$,都有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间 I 有界. 否则,称 $f(x)$ 在区间 I 无界.

(4) 周期性

函数 $y = f(x)$,若存在一个正数 a,使对于属于 $f(x)$ 的定义域 I 内的任意 x,只要 $x + a \in I$,总有 $f(x + a) = f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 是以 a 为周期的周期函数.

7. 反函数

设有直接函数 $y = f(x)$,如果变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时,变量 x 在函数的定义域内必有一个值 x_0 与之对应,即 $f(x_0) = y_0$,则称变量 x 是变量 y 的函数,记为 $x = \varphi(y)$,它称为 $y = f(x)$ 的反函数.

习惯上,$y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 也记为 $y = \varphi(x)$. 直接函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = \varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的.

8. 复合函数

设 $y = f(u)$,而 $u = \varphi(x)$,且当 x 在某一区间 I 取值时,相应的 u 值可使 $f(u)$ 有定义,则称 y 是 x 的定义在区间 I 的复合函数,记作

$$y = f[\varphi(x)].$$

9. 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 由基本初等

函数和常数经有限次的四则运算及有限次的函数复合所产生,并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

1.2 常见考题分析与解答

1 设函数 $f(x) = x^2 + 3x + 4$,求下列函数值:

$$f(2),\quad f\left(\frac{1}{a}\right),\quad f(x_0),\quad f(x_0+h),\quad f(x+1).$$

【分析】$f(\quad)$ 表示了函数关系中的对应规则,而 $f(x)$ 就是指这个规则作用在 x 上.在此处,$f(\quad)$ 是指 $f(\quad) = (\quad)^2 + 3(\quad) + 4$,而 $f(x)$ 就是将 x 放到括号( )中,x 是什么,括号内就放什么.

【解】$f(2) = (2)^2 + 3\times(2) + 4 = 16$;

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + 3\times\left(\frac{1}{a}\right) + 4 = \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a} + 4;$$

$$f(x_0) = (x_0)^2 + 3\times(x_0) + 4 = x_0^2 + 3x_0 + 4;$$

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= (x_0+h)^2 + 3\times(x_0+h) + 4 \\ &= x_0^2 + (2h+3)x_0 + h^2 + 3h + 4; \end{aligned}$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 + 3\times(x+1) + 4 = x^2 + 5x + 8.$$

提个醒

按函数的定义,我们以 $y = f(x)$ 表示因变量 y 是自变量 x 的函数.但是实际上常常仅以 $f(x)$ 表示函数,如正弦函数 $\sin x$、对数函数 $\log_a x$ 等,不要误认为这里仅有自变量 x 而无因变量 y 就不是一个函数.事实上它也有两个变量,一个是 x,另一个是 $f(x)$.对于变量 x 所考虑的每一个值,变量 $f(x)$ 就有一个确定的值与之对应,$f(x)$ 是 x 的函数.这里 $f(x)$ 扮演了 y 的角色,只不过没有写为 $y = f(x)$ 罢了.

2 求下列函数的定义域:

(1)$y = \arcsin\dfrac{2x-1}{7}$; (2)$y = \ln(x-1) + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

【分析】为了确定这种用解析式所表达的函数的定义域,应使这些解析式有意义,由此即可确定自变量 x 的变化范围,即函数的定义域.

【解】(1) 当 $-1 \leqslant \dfrac{2x-1}{7} \leqslant 1$ 时函数有意义,解此不等式,得 $-3 \leqslant x \leqslant 4$,即函数的定义域为$[-3,4]$.

(2) 当 $\ln(x-1)$ 与 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 同时有意义时函数才有意义,而这就要求自变量 x 满足下列不等式组

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

由此解得 $x > 1$,即函数的定义域为$(1, +\infty)$.

☞ 提个醒

函数的表示法通常有三种,即解析法、图示法和表格法.我们这里的解析法只是其中的一种,确定它们的定义域的一般原则是:

1) 定义域是使得表达式有意义的一切 x.我们此处即用此法.

2) 实际问题由实际意义确定.如 $y = \pi x^2$,作为一般函数,其定义域为$(-\infty, +\infty)$.若 y 表示圆的面积,x 表示圆的半径,则该函数的定义域为$(0, +\infty)$.

3) 人为规定函数的定义域.如 $f(x) = x^2, x \in [-1,1]$,其自变量 x 仅在闭区间$[-1,1]$上变化,此时若求 $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处的函数值是毫无意义的.

3 函数 $f(x)$ 满足什么条件,下列表达式才有意义?

