

初等数学习题汇编

—代数—



新 蕾 出 版 社

初等数学习题汇编

一代 数一

〔苏〕П.С. 莫坚诺夫 著

周概容 译

萧慧敏 校

新 蕾 出 版 社

初等数学习题汇编

—代 数—

〔苏〕П·С·莫坚诺夫 著

周概容 译

萧慧敏 校

★

新 蕾 出 版 社 出 版

天津新华印刷一厂印刷

天津市新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32 印张20 5/8 字数：454,000

1980年11月第1版 1980年11月第1次印刷

印数：1—50,000

统一书号：R13213·4 定价：1.64元

内 容 简 介

本习题汇编分为三册：代数（第1—16章），几何（第一篇，平面几何：第17—22章；第二篇，立体几何：第23—27章），三角（第28—31章）。全书共有习题近10000个，每册备有相应习题的解答。

本书内容丰富而系统，适合中学数学教师、师范院校数学专业学生、高中学生以及数学爱好者参考使用。

中译本序

学习数学必须做一定的练习。通过练习，才能较好地掌握所学的知识和方法，才能逐步把书本的东西化为自己头脑里的东西。这是人所共知的道理。

学生之间的差异是客观存在的。有些学生对数学有较浓厚的兴趣，不满足于只做课本上的习题，又有时间和精力做更多更难的习题，这种愿望是好的。这部习题汇编中译本的出版，希望能对这些学生有所帮助。有些业余的数学爱好者，也可以利用它来提高自学水平。对于中学数学教师，本书也是一部较好的参考书。

我们鼓励青年们做一定数量的综合题，这有助于他们融会贯通数学中各分科的内容和方法，以及在以后工作中解决实际问题。

我们说学数学要做练习，决不是说做得越多越好。做多少才适当，这是因人而异的。有人立志要以数学为自己的专业（这总是少数），有的人只是要以数学为钻研其它学科的工具；有的人做少量典型的题，就能举一反三，有的人要多做几个才能达到同样目的；有的人要求掌握更多的技巧，有的人没有这种要求。因此不能划一要求，每人要根据自己的情况来确定选做多少，选做哪些才适当。

做数学练习要求运算熟练而准确，逻辑严密而简明，作图正确而整洁。达到这些要求是要有个过程的。我们希望有

志于学好数学的青少年以严肃的科学态度来对待练习的写作，一丝不苟，错了就改，发现更好的方法就重写（只要有时间），精益求精。好的练习应有简明扼要的文字说明，使人一看就懂，不费猜测。科学态度和逻辑表达能力都是一切科学工作者应当具备的品质。

吴 大 任

1979年6月于南开大学

翻 译 说 明

这部习题汇编是根据〔苏〕П·С·莫坚诺夫著《初等数学专门教程习题汇编》第二版翻译而成的。中译本分为三册：

《代数》：第一——第十六章；

《几何》：第十七——第二十七章；

《三角》：第二十八——第三十一章。

每册中包括相应的习题解答。全书共编进各科习题近10000个。习题解答包括提示、题解和答案三种形式。有的章节附有简短的说明和例题。在编写这部习题汇编时，原作者参阅了国内外的大量文献，吸收了法国、英国、德国、意大利、波兰、美国、葡萄牙、西班牙、瑞士和中国等一系列国家的初等数学学习题。这部习题汇编内容丰富而系统，适合中学数学教师，师范院校数学专业学生以及有一定基础的中学学生和数学爱好者参考使用。

全部习题根据内容划分章节。代数和三角的内容分别与С·Н·诺涅塞洛夫著《初等代数专门教程》（赵慈庚等译《人民教育出版社》）和《三角学专门教程》（郑星华等译《人民教育出版社》）完全一致。几何部分的有关内容可参阅梁绍鸿编《初等数学复习及研究》（平面几何）和朱德祥编《初等数学复习及研究》（立体几何）（《人民教育出版社》）。

在翻译过程中，除代数习题增加了《复数》一章（第十五章）之外，保留了原著的章节顺序和内容。另外，还参照（俄文版）

沙赫诺《高难度初等数学习题集》，

列曼《莫斯科数学竞赛题集》，

雅格洛姆《非初等问题的初等解法》。

莫坚诺夫、诺渥塞洛夫《投考高校数学参考书》等书，调整了少量习题，选择了一些新题，增补了部分题解。

考虑到部分读者的情况，译者对一些不常见的概念和性质作了注释和说明。在翻译的过程中改正了原书中的一些贻误之处。

吴大任教授、胡国定教授对我们的工作始终关心和鼓励。吴大任教授为本书写了“中译本序”。王大璠同志和袁著社等同志对本书的翻译工作始终给予很大支持。周学光教授，赵殿兴先生和侯自新同志分别审阅了代数，几何和三角部分的译稿，并提了不少宝贵意见。在此，我们对以上同志深表谢意。

由于我们水平所限，译文中定有不少不妥之处，恳请读者批评指正。

译 者

目 录

第一章 多项式的恒等变换	1 (297)
§ 1. 多项式的恒等变换	1 (297)
§ 2. 多项式间的条件恒等式	5 (298)
§ 3. 对称多项式	9 (300)
§ 4. 多项式的可约性	9 (305)
§ 5. 因式分解	14 (307)
§ 6. 多项式的杂题	18 (313)
第二章 代数分式	21 (317)
§ 1. 代数分式的恒等变换	21 (317)
§ 2. 条件恒等式	27 (318)
第三章 根式和无理式	32 (319)
§ 1. 无理式的恒等变换	32 (319)
§ 2. 条件恒等式, 带无理式的等式变换	38 (321)
第四章 方程和不等式的一般性质	40 (323)
§ 1. 方程的同解性	40 (323)
§ 2. 证明不等式	49 (331)
§ 3. 不等式的同解性和混合组的同解性	62 (339)
第五章 线性方程和线性不等式	67 (341)
§ 1. 线性方程组	67 (341)
§ 2. 带参数的线性方程组	69 (343)
§ 3. 线性不等式	77 (361)

§ 4. 列线性方程	80(361)
I°. 列一元线性方程	80(361)
II°. 列多元线性方程组	86(363)

第六章 高次方程和高次不等式

§ 1. 二次三项式	100 (368)
§ 2. 一元有理整函数的根	110 (388)
§ 3. 一元有理方程	117 (400)
§ 4. 带参数的一元有理方程	120 (402)
§ 5. 二元有理方程组	128 (418)
§ 6. 带参数的二元有理方程组	132 (424)
§ 7. 多元有理方程组	134 (436)
§ 8. 带参数的多元有理方程组	140 (448)
§ 9. 解有理不等式	144 (466)
§ 10. 一元无理方程	147 (468)
§ 11. 带参数的一元无理方程	151 (480)
§ 12. 含无理方程的方程组	154 (499)
§ 13. 含有带参数的无理方程的方程组	158 (511)
§ 14. 无理不等式	160 (526)
§ 15. 列非线性方程	162 (536)
I°. 列一元二次方程	162 (536)
II°. 列一元非线性方程	167 (538)
III°. 列非线性方程组	169 (539)
§ 16. 列不等式	181 (542)
I°. 列一元二次不等式	181 (542)
II°. 列非线性不等式	183 (543)

第七章 实数域上的指数函数和对数函数

§ 1. 含有指数函数和对数函数的各种等式的证明	185 (545)
§ 2. 一元对数方程和指数方程	187 (546)

§ 3. 对数方程和指数方程组	192 (550)
§ 4. 解含有指数函数和对数函数的不等式	197 (555)
第八章 初等函数的研究	200 (559)
§ 1. 定义域	200 (559)
§ 2. 增, 减, 上凸和下凸	201 (561)
§ 3. 最大值和最小值	207 (570)
第九章 数列	209 (576)
§ 1. 等差级数和等比级数	209 (576)
§ 2. 递归数列	216 (578)
§ 3. 任意数列	226 (588)
第十章 求和	231 (592)
第十一章 排列组合	239 (604)
第十二章 牛顿二项式	248 (607)
第十三章 数学归纳法	254 (617)
第十四章 必要性和充分性	260 (629)
第十五章 复数	267 (630)
第十六章 杂题	275 (641)
解答部分	(295)