(1)$y = \dfrac{1}{f(x)}$;　　(2)$y = \sqrt[4]{f(x)}$;

(3)$y = \arcsin f(x)$;　　(4)$y = \log_a f(x)$.

【分析】上述四个复合函数都是由基本初等函数与函数 $f(x)$ 复合而成的.为使相应的复合函数有意义,必须使 $f(x)$ 的值域落在与之相复合的基本初等函数的定义域内.

【解】(1)$f(x) \neq 0$;　(2)$f(x) \geqslant 0$;　(3) $|f(x)| \leqslant 1$;　(4)$f(x) > 0$.

4 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,求下列复合函数的定义域:

(1)$f(x^2)$;　　(2)$f(x+a)$;

(3)$f(\sin x)$;　　(4)$f(x+a)+f(x-a), a > 0$.

【分析】在复合函数$f[\varphi(x)]$中,$\varphi(x)$ 的值域应含在函数 $f(u)$ 的定义域中.因为 $f(u)$ 的定义域是$[0,1]$,所以 $\varphi(x)$ 的值域不应超出区间$[0,1]$的范围,即 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$,由此解出 x 的变化范围即是复合函数$f[\varphi(x)]$的定义域.

【解】(1) 因为在 $f(x)$ 中有 $0 \leqslant x \leqslant 1$,所以在 $f(x^2)$ 中应有 $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$,即 $|x| < 1$,从而 $f(x^2)$ 的定义域为$[-1,1]$;

(2) 在 $f(x+a)$ 中应有 $0 \leqslant x + a \leqslant 1$,即 $-a \leqslant x \leqslant 1 - a$,从而 $f(x+a)$ 的定义域为$[-a, 1-a]$;

(3) 在 $f(\sin x)$ 中应有 $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$,即 $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,此即为 $f(\sin x)$ 的定义域.

(4) 在 $f(x+a)+f(x-a)$ 中应有

$$\begin{cases} 0 \leqslant x + a \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x - a \leqslant 1, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} -a \leqslant x \leqslant 1 - a, \\ a \leqslant x \leqslant 1 + a. \end{cases}$$

若 $1 - a < a$,即 $a > \dfrac{1}{2}$,函数无定义;

若 $1-a=a$，即 $a=\frac{1}{2}$，函数的定义域是 $x=\frac{1}{2}$ 这一点；

若 $1-a>a$，即 $0<a<\frac{1}{2}$，函数的定义域是 $[a,1-a]$.

5 判别下列各对函数是否相同：

(1) $f(x)=\frac{x}{x}, g(x)=1$;

(2) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$;

(3) $f(x)=\frac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1), g(x)=\arcsin x+\arccos x$;

(4) $f(x)=\sin x, g(t)=\sin t$;

(5) $f(x)=x^2, x\in[0,1], g(x)=x^2, x\in[2,3]$.

【分析】函数的概念要抓住三点：定义域、对应法则和值域，三者都相同时两个函数才相同. 三者中前两者是主要的，如果函数的定义域和对应法则确定了，它的值域也就随之确定了.

【解】(1) 不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 当除去点 $x=0$ 时，即在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 内考虑问题时它们相同；

(2) 不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. 当只考虑 $x>0$ 时它们相同；

(3) 相同. 因为 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，它们的定义域和对应法则都是相同的.

(4) 相同. 在用解析式表达函数时，函数的定义与其自变量及因变量所用字母无关. 此处两个函数 $f(x)$ 和 $g(t)$ 的自变量及因变量的字母虽然不同，但是它们的定义域和对应法则都是相同的，按函数的定义，应视它们为同一函数；

(5) 不相同. $f(x)$ 与 $g(x)$ 虽然有相同的表达式，但是它们的定义域不同，这是两个不同的函数，不要只看到它们的表达式相同就认为它们是同一函数.

6 函数 $y=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ 与函数 $y=x-2$(　)

A) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内相同.

B) 仅在 $(1,+\infty)$ 内相同.

C) 仅在 $(-\infty,1)$ 内相同.

D) 在 $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ 内相同.

【分析】因为函数 $y=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，它在点 $x=1$ 处无定义，而函数 $y=x-2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它们的定义域不同，故不能选 A. 尤其要注意：函数 $y=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处无定义，千万不能在其分子和分母中消去因子 $x-1$ 而误认为它与 $y=x-2$ 是同一函数. 这是因为，当 $x=1$ 时，$x-1=0$，在 $\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ 中分子和分母同除以零是无意义的. 又因为 $y=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ 与 $y=x-2$ 不仅在区间 $(1,+\infty)$ 内相同，它们在 $(-\infty,1)$ 内也是相同的，故不能选 B. 同理也不能选 C，从而只能选 D.