注: 前一个数码为正文页数, 后一个数码为解答页数。

第一章 多项式的恒等变换

§1. 多项式的恒等变换

证明下列恒等式:

$$1. a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc \\ = (b+c)(c+a)(a+b).$$

$$2. (a+b+c)(bc+ca+ab) - abc \\ = (b+c)(c+a)(a+b).$$

$$3. (x^2-1)(y^2-1)(z^2-1) + (x+yz)(y+zx) \\ \times (z+xy) = (xyz+1)(x^2+y^2+z^2+2xyz-1).$$

$$4. 4[(ac'-ca')^2 - (ab'-ba')(bc'-cb')] \\ = [2(ac'+ca') - bb']^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c').$$

$$5. (a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2) - (ax+by+cz)^2 \\ = bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2.$$

$$6. (bc+ca+ab)^2 + (a^2-bc)^2 + (b^2-ac)^2 + (c^2-ab)^2 \\ = (a^2+b^2+c^2)^2.$$

$$7. (a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2 = (ay-bx)^2.$$

$$8. (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2 \\ = (bz-cy)^2 + (cx-az)^2 + (ay-bx)^2.$$

$$9. (ax+by+cz+dt)^2 + (bx-ay+dz-ct)^2 + (cx \\ - dy-az+bt)^2 + (dx+cy-bz-at)^2 = (a^2+b^2 \\ + c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2).$$

$$10. (x+y)^3 + 3xy(1-x-y) - 1 = (x+y-1)$$

- $$\times (x^2 + y^2 - xy + x + y + 1).$$
11. $2(2x - a)^3 - 27a^2x = (x - 2a)(4x + a)^2.$
12. $(x - y)(x + y)^3 = x(x - 2y)^3 + y(2x - y)^3.$
13. $(b + c)^3 + (c + a)^3 + (a + b)^3 - 3(b + c) \times (c + a)(a + b) = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc).$
14. $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 - 3(b - c) \times (c - a)(a - b) = 0.$
15. $(a^2 - bc)^3 + (b^2 - ac)^3 + (c^2 - ab)^3 - 3(a^2 - bc) \times (b^2 - ac)(c^2 - ab) = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2.$
16. $(b + c)^3 + (c + a)^3 + (a + b)^3 + (a + d)^3 + (b + d)^3 + (c + d)^3 = 3(a + b + c + d) \times (a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$
17. $(b + c - a)^3 + (c + a - b)^3 + (a + b - c)^3 - 3(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc).$
18. $(3a - b - c)^3 + (3b - c - a)^3 + (3c - a - b)^3 - 3(3a - b - c)(3b - c - a)(3c - a - b) = 16(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc).$
19. $(na - b - c)^3 + (nb - c - a)^3 + (nc - a - b)^3 - 3(na - b - c)(nb - c - a)(nc - a - b) = (n + 1)^2(n - 2)(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc).$
20. $a^3(b + c - a)^2 + b^3(c + a - b)^2 + c^3(a + b - c)^2 + abc(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 2abc(bc + ca + ab).$
21. $a^4(b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2)$

- $$= [a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)] \\ \times (a+b)(b+c)(c+a).$$
- 22*. $(x+y+z)^3 = (-x+y+z)^3 + (x-y+z)^3 \\ + (x+y-z)^3 + 24xyz.$
23. $xyz(x+y+z)^3 - (yz+zx+xy)^3 \\ = (x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy).$
- 24*. $4(x+y+z)^3 - 15[x(y-z)^2 + y(z-x)^2 \\ + z(x-y)^2] - x(2x-y-z)^2 - y(2y-z \\ -x)^2 - z(2z-x-y)^2 = 108xyz.$
- 25*. $4(x^2+ax+a^2)^3 - 27a^2x^2(x+a)^2 = (x-a)^2 \\ \times (2x+a)^2(x+2a)^2.$
- 26*. $4[ab(x^2-y^2) + (a^2-b^2)xy]^2 + [(a^2-b^2)(x^2-y^2) \\ - 4abxy]^2 = (a^2+b^2)^2(x^2+y^2)^2$
27. $[(x^2+y^2)^2 + a^2x^2]^2 - 4a^2(x^2+y^2)^3 \\ = [(x^2+y^2+ay)^2 - a^2(x^2+y^2)][(x^2+y^2-ay)^2 \\ - a^2(x^2+y^2)].$
- 28*. $(a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 - (a+b)^4 \\ + a^4 + b^4 + c^4 = 12abc(a+b+c).$
29. $(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2 + 2a^2b^2c^2 \\ - a^4(b+c)^2 - b^4(c+a)^2 - c^4(a+b)^2 \\ = 2(bc+ca+ab)^3.$
30. $(x+y)^4 + x^4 + y^4 = 2(x^2+xy+y^2)^2.$
31. $(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$
32. $(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$
- 33*. $(x+y+z)^5 - (y+z-x)^5 - (z+x-y)^5 \\ - (x+y-z)^5 = 80xyz(x^2+y^2+z^2).$

$$34^* . 25[(b-c)^7 + (c-a)^7 + (a-b)^7][(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3] = 21[(b-c)^5 + (c-a)^5 + (a-b)^5]^2 .$$

$$35^* . (a+b+c+d)^5 - (b+c+d)^5 - (c+d+a)^5 - (d+a+b)^5 - (a+b+c)^5 + (b+c)^5 + (c+a)^5 + (a+b)^5 + (a+d)^5 + (b+d)^5 + (c+d)^5 - a^5 - b^5 - c^5 - d^5 = 60abcd(a+b+c+d) .$$

$$36 . (b-c)^6 + (c-a)^6 + (a-b)^6 - 9(b-c)^2 \times (c-a)^2(a-b)^2 = 2(a-b)^3(a-c)^3 + 2(b-c)^3(b-a)^3 + 2(c-a)^3(c-b)^3 .$$

$$37 . (y-z)^4 + (z-x)^4 + (x-y)^4 = 2[(y-z)^2(z-x)^2 + (z-x)^2(x-y)^2 + (x-y)^2(y-z)^2] = 2(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)^2 .$$

$$38 . a^4(b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2) = [a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)] \times (a+b)(b+c)(c+a) = -(b-c)(c-a) \times (a-b)(b+c)(c+a)(a+b) .$$

$$39^* . [b^2c^2(a+d) + a^2d^2(c+b)](b-c)(a-d) + [c^2a^2(b+d) + b^2d^2(c+a)](c-a) \times (b-d) + [a^2b^2(c+d) + c^2d^2(a+b)] \times (a-b)(c-d) = 0 .$$

$$40 . a_1 + (1-a_1)a_2 + (1-a_1)(1-a_2)a_3 + \cdots + (1-a_1) \times (1-a_2) \cdots (1-a_{n-1})a_n = 1 - (1-a_1)(1-a_2) \cdots (1-a_n) .$$

作下列多项式的乘法:

$$41. (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy).$$

$$42. (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 1).$$

$$43. (a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad - bc - bd - cd).$$

化简下列各式:

$$44. a(b + c - a)^2 + b(c + a - b)^2 + c(a + b - c)^2 + (b + c - a)(c + a - b) \times (a + b - c).$$

$$45. (2a^2 - 3ab - b^2)^2 - 4(a^2 - b^2)(a^2 + 3ab + 2b^2).$$

$$46. (a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab)^2 - (a + b + c)^2 \times (a^2 + b^2 + c^2).$$

$$47. (abc + bcd + cda + dab)^2 - (bc - ad)(ca - bd) \times (ab - cd).$$

§2. 多项式间的条件恒等式

求证:

1. 若 $s = a + b + c$, 则

$$(as + bc)(bs + ca)(cs + ab) = (b + c)^2(c + a)^2 \times (a + b)^2.$$

2. 若 $a + b + c = 0$, 则

$$1) a(a + b)(a + c) = b(b + a)(b + c) = c(c + b)(c + a) = abc.$$

$$2) a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) = 0.$$

3. 若 $a + b + c = 0$, 则

$$a^2(b + c)^2 + b^2(c + a)^2 + c^2(a + b)^2$$

$$+ (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) = 0.$$

4*. 若 $a + b + c = 0$, 则

$$1) a^3 + b^3 + c^3 = 3abc;$$

$$2) a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 2(ab + bc + ca)^2 = 2 \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \right)^2.$$

$$3) \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

$$4) \frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \\ = 2 \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^4 + b^4 + c^4}{4}.$$

$$5) \frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} \right)^2.$$

5. 若 $x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1$,
则 $xyz = 0$.

6. 若 $x = b^2 + bc + c^2$ 而 $y = b^2c + bc^2$, 则

$$4x^3 - 27y^2 = (b - c)^2(2b^2 + 5bc + 2c^2)^2.$$

7. 若 $2s = a + b + c$, 则

$$1) a(s - b)(s - c) + b(s - a)(s - c) \\ + c(s - a)(s - b) + 2(s - a)(s - b) \\ \times (s - c) = abc.$$

$$2) (s - a)^3 + (s - b)^3 + (s - c)^3 + 3abc = s^3.$$

8. 若 $a + b + c + d = A$, $a + b - c - d = B$,

$$a - b + c - d = C, \quad a - b - c + d = D,$$

$$\text{且 } ab(a^2 + b^2) = cd(c^2 + d^2),$$