【答】D).

7 设$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求$f(x)$.

【分析】函数$y=f\left(x+\frac{1}{x}\right)$是由$y=f(u)$与$u=x+\frac{1}{x}$复合而成的.注意到函数的概念与其变量所用字母无关,为了求$f(x)$或$f(u)$的表达式,只须在表达式$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$中将$x+\frac{1}{x}$换为一个字母表示即可.

【解】解法一:令$x+\frac{1}{x}=u$,则$x=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}$.以此替换$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$中的$x$,得$f(u)=u^2-2$,由此知$f(x)=x^2-2$.

解法二:因为$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,所以$f(u)=u^2-2$,即$f(x)=x^2-2$.

8 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\leqslant 1,\\ x+5, & x>1,\end{cases}$$

求$f(0),f(1),f(2),f(a)$.

【分析】这是分段表示的函数,x处在不同的区间上时,$f(x)$的表达式也不同,要注意x的位置.

【解】因为$x=0<1$,所以$f(0)=0^2+0+1=1$.类似地,$f(1)=1^2+1+1=3$.又因为$x=2>1$,所以$f(2)=2+5=7$.

计算$f(a)$时要分两种情况:当$a\leqslant 1$时,$f(a)=a^2+a+1$;当$a>1$时,$f(a)=a+5$.

☞ 提个醒

对于这种在自变量的不同的变化范围内有不同的表达式的函数,千万不要误认为它是两个不同的函数.在确定这种函数在某点的函数值时,要观察该点在函数表达式中的自变量在哪个变化范围之内,再将该点代入函数的相应表达式中.在本例中,也不能将$x=a$同时代入两个表达式,即下列结果是错误的:

$$f(a)=\begin{cases}a^2+a+1,\\ a+5.\end{cases}$$

9 设$f(x)=x^2,g(x)=3^x$,求$f[f(x)],f[g(x)],g[f(x)]$.

【分析】在求两个函数的复合函数时,如$f[g(x)]$,可将$f(x)$的表达式中的x换为$g(x)$,再将$g(x)$的表达式代入即可.也可直接将$f(x)$的表达式中的x换为$g(x)$的表达式.

【解】$f[f(x)]=[f(x)]^2=[x^2]^2=x^4$,

$f[g(x)]=[g(x)]^2=[3^x]^2=3^{2x}$,

$g[f(x)]=3^{f(x)}=3^{x^2}$.

☞ 提个醒

在本例中，两个函数的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，因此在构造这些复合函数时都没有考虑各函数的值域而直接给出了复合结果.在一般情形下，并不是任意两个函数都能构成复合函数的.如构造复合函数$f[g(x)]$时，应使$g(x)$的值域全部或部分落在$f(x)$的定义域内，否则，$f[g(x)]$是没有意义的.

10 指出下列各函数的复合或分解过程：

(1)$y=u^2, u=\sin v, v=\ln x$;

(2)$y=\arcsin e^{x^2}$;

(3)$y=\ln\sqrt{1-\cos x}$.

【解】(1)$y=u^2=(\sin v)^2=\sin^2\ln x$;

(2)$y=\arcsin e^{x^2}$由反正弦函数$y=\arcsin u$，指数函数$u=e^v$和幂函数$v=x^2$复合而成.

(3)$y=\ln\sqrt{1-\cos x}$由对数函数$y=\ln u$，幂函数$u=\sqrt{v}$，多项式函数$v=1-w$和余弦函数$w=\cos x$复合而成.

☞ 提个醒

正确分析一个复合函数怎样由基本初等函数复合而成，这在微积分学习过程中是非常重要的，必须熟练掌握.后几章计算函数的导数和积分过程中经常需要用到这些知识.

11 函数$y=f(x)$的增量Δy(　　)

A) 一定大于零.　　B) 一定小于零.

C) 一定不大于零.　　D) 不一定大于零.

【分析】函数的增量$\Delta y=y_1-y_0$是两个函数值之差，它也称为函数的改变量.对于一般的函数，我们既不能断言$\Delta y>0$，也不能断言$\Delta y<0$，甚至有时也会出现$\Delta y=0$的情形，只有具体给定函数以后才能确定Δy的符号.

【答】D).

☞ 提个醒

自变量的增量$\Delta x=x_1-x_0$，它既可以大于零，也可以小于零.但在一般情形下我们多认为$\Delta x\neq 0$，特殊情形除外.

12 证明$f(x)=1-\ln x$是单调减函数.

【分析】根据函数单调的定义，要证明$f(x)$单调减，只须证明：对于$f(x)$定义域内的任何x_1，

x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) > f(x_2)$ 即可.

【证】$f(x) = 1 - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$，有

$$f(x_1) - f(x_2) = (1 - \ln x_1) - (1 - \ln x_2) = \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

因为 $x_1 < x_2$，$\frac{x_2}{x_1} > 1$，$\ln \frac{x_2}{x_1} > 0$，所以 $f(x_1) > f(x_2)$. 故 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调减.

提个醒

上述函数在其定义区间内是处处单调减少的. 但是也有某些函数在其定义域的某子区间内是单调减少的，而在另一部分区间内是单调增加的. 如函数 $f(x) = x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，该函数在 $(-\infty, 0)$ 内单调减，而在 $(0, +\infty)$ 内单调增.

一般来说，如何判断函数的单调性是比较困难的，尤其是对于一些较复杂的函数更是如此. 在第三、四章中用导数来判别函数的单调性，比我们此处所用方法要方便得多. 我们仅要求对于本题这种证明方法作简单的了解，判断较复杂的函数的单调性问题留待第三、四章用求导的方法来解决.

13 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$；

(2) $y = x \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ $(a > 0)$；

(3) $y = x^2 + \sin x$.

【解】(1) 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1} \\ &= \ln \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

所以 $y = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数.

(2) 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x) \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = -x \frac{1 - a^x}{1 + a^x} \\ &= x \frac{a^x - 1}{a^x + 1} = f(x), \end{aligned}$$

所以 $y = f(x) = x \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ 是偶函数.

(3) 由于 $f(-x) = (-x)^2 + \sin(-x) = x^2 - \sin x$，它既不满足条件 $f(-x) = -f(x)$，

也不满足条件 $f(-x) = f(x)$，所以 $f(x) = x^2 + \sin x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

☞ 提个醒

讨论函数的奇偶性都是关于对称区间而言的. 函数 $y = \sqrt{1-x}$ 的定义域为 $(-\infty, 1]$，该区间并不是实数轴上关于原点对称的区间，所以谈及 $y = \sqrt{1-x}$ 的奇偶性问题是毫无意义的. 尤其需要注意，对于函数 $y = x^2, x \in (0, +\infty)$，它仅在正实轴上有定义，其奇偶性无从谈起.

除了用定义判断函数的奇偶性外，还常用下列性质判别：

1) 两个偶函数之和（或差）是偶函数，两个奇函数之和（或差）是奇函数；

2) 两个偶函数之积（或商，分母不为零）是偶函数，两个奇函数之积（或商，分母不为零）是偶函数，偶函数与奇函数之积（或商，分母不为零）是奇函数.

14 判断下列函数在所给的定义域内是否有界：

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \in [2,5]$；

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \in (0,1)$；

(3) $f(x) = \arctan x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$.

【分析】 判断某个函数 $f(x)$ 是否有界，关键问题就是能否找到一个常数 $M > 0$，使得对于 $f(x)$ 定义域内的一切 x，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立. 函数的有界性是与函数的解析表达式的特征以及定义域密切相关的.

【解】 (1) 对于任何 $x \in [2,5]$，总有 $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 在区间 $[2,5]$ 上有界；

(2) 对于无论怎样大的正数 M，总有 $x \in (0,1)$，例如 $x = \dfrac{1}{2M}$，它使得 $f\left(\dfrac{1}{2M}\right) = 2M > M$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界；

(3) 对于任何 $x \in (-\infty, +\infty)$，总有 $|f(x)| = |\arctan x| < \dfrac{\pi}{2}$，所以 $f(x) = \arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

☞ 提个醒

有界性是函数的重要性质之一. 所谓函数有界，是指函数可以界定在一个范围之内，如 $|f(x)| \leqslant M$. 从函数的图形上来看，就是 $f(x)$ 的图形一定落在两条直线 $y = -M$ 与 $y = M$ 之间. 函数 $f(x)$ 的界 M 并不一定要求 $f(x)$ 必须达到，如函数 $f(x) = \sin x$，有 $|\sin x| \leqslant 1$，但是如果取 $M = 2$ 为其界，也有 $|\sin x| < 2$. 大于 1 的任何实数都可作为 $f(x) = \sin x$ 的界. 在判断某函数 $f(x)$ 是否有界时，只要能找到一个 M，使得 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，即可说明 $f(x)$ 是有界函数，M 并不是唯一的